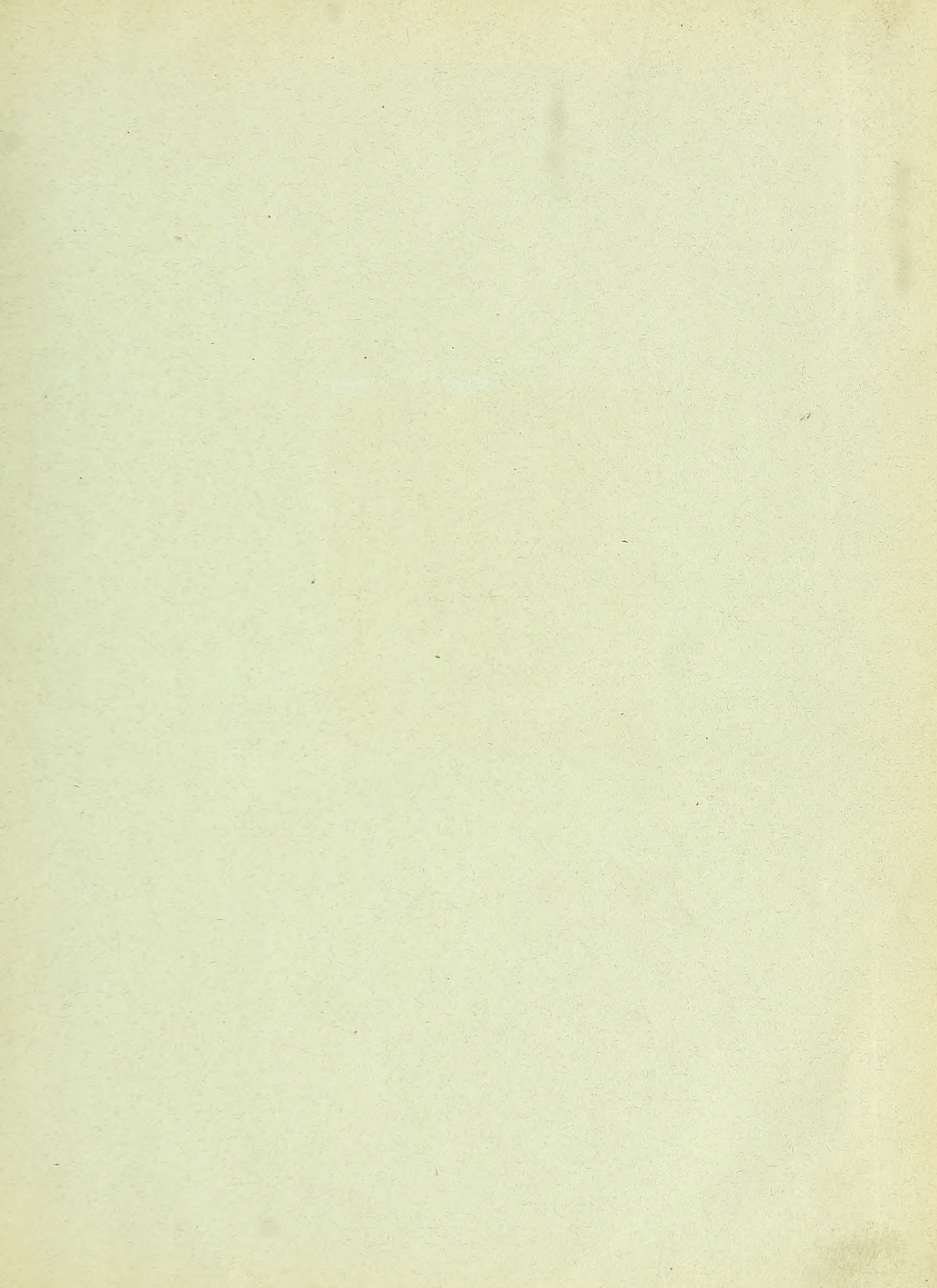
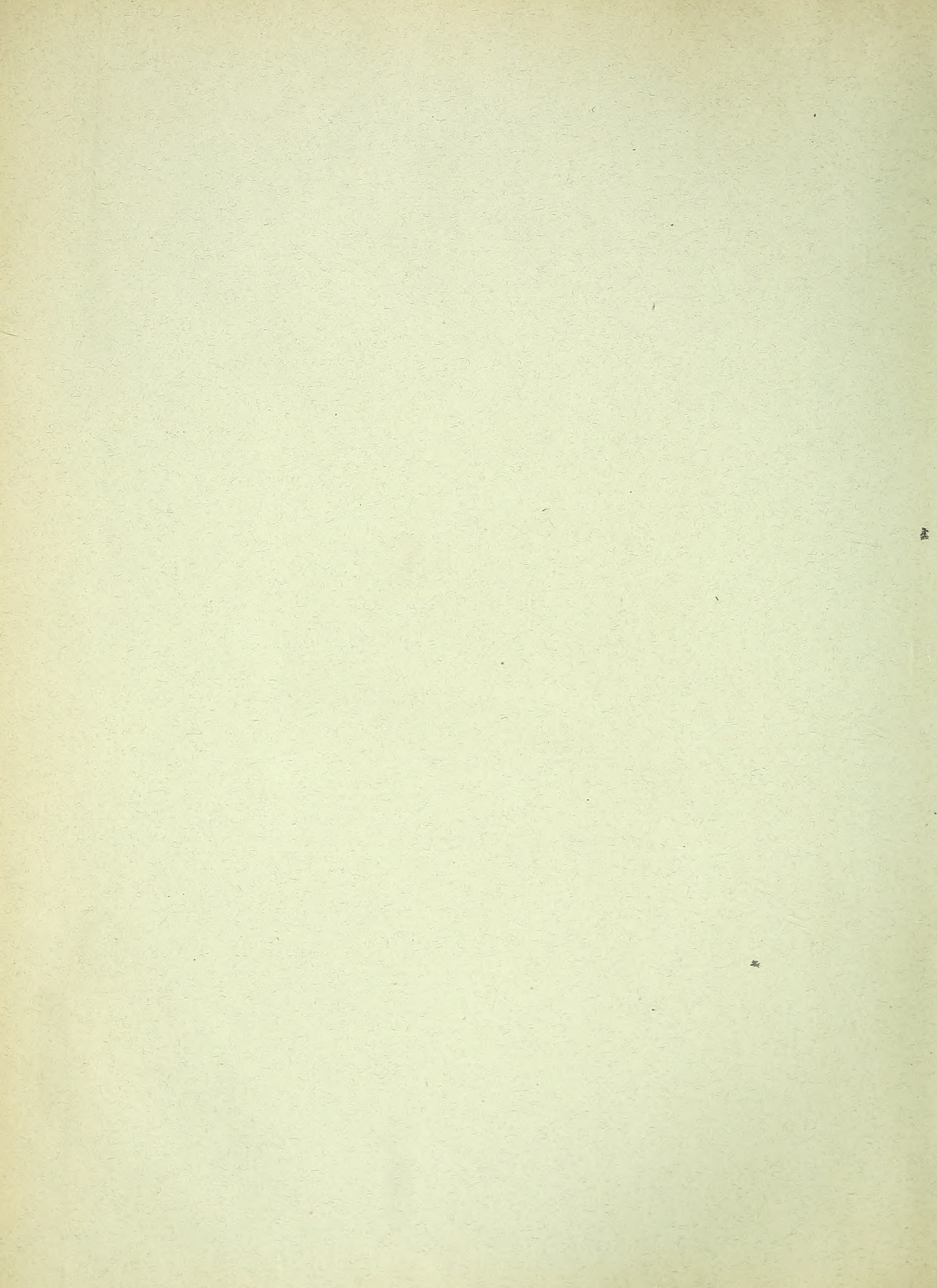
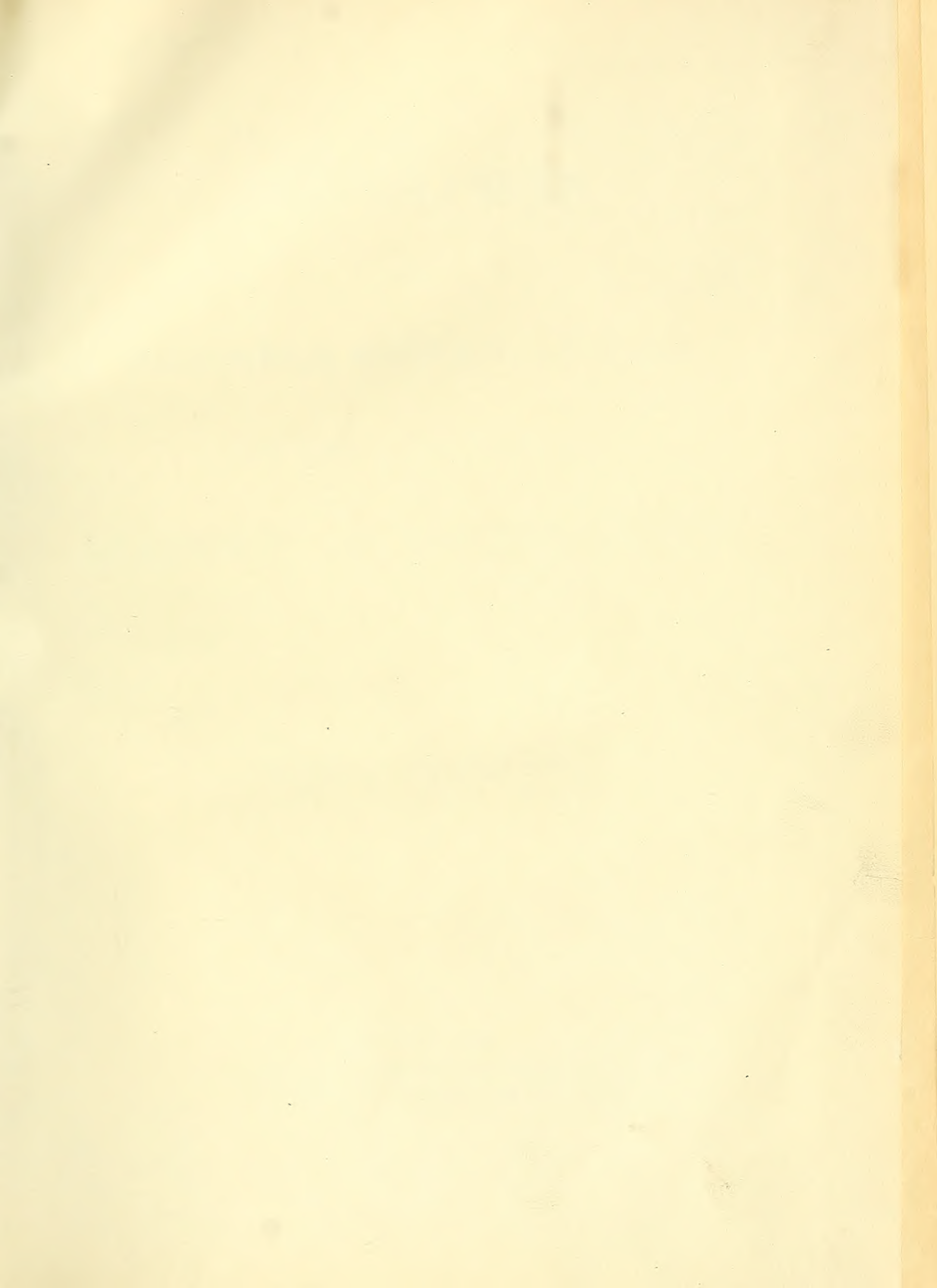
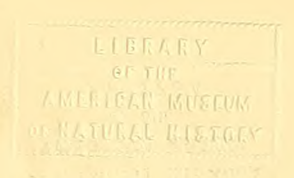












ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN KLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDZWANZIGSTER BAND
IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXXVIII. BAND.

MÜNCHEN 1909.
VERLAG DER K. B. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION DES G. FRANZ'SCHEN VERLAGS (J. ROTH).

AKADEMISCHE BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB IN MÜNCHEN.

Inhalt des XXIII. Bandes.

Syngonielehre.

Von

E. von Fedorow.

(Mit einer Tafel.)



Das vorige Jahrhundert hat durch die berühmten Werke einer Reihe genialer Mathematiker, wie Steiner, Chasles, Plücker, von Staudt, Schrötter, Reye und anderer, eine wunderschöne mathematische Disziplin geschaffen, welche von verschiedenen Gesichtspunkten aus bearbeitet und sogar mit verschiedenen Namen belegt wurde, wie z. B. Geometrie der Lage, projektive Geometrie, Lehre von den Büscheln überhaupt und harmonischen Büscheln im besonderen, noch abstrakter: Strahlenlehre. Man pflegt besonders diese Disziplin durch den Namen Neuere oder Höhere Geometrie zu bezeichnen.

Als charakteristisches Merkmal für diese Disziplin kann das Studium der unendlichen Gesamtheiten bedingter geometrischer Gebilde gelten im Gegensatz zu früherer Geometrie, welche sich fast ausschließlich mit vereinzelten Gebilden betätigte.

Die Sätze dieser neuen Lehre erhalten dadurch einen sehr abstrakten Charakter und viel weiter greifende Bedeutung. Von solchen Sätzen, wie Chasles' Dualismussatz, kann man mit Recht sagen, daß derselbe uns eine unbestimmt große Reihe neuer Sätze kund macht: bei jedem wesentlichen Schritte bestimmter Art wird derselbe auch in künftiger Zeit die Anzahl der Sätze verdoppeln.

Da aber aus ganz natürlichen Gründen die reinen Mathematiker stets zu höchster Allgemeinheit bestrebt waren, so erwies sich, daß die beschränkteren Verzweigungen dieser Disziplin, welchen aber, wegen zahlreichen Anwendungen, besonders auf Kristallographie, spezielle Bedeutung zukommt, geringeres Interesse in dem Geiste dieser genialen Männer erregten; aber nur geringeres, da auch zahlreiche Anwendungen von denselben nicht übersehen wurden. Durch die Werke und vereinzelte Sätze von Gauß, Möbius und den oben erwähnten Autoren erhielt auch die Kristallographie manchen wichtigen Beitrag.

Als solche beschränktere Disziplin der Neueren Geometrie kann auch die Lehre von den rationalen Strahlensystemen, kürzer Syngonielehre, abgesondert werden. Der Grundstein für diese abgesonderte Teildisziplin wurde von Möbius' Baryzentrischem Kalkül, Hessels Kristallonomie (Elementen der Gestaltenlehre) und J. Graßmans Werkchen „Zur physischen Kristallonomie“ gelegt. In diesen grundlegenden Werken sind jedoch manche Fragen ersten Ranges unberührt geblieben, sogar das zu Grunde dieser Lehre liegende Syngonieellipsoidgesetz nicht erwähnt. Aber die Kenntnis dieser Werke orientiert einen Kristallographen in den Fragen dieser Lehre gut und regt zu weiteren Schritten an und bereitet dieselben vor.

Jedenfalls war es den neuesten Kristallographen vorbehalten, diese spezielle Disziplin als eine der zu Grunde stehenden Hilfslehren zur Kristallographie weiter zu entwickeln. Und die vorliegende Arbeit bietet einen Versuch dar, nicht nur die schon errungenen

Resultate in einheitlichem Bilde zu kombinieren, sondern, und dabei in erster Linie, neue Gesichtspunkte hervortreten zu lassen.

Der Verfasser hegt die Überzeugung, daß eine im Vergleich mit dem blühenden Zustande anderer exakter Wissenschaften unermeßliche Zurückgebliebenheit der Kristallographie, welche sich in einer Reihe anomaler und beispielloser Tatsachen kund gab (wie vollständige Jahrzehnte hindurch dauerndes Ignorieren der grundlegenden Werke Hessels, so langes Vorherrschen von so irrtümlichen Auffassungen, wie die von Naumann, welche bis heutzutage Anklang haben u. s. f.), gerade davon herrührt, daß die für die Kristallographie im Grunde stehenden Disziplinen nicht hinreichend von Spezialisten berücksichtigt waren; teilweise aber, weil diese Disziplinen selbst bis zu letzter Zeit nicht vollkommen genug in ihren Teilen bearbeitet und zu Einheitlichem verbunden waren.

Der Verfasser hielt sich von den Schwierigkeiten nicht ab, diesem Mißzustand nach Kräften entgegen zu wirken.

Es möge auch diese Arbeit dazu beitragen.

I. Teil.

Syngonielehre in der Ebene.

Der Syngoniebegriff ist von der Kristallographie geschaffen.

Eine Annäherung an diesen Begriff kam schon im primitiven, rein empirischen Zustande dieser Wissenschaft in der Form eines kristallographischen „Systems". In dieser Form wurde der Begriff von dem berühmten deutschen Kristallographen Weiß hervorgehoben, und zwar in engem Zusammenhang mit dem von Demselben entwickelten Begriff der „kristallographischen Achsen".

Dieser letzte, echt mathematische Begriff entwickelte sich logisch auf Grund des zuerst von Hauy konstatierten Erfahrungsgesetzes, welches von dem letzteren zugleich theoretische Aufklärung erhielt, welche den heutigen kristall-struktur-theoretischen Vorstellungen sehr nahe kommt.

Der Begriff der kristallographischen Achse unterscheidet sich dadurch von dem der Koordinatenachsen der analytischen Geometrie, daß in demselben auf jeder Achse besonders eine bestimmte Strecke für eine Einheit angenommen wird, infolgedessen sämtliche Gebilde der Kristallographie in diesen Einheiten einen rationalen Ausdruck erhalten.

Vom Standpunkte der neueren mathematischen Philosophie kann man also sagen, daß dieser kristallographische Begriff ein arithmologischer ist, während der Begriff der Koordinatenachse der Analysis angehört, wo kontinuierlich veränderliche Größen zur Untersuchung kommen.

Auf diese Weise erhielt das Hauysche Gesetz in den kristallographischen Achsen einen anschaulichen Ausdruck.

Nun unterschied Weiß die kristallographischen Systeme gemäß der Lage und Streckeneinheiten der Achsen.

Da aber der Beweis leicht erbracht werden konnte, daß als kristallographische Achsen beliebige Geraden angenommen werden können, in welchen die Kristallflächen sich schneiden

lassen, so war somit klar geworden, daß solche Bestimmung der Systeme keine genügende, sondern eine willkürliche ist. Die Entdeckung der nahen Korrelation zwischen den auf diese Weise bestimmten Systemen und den optischen (später auch anderen physikalischen) Eigenschaften der Kristalle hat aber diesem Begriffe große praktische Bedeutung verliehen, welche allen Kristallographen ganz klar wurde.

Diese wichtigen Schritte in der Kristallphysik haben auf lange Zeit die Kritik dieses Begriffes paralisiert, aber zugleich verlor derselbe einen bestimmten geometrischen Sinn, da für denselben die physikalischen Eigenschaften eine noch wichtigere Rolle erhielten.

Später erwies sich, daß in Bezug auf verschiedene physikalische Eigenschaften verschiedene Verteilung der Kristalle in Gruppen Geltung hat, und dieser Umstand hat die Frage über den Inhalt des Begriffes „Kristallsystem" noch mehr verdunkelt.

Die dadurch entstandene Verlegenheit wurde dadurch beseitigt, daß man diesen Begriff, welcher stets in der kristallographischen Praxis als ein Grundbegriff galt, in der Theorie für einen willkürlichen erklärt, dessen Inhalt nicht etwaigen strengen Definitionen, sondern lediglich praktischen Gesichtspunkten entsprechen mußte.

Besonders wurde dieser Standpunkt von mathematischer Seite hervorgehoben. Am schärfsten wurde dies durch Herrn Schönflies, Autor des ausführlichen Werkes „Kristallsysteme und Kristallstruktur", ausgesprochen. Dort (S. 106) heißt es: „Als Einteilungsgrund kommt in erster Linie die Analyse des symmetrischen Verhaltens in Betracht; daneben sind Spekulationen über die Struktur der Kristalle, sowie spezielle physikalische und schließlich auch praktische Gesichtspunkte für die Ausgestaltung der üblichen Systematik maßgebend gewesen."

In einem der letzten Lehrbücher wird dies sogar folgendermaßen ausgesprochen: „Daß die Verteilung der Kristalle in Systeme eine künstliche ist, wird dadurch bewiesen . . ."; „somit hat die Verteilung der Kristalle in Systeme ihren Grund in der Vereinfachung des Ausdrucks durch zweckmäßiges Koordinatensystem, insoferne dieselbe bei gegebener Symmetrie zulässig ist. Dieses Prinzip ist ein rein methodologisches, also kein für die Natur der Kristalle wesentliches".[1])

Die echt wissenschaftliche, besonders mathematische Behandlung erfordert aber die Anwendung streng begrenzter Begriffe, welchen jede Zweideutigkeit fremd ist.

Dies war der Grund, warum der Verfasser einen solchen Begriff Syngonie vorgeschlagen und entwickelt hat.[2])

Wie die Symmetriearten eine ganz natürliche Einteilung der Kristalle sind, welcher streng mathematischer Grund zukommt, so besitzen die „Syngoniearten" ebensolchen Grund in Bezug auf die kristallographischen Komplexe, und dieser Grund liegt in speziellen Symmetriearten dieser Komplexe selbst (also komplexiale Symmetriearten = Syngoniearten).

Der Begriff des kristallographischen Komplexes erhielt durch die logische Entwicklung des Hauyschen Gesetzes ganz streng abgegrenzte Bedeutung. In diesem Begriff eines Büschels möglicher Flächen und Kanten liegt keine Spur einer Unbestimmtheit vor.

---

[1]) G. Wulffs Lehrbuch der Kristallographie. Warschau 1904, 175 (russ.). Es bleibt aber unbegreiflich, warum der Begriff der Syngonie, in welchem keine Spur einer Willkür vorhanden ist, unerwähnt geblieben.

[2]) Das Fachwort selbst wurde zuerst in Ch. Sorets „Crystallographie physique" zur Anwendung gebracht.

Das Objekt dieses Begriffes ist aber von mehr abstrakter Natur als die Kristallform. Der Komplex bleibt identisch, indem zugleich die Symmetriearten der betreffenden Kristallgestalten sich sehr verschieden erweisen. Insofern bei Veränderung der Symmetriearten der Komplex keine Veränderung erleidet, bleibt seine Syngonie dieselbe. Somit bürgt die Einteilung nach Syngonien in sich eine Gruppe verschiedener Symmetriearten.

Die Begriffe der Syngonie und des kristallographischen Komplexes scheinen untereinander so eng verbunden, daß man hätte sagen wollen, daß Syngonielehre eigentlich die Lehre von den Komplexen ist. Dies würde aber nicht ganz genau sein, da, wie wir es ersehen werden, es Komplexe gibt, welche durch keine bestimmte komplexiale Symmetrie ausgezeichnet sind, also keiner bestimmten Syngonieart zugerechnet werden können.

Wie die Figuren in der Ebene einen partikulären Fall der Figuren im Raume darstellen, so kann man auch als einen partikulären Komplex einen solchen betrachten, welcher in der Ebene liegt und eigentlich einen Strahlenbüschel bildet. Ein solcher Komplex wird eine Zone genannt, und kann ebenfalls nach Syngoniearten unterschieden werden.

Deshalb besteht der erste Schritt in der mathematischen Syngonielehre in der Abgrenzung der Syngoniearten der Zonen, welche in dieser Beziehung in der Arbeit über orthogonale und isotrope Zone studiert wurden.[1])

Im Grunde steht der Ausdruck der Rationalität der Doppelverhältnisse, und zwar

$$\frac{\sin(r\,r'')}{\sin(r'r'')} : \frac{\sin(r\,r''')}{\sin(r'r''')} = k, \qquad 1)$$

wo r, r', r'', r''' vier Strahlen des ebenen Komplexes sind (welche zugleich als vier Kanten einer möglichen Kristallfläche und vier Normale eines Flächenbüschels betrachtet werden können) und k ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind.

Aus dieser Relation geht direkt hervor, daß ein ebener Komplex durch drei Strahlen, folglich zwei Winkel resp. zwei Konstante bestimmt wird. In der Tat schreibt man der Zahl k alle möglichen rationalen Bedeutungen zu, so erhält man für r''' alle möglichen Lagen im Komplexe, d. h. die vollständigen Büschel.

In dem allgemeinen Fall gibt es keine Symmetrieelemente in diesem Komplex (abgesehen vom Inversionszentrum, welches notwendigerweise da ist,)[2]) welche zwei verschiedene Strahlen zur Deckung bringen können.

In diesem Falle sind also sämtliche Strahlen singuläre Richtungen. Dadurch wird die monokline Syngonie dieser schiefen Zonen bestimmt.[3])

Dabei wird vorausgesetzt, daß rechte Winkel vollständig abwesend sind, weil bei der Annahme ihrer Anwesenheit die Eigenschaften des Komplexes wesentlich andere werden.

Nehmen wir z. B. für einen rechten den Winkel $r\,r'$. Nun nimmt die Formel 1) die Form eines einfachen Verhältnisses:

$$\operatorname{tang}(r\,r'') : \operatorname{tang}(r\,r''') = k \qquad 2)$$

und dann kommt komplexiale Symmetrie zum Vorschein.

---

[1]) Verhandlungen der K. Mineralog. Ges. zu St. Petersburg 25, 53.

[2]) Da aber die Ebene des Büschels als eine Symmetrieebene desselben betrachtet werden kann, so folgt, daß auch die zweizählige, zur Büschelebene senkrechte Achse als stets vorhandene anerkannt werden muß.

[3]) Reguläre Plan- und Raumteilung. Abhandl., d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. II. Kl. 20, II. Abt., 1900.

In der Tat, unter Annahme $k = -1$, erhält man:

$$\text{tang}\,(r\,r'') := -\,\text{tang}\,(r\,r''') \text{ oder } r\,r'' = -\,r\,r'''.$$

In diesem Fall ist also jedem beliebigen Strahl r'' ein anderer r''' zugeordnet, welcher in anderer Richtung mit r denselben Winkel bildet wie r''. Somit kann den Strahl r als die Trace einer Symmetrieebene[1]) des Komplexes betrachtet werden; dasselbe gilt für den zu ihm senkrechten Strahl r'.

Alle Strahlen sind also paarweise einander als symmetrisch gleiche zugeordnet. Allein die besonderen Strahlen r und r' verbleiben als die singularen, das heißt sind keinen anderen Strahlen des Komplexes symmetrisch gleich, da allein für diese Strahlen die Winkel $r\,r''$ und $r\,r'''$ gleich Null sind.

In diesem Fall gibt es also zwei zueinander senkrechte singuläre Richtungen. Diese Syngonieart ist als eine rhombische bezeichnet worden, und die Zonen selbst als die orthogonalen.[2]) Die Anzahl der Konstanten reduziert sich zu einer einzigen, z. B. dem Winkel $r\,r''$. Die Entwicklung des Komplexes geschieht, indem der Zahl k alle rationalen Bedeutungen beigelegt werden.

In der Aufstellung der Formel 2) wurde das Vorhandensein wenigstens eines rechten Winkels vorausgesetzt; in der Tat kann für diese Syngonieart allein ein solcher Winkel zugelassen werden; unter Annahme eines zweiten wird leicht der Beweis geliefert, daß dann sämtliche Strahlen paarweise untereinander senkrecht stehen, und die Eigenschaften des Komplexes werden vom Grunde aus verschieden.

In der Tat, unter Annahme des rechten Winkels $r\,r'$ und zugleich etwa $r''\,r'''$, erhält man:

$$\text{tang}\,(r\,r'')\,\text{tang}\,(r\,r''') = -1$$

und dann nach der Multiplikation von 2):

$$\text{tang}^2\,(r\,r'') = -\,k = k'. \qquad 3)$$

Diese Gleichheit zeigt schon, daß jetzt keine einzige Konstante da ist, sondern sämtliche Winkel des Komplexes von vornherein durch die Bedingung der Rationalität der Tangentenquadrate bestimmt werden; k muß dabei natürlich negativ angenommen werden, da ein Quadrat nur positiv sein kann. Dem Werte $k' = \infty$ entspricht jedesmal der rechte Winkel $r\,r''$, unabhängig davon, welcher Strahl als Ausgangsstrahl angenommen wird.

Solche Zonen wurden als isotrope bezeichnet.

Als Folge davon, daß jedem Strahl ein ihm senkrechter Strahl zugeordnet ist, kann man sagen, daß jeder Strahl zugleich die Trace einer Symmetrieebene ist: also sämtliche Flächen einer isotropen Zone sind Symmetrieebenen. Auf dem Satze fußend, nach welchem zwei Symmetrieebenen unter dem Winkel α sich in Symmetrieachsen schneiden,

---

[1]) Resp. als zweizählige Symmetrieachse, was für die ebenen Figuren ganz gleichbedeutend ist.

[2]) Für die ebenen Systeme gilt diese Bezeichnung mit wörtlicher Genauigkeit, da diese Symmetrieart wirklich die Symmetrieart eines Rhombus ist. In der Tat aber ist die Bezeichnung den Raumfiguren entnommen, wo solche Bezeichnungen wie „Symmetrie des Rhombus“, „Symmetrie des Quadrates“ befremdend klingen.

deren Zähligkeit $\frac{\pi}{a}$ ist, kann man sagen, daß die Achse jeder isotropen Zone eine Symmetrieaxe von unendlicher Zähligkeit ist.

Zusammen genommen erweist sich die komplexiale Symmetrie einer isotropen Zone als die Symmetrie des Kreises.

Wenn aber die Strahlen eines isotropen Komplexes durch die Bedingung der Rationalität der Tangentenquadrate verbunden sind, so folgt daraus noch nicht, daß überhaupt nur ein einziger isotroper Komplex möglich ist; auch daraus, daß die Achsen der isotropen Zonen Symmetrieaxen sind von unendlicher Zähligkeit, folgt noch nicht, daß dieselben zugleich Symmetrieaxen sind von beliebiger Zähligkeit (abgesehen davon, daß dieselben, wie erwähnt, notwendigerweise zweizählige Axen sind).

Wegen besserer Aufklärung in den Fragen dieser Art wollen wir umständlicher die Grundformel 1) diskutieren.

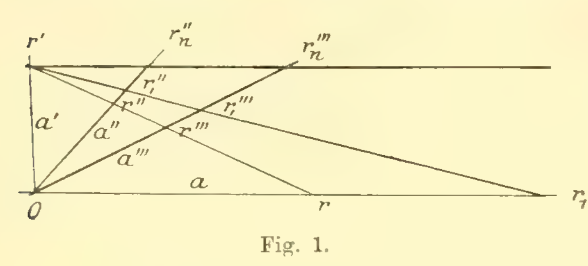


Fig. 1.

Ziehen wir durch den Stralenkomplex eine Schnittgerade $r\,r'$ (Fig. 1), und bezeichnen die dadurch auf den Strahlen r, r', r'', r''' bedingten Strecken respektive durch a, a', a'', a'''.

Nun ist die Gleichung 1) in der Form

$$\frac{a\,a''\sin(r\,r'')}{a'\,a''\sin(r'\,rr'')} : \frac{a\,a'''\sin(r\,r''')}{a'\,a'''\sin r'\,r''')} = k \qquad 1\text{a})$$

darstellbar, da dadurch gleiche Größen als Faktoren und als Divisoren eingeführt sind.

In dieser Form sind aber die Glieder dieses Doppelverhältnisses die Hälften der Dreiecksflächen, welche eine gemeinschaftliche Gerade zur Basis und den gemeinschaftlichen Eckpunkt O besitzen; da also alle Dreiecke gleiche Höhe besitzen, so sind ihre Flächen den Basisseiten proportional. Also kann dieselbe Gleichung auch in der Form

$$\frac{\Delta\, r\, O\, r''}{\Delta\, r'\, O\, r''} : \frac{\Delta\, r\, O\, r'''}{\Delta\, r'\, O\, r'''} = \frac{r\,r''}{r'\,r''} : \frac{r\,r'''}{r'\,r'''} = k \qquad 1\text{b})$$

geschrieben werden, und hat diese Form für beliebige Schnittgerade Geltung.

Nun wollen wir diese Schnittgerade aus dem Punkt r' drehen, bis sie endlich dem Strahle r parallel sein wird. Alle Strahlenstrecken ändern sich dabei in ihrer Größe, aber diejenige des Strahles r nähert sich der Größe ∞, und erreicht diese Grenzgröße, sobald die Schnittgerade dem Strahle r genau parallel kommt.

In dieser Grenzgröße nähern sich in der Formel 1b) die Strecken $r\,r''$ und $r\,r'''$; aber $r\,r'' = r\,r''' + r'''\,r''$; das Verhältnis dieser Strecken ändert sich also in der Reihenfolge:

$$\frac{r\,r''}{r\,r'''} = \frac{r\,r''' + r'''\,r''}{r\,r'''} = 1 + \frac{r'''\,r''}{r\,r'''};\; 1 + \frac{r_1'''\,r_1''}{r_1\,r_1'''};\; 1 + \frac{r_2'''\,r_2''}{r_2\,r_2'''} \ldots\ldots 1 + \frac{r_n'''\,r_n''}{\infty},$$

also besitzt es zu seinem Grenzwert die Einheit: für diesen Grenzfall besteht als die Relation:

$$r'\,r''' : r'\,r'' = k, \qquad 1\text{c})$$

das heißt: die Verhältnisse der Strecken auf der dem Strahle r parallellen Schnittgerade werden rational.

Die rationale Zahl ist also der Bruch $\frac{p_1}{p_2}$, wo p_1 und p_2 ganze Zahlen sind. In der Form dieses Bruches können wir auch ganze Zahlen schreiben, wie $1 = 1:1$, $2 = 2:1$ u. s. f.

Jede solche Zahl bezieht sich auf einen ganz bestimmten Strahl, wenn wir nur wissen, welche Strecke dem Verhältnis $1:1$ entspricht.

Zur vollständigen Charakteristik des Komplexes ist (außer dem Winkel zwischen den Strahlen r und r') noch die Strecke $O r'$ auf dem Strahle r' nötig, welche ebenfalls als eine Einheit in dieser Richtung angenommen werden kann.

Da das Verhältnis $\frac{r' r_n'''}{O r'}$ für jeden gegebenen Strahl r''' konstant bleibt, so ist dasselbe die echte Charakteristik des Strahles selbst. Ist $r' r_n''' = p_1/p_2$, so erhalten wir bei angezeigter Annahme $\frac{r' r_n'''}{O r'} = \frac{p_1/p_2}{1} = \frac{p_1}{p_2}$, wo p_1 und p_2 ganze Zahlen sind, positive oder negative.

Daraus ersehen wir, daß derselbe Strahl durch zwei ganze Zahlen charakterisiert werden kann, und diese Zahlen sind Strecken auf den Strahlen r und r', welche in bedingten Einheiten ausgedrückt sind. Das ist das einfachste Verfahren der Reproduktion des vollständigen Komplexes durch alle möglichen Kombinationen zweier ganzen Zahlen. Dabei aber dürfen behufs vollständiger Eindeutigkeit diese Zahlen keine gemeinschaftlichen Faktoren besitzen, und nun erhält das Symbol $(p_1 p_2)$ die Bezeichnung des Symboles des gegebenen Strahles und die Zahlen selbst die seiner Indizes.

Auf Grund dieser einfachen Relationen ist es sehr leicht, den Komplex einer natürlichen Entwicklung nach Perioden zu unterziehen (Fig. 2).

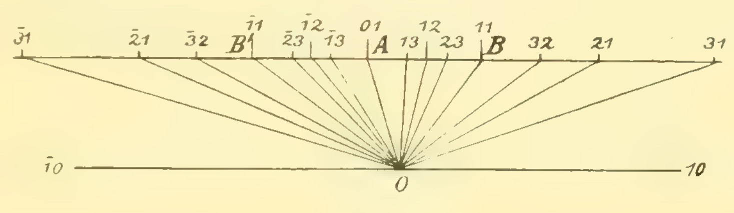


Fig. 2.

In der Tat dienen als Grundstrahlen die Strahlen $r = (10)$ und $r' = (01)$; zugleich sind für dieselben die Einheitsstrecken OA resp. AB gegeben; dem Strahl OB würde dann das Symbol (11) eigen sein; dem Strahl OB', für welchen $AB' = AB$, gehört das Symbol $(\bar{1}1)$ (und diese vier Strahlen bilden bekannterweise das harmonische Büschel).

Nun bemerken wir, daß das Symbol (11) aus den Symbolen (10) und (01) durch Summierung der respektiven Indizes entsteht $(1 + 0;\ 0 + 1)$; dasselbe hat in Bezug auf $(\bar{1}1)$ statt: $(\bar{1}1) \equiv (01) + (\bar{1}0) \equiv (0 + \bar{1};\ 1 + 0)$.

Diese vier Strahlen bilden die I. Periode in der Entwicklung des Komplexes.

Nach den nunmehr erkannten Verhältnissen sind wir jetzt in der Lage, die folgenden Strahlen mit den einfachsten Indizes zu bestimmen; diejenigen der II. Periode lassen sich durch einfaches Summieren aus denen der ersten Periode erhalten.

Eine Entwicklung in vier Perioden ist in der Figur 2 reproduziert. Dieselbe ist in anschaulicher Weise auch aus beigegebener Tabelle ersichtlich:

I	$\bar{1}0$	$\bar{1}1$	01	11	10		
II	$\bar{2}1$	$\bar{1}2$	12	21			
III	$\bar{3}1$	$\bar{3}2$	$\bar{2}3$	$\bar{1}3$	13	23	32	31

IV	$\bar{4}1$	$\bar{5}2$	$\bar{5}3$	$\bar{4}3$	$\bar{3}4$	$\bar{3}5$	$\bar{2}5$	$\bar{1}4$	14	25	35	34	43	53	52	41

Nun ist es klar, daß in dieser Weise leicht so viele Perioden reproduziert werden, wie man will, und alle dadurch bedingten Strahlen sind die Komplexstrahlen, welche in der Formel 1) ihren Ausdruck finden. Natürlich nimmt die Zahl der Strahlen jeder folgenden Periode nach bestimmtem Gesetze zu, und zwar nach dem Gesetze der geometrischen Progression mit dem Verhältnis 2, da jedesmal bei dem Übergang zur folgenden Periode ein Strahl durch zwei ersetzt wird; wir müssen dabei nur von den Ausgangsstrahlen absehen.

Nun ist leicht zu zeigen, daß man auf die Höhe der Periode aus dem Symbole selbst schließen kann. Dazu gehört folgende Regel: ist $(p_1 p_2)$, wo $p_1 > p_2$ ein Strahl k^{ten} Periode, so muß $(p_1 - p_2, p_2)$ einen Strahl der $(k-1)^{\text{ten}}$ Periode, und im Gegenteil $(p_1 + p_2, p_2)$ denjenigen der $(k+1)^{\text{ten}}$ Periode ausdrücken.

Die Höhenzahl der Periode drückt die Anzahl der aufeinanderfolgenden Additionen aus, welche nötig ist, um die Indizes $(p_1 p_2)$ aus denen der I. Periode abzuleiten. Natürlich spielen dabei keine Rolle weder die Vorzeichen der Indizes noch etwaige Permutationen, da solche von der Höhenzahl der Periode unabhängig sind. Infolgedessen ist es erlaubt, stets nur positive Indizes und eine bestimmte Permutation, z. B. $p_1 > p_2$ allein in Betracht zu ziehen.

Überhaupt läßt sich jede ganze Zahl aus Einheiten durch sukzessive Addition erhalten, und nur die Indizes der I. Periode sind 1 oder 0, das heißt höchstens 1.

Eine bestimmte Sukzession dieser Operationen führt uns zuletzt zu bestimmten Indizes; also alle solche lassen sich aus (10) und (11) zusammensetzen.

Zum Beispiel (53), wie aus oben gegebener Tabelle ersichtlich ist, läßt sich folgendermaßen zusammensetzen:

$$(53) \equiv (32) + (21); \quad (32) \equiv (21) + (11); \quad (21) \equiv (11) + (10).$$

Zusammengenommen sind drei Operationen notwendig, welche in der Gleichheit

$$(53) \equiv 3\,(11) + 2\,(10)$$

ihren endgültigen Ausdruck finden.

Diese Gleichheit ist aber von vornherein klar und kann ohne sukzessiver Operationsfolge, sondern direkt geschrieben werden. Zugleich aber ersetzt dieselbe eine ganz bestimmte Aufeinanderfolge der Operationen und dient als deren Ausdruck, und diese Aufeinanderfolge führt stets zu der Steigerung der Höhenzahl der Periode 3, das heißt, sie besitzt nicht nur für die in dieser Gleichung enthaltenen Indizes, sondern eine allgemeine Gültigkeit. Wenn also die Gleichheit

$$(p_1 p_2) \equiv 3\,(q_1 q_2) + 2\,(r_1 r_2)$$

besteht, wo $(q_1 q_2)$ und $(r_1 r_2)$ die Indizes zweier solcher Strahlen sind, welche durch Summierung diejenigen einer höheren Periode bedingen, so muß die Höhenzahl der Periode von $(p_1 p_2)$ um 3 größer sein, als die größte Höhenzahl der Indizes $(q_1 q_2)$ resp. $(r_1 r_2)$.

Der Anschaulichkeit wegen betrachten wir folgendes Beispiel:

III	32						21
IV				53			
V		85				74	
VI	11·7		13·8		12·7		95

I	11						10
II				21			
III		32				31	
IV	43		53		52		41

Diese Zahlenreihen weisen auf so vollständige Analogie hin, daß jeder bestimmten Zahl einer Reihe eine der anderen eindeutig zugeordnet ist.

Nun wissen wir aber, daß $(53) \equiv 3\,(11) + 2\,(10)$. Die bestehende Analogie läßt uns mit Recht auch die Gleichheit

$$(13 \cdot 8) \equiv 3\,(32) + 2\,(21)$$

schreiben, was übrigens unmittelbar klar ist.

Die Analogie besteht hier in der gleichen Aufeinanderfolge derselben Operationen, weshalb auch die Anzahl derselben ebenfalls die gleiche sein muß. Gehört (53) der IV. Periode zu, also führt die angegebene Operation zur Erhöhung der Periode von (11) und (10) um 3, so muß auch das Symbol (13·8) auf einen Strahl sich beziehen, welcher ebenso um 3 Perioden höher steht als die höchste der Perioden von (32) und (21); und da (32) der III. Periode zugehört, so muß (13·8) der VI. Periode zugehören.

Aber auch (11) läßt sich durch Summieren aus (10) und (01) zusammensetzen; also ist bei dem Übergang aus den letzten Indizes zu den ersten eine eben solche Operation nötig. Demgemäß kann man sagen, daß (53) sich aus (11) und (10) durch dieselbe Operation zusammensetzen läßt, wie (32) und (10) und (01). Wenn wir also für kurze Zeit die Ausgangsstrahlen als der besonderen 0ten Periode zugehörig betrachten wollen, so erhalten wir die Analogie:

I	11						10
II				21			
III		32				31	
IV	43		53		52		41

0	10						01
I				11			
II		21				12	
III	31		32		23		13

Nun aber sind die Indizes (32) in der Form (5—3, 3) darstellbar, da, wie gesagt, die Permutationen in den Fragen über Periodenhöhe keine Rolle spielen. Wenn also (53) einer um 1 höheren Periode zugehört als (32), so muß dasselbe einer um 1 niedrigeren Periode zugehören als $(5+3, 3) = (83)$, da $(83) = 3\,(11) + 5\,(10)$.

Auch (83), wie jedes andere Symbol, läßt sich durch sukzessives Summieren aus Symbolen der niedrigeren Perioden ableiten. Wollen wir dasselbe aus denen der III. Periode erhalten, so hätten wir als Ausgangsstrahlen diejenigen durch (31) und (21) ausgedrückten anzunehmen, da $3 > \frac{8}{3} > 2$.

Und nun finden wir:

III	31			21
IV			52	
V		83		73

und diese Tabelle dient als Bestätigung der Folgerung über die Periodenhöhe von (83).

Ebenso ist klar, daß (83) durch dieselbe Operationsreihe aus (11) und (01) sich ableiten läßt, wie (53) aus (01) und (10), also:

I	10			11	0	10			01
II			21		I			11	
III		31			II		21		
IV			52		III			32	
V		83			IV		53		

Der eben bewiesene Satz gibt das Verfahren in die Hand, die Periodenhöhe jedes gegebenen Symbols durch sukzessive Erniedrigungen um 1, bis das Symbol von schon bekannter Höhe erhalten wird, zu bestimmen.

Zum Beispiel, wir finden direkt, daß (87) der VIII. Periode zugehört, da (8—7, 7) $\equiv$ (17) das Symbol der VII. Periode ist.

Nun gehen wir zur detaillierten Studie der isotropen Komplexe über.

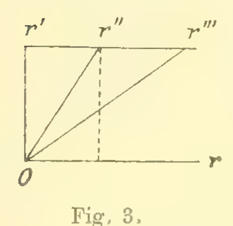


Fig. 3.

Da in denselben sämtliche Strahlen sich in einander senkrechte Paare zerlegen, so ist stets möglich, als Ausgangsstrahlen einen beliebigen Strahl r und den ihm senkrechten Strahl r' (Fig. 3) auszuwählen.

Bestimmen wir zuerst die Bedingungen, welche notwendig und hinreichend sind, daß der Komplex ein isotroper ist.

Gemäß der Formel 3) gehört dazu die Rationalität des Tangentenquadrates eines Winkels.

Es sei r'' derjenige Strahl, welchem das Symbol (11) zukommt. Nun sind die Achseneinheiten Or und Or' die Strecken $r'r''$ und Or'; aber $\frac{r'r''}{Or'} = \operatorname{tang}(r'r'')$ resp. $\frac{(r'r'')^2}{(Or')^2} = \operatorname{tang}^2(r'r'') = k = \frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen sind; also:

$$(r'r''):(Or') = \sqrt{a}:\sqrt{b}. \qquad 4)$$

Diese Gleichheit ist also die gesuchte Bedingung des Isotropismus.

Wird ein Strahl durch das Symbol $(p_1 p_2)$ ausgedrückt, so haben wir:

$$\frac{r'r'''}{Or'} = \frac{p_1}{p_2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \operatorname{tang}(r'r''') \text{ resp. } \operatorname{tang}^2(r'r''') = \frac{a}{b}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 = \frac{a}{b}k^2 \qquad 5)$$

Auf Grund des Satzes, nach welchem ein isotroper Komplex eine Symmetrieachse von unendlicher Zähligkeit besitzt, folgt, daß die Aufeinanderfolge der Winkel genau dieselbe bleibt, welche Strahlen auch als Ausgangsstrahlen genommen würden und in welcher der beiden Richtungen dieselben gemessen würden.

Also kommt der Formel 5) allgemeine Bedeutung zu.

Somit sind in einem isotropen Komplex die Winkel dadurch bedingt, daß die Tangentenquadrate einer und derselben Zahl gleich sind, multipliziert durch Quadrate einer beliebigen rationalen Zahl.

Durch diese Bedingung wird die Anzahl der einem gegebenen isotropen Komplex zugehörenden Strahlen in hohem Maße beschränkt. Jeder Winkel, dessen Tangenten-

quadrat eine rationale Zahl ist (unabhängig von einem quadratischen Faktor), welche mit der für den gegebenen Komplex charakteristischen Zahl nicht übereinstimmt, ist für diesen Komplex ein unmöglicher.

In Anbetracht der so hohen Wichtigkeit, welche dieser charakteristischen Zahl zukommt, soll dieselbe, als *Parameter* des Komplexes bezeichnet und für die bestimmende Hauptkonstante gehalten werden, welche aber im Gegensatz zu den Konstanten der schiefen und orthogonalen Zonen nicht eine beliebige Größe eines Winkels, sondern eine rationale Zahl ist.

Da aber eine unendliche Anzahl solcher vorhanden ist, *so sind auch die isotropen Komplexe selbst in unendlicher Anzahl vorhanden.*

Formel 5) läßt sich vereinfachen, wenn man dieselbe durch b zugleich multipliziert und dividiert, dann haben wir:

$$\operatorname{tang}^2(r' r''') = a\, b \left(\frac{k}{a}\right)^2 = a' k'^2. \tag{5a}$$

Jetzt ist a' eine ganze Zahl und k' ein rationaler Bruch. Diese ganze Zahl ist der eindeutig ausgedrückte Parameter des Komplexes. *Also sind die Parameter ganze Zahlen.*

Jede ganze Zahl, welche keine zwei gleichen Faktoren besitzt, ist Parameter eines ebenen isotropen Komplexes. Wenn es aber in einer ganzen Zahl zwei (oder mehr) gleiche Faktoren gibt, so ist diese Zahl als Parameter des Komplexes gleichbedeutend mit derjenigen, welcher dieser Faktoren beraubt sind (z. B. 6 und $54 = 6 \cdot 3^2$).

Also kommt den beiden Faktoren der Zahl $a' k'^2$ sehr verschiedene Bedeutung zu: der erste ist für den Komplex charakteristisch, der zweite, quadratische, ist eine beliebige rationale Zahl. Aber auch der erste Faktor kann auf verschiedene Art dargestellt werden, etwa $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, ab, $\frac{1}{ab}$. Nur wegen der Einfachheit haben wir aus dieser Zahlenreihe ab besonders hervorgehoben und als Parameter bezeichnet.

In Anbetracht des Gesagten kann man sehr verschiedene Zahlen der Form ck^2, $\frac{1}{c} l^2$ als etwas Einheitliches ansehen. In diesem Sinne können wir alle solche als *parametrisch gleiche* bezeichnen, da wirklich ihnen ein und derselbe Parameter zukommt. Zum Beispiel sind die Zahlen 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, 27, 12, $\frac{25}{3}$, 75 ... parametrisch gleiche, da allen denselben der gleiche Parameter 3 entspricht.

Vermittelst dieser Definition läßt sich ein allgemeiner Satz folgendermaßen ausdrücken:

Jedem Strahl des ebenen isotropen Komplexes gehört eine bestimmte Parametergröße zu.

Zieht man durch einen Strahlenpunkt, dessen Distanzquadrat dem diesem Strahle zugeordneten Parameter gleich ist, eine irgendwelchem anderen Komplexstrahl parallele Schnittgerade, so schneidet diese Gerade alle übrigen Komplexstrahlen in den Punkten, deren Distanzquadrate gleich sind den den respektiven Strahlen zugeordneten Parametern. Diese Distanzen werden vom Mittelpunkt des Komplexes gezählt.

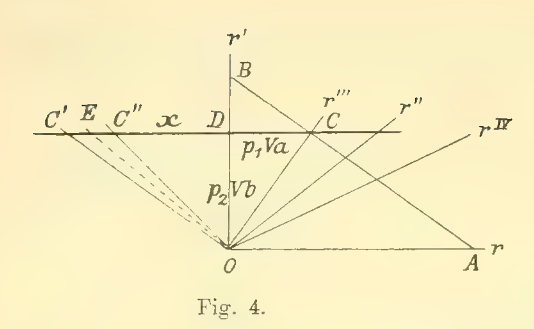


Fig. 4.

Der Definition gemäß werden hier unter Parameterzahlen parametrisch gleiche Zahlen verstanden.

Den Ausgangsstrahlen r und r' seien die Parameter a resp. b zugeordnet.

Ziehen wir eine zum Strahle OC $(p_1 p_2)$ senkrechte Schnittgerade AB (Fig. 4). Es entstehen die ähnlichen Dreiecke AOB und DOC; also:

$$OA : OB = \frac{1}{p_1 \sqrt{a}} : \frac{1}{p_2 \sqrt{b}} \text{ oder } \overline{OA}^2 : \overline{OB}^2 = a\left(\frac{1}{a p_1}\right)^2 : b\left(\frac{1}{b p_2}\right)^2, \tag{6}$$

Außerdem

$$\overline{OC}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{OD}^2 = a p_1^2 + b p_2^2 = c q^2. \tag{7}$$

Berücksichtigen wir noch, daß die Strecken OA und OB sind $a\left(\frac{a p_1^2 + b p_2^2}{a p_1}\right)^2$ resp. $b\left(\frac{a p_1^2 + b p_2^2}{b p_2}\right)^2$, daß also die Schnittgerade AB auf Strahlen r und r' durch Punkte hindurchgeht, welchen wirklich die Strecke mit dem Parameter a, resp. b zukommt, so ist klar, daß dem Strahle r''' der Parameter c zukommt.

Wegen allgemeinsten Beweis des Satzes ist eine beliebige, aber einem Komplexstrahle parallele Schnittgerade zu ziehen, welche aber auf den Strahlen r und r' die denselben zugeordneten Strecken bestimmt hätte. Als solche nehmen wir beliebig $\frac{q_1}{\sqrt{a}}$ und $\frac{q_2}{\sqrt{b}}$, wo q_1 und q_2 irgendwelche ganze Zahlen sind.

Nun ist die Gleichung dieser Geraden

$$\frac{x\sqrt{a}}{q_1} + \frac{y\sqrt{b}}{q_2} = 1$$

und die Gleichung des Strahles OC

$$x p_2 \sqrt{b} - y p_1 \sqrt{a} = 0.$$

Folglich sind die Koordinaten der Schnittpunkte:

$$x = \frac{p_1 q_1 q_2 \sqrt{a}}{p_1 q_2 a + p_2 q_1 b} \text{ und } y = \frac{p_2 q_1 q_2 \sqrt{b}}{p_1 q_2 a + p_2 q_1 b}.$$

Daraus ergibt sich das Quadrat der Strecke:

$$x^2 + y^2 = (a p_1^2 + b p_2^2)\left(\frac{q_1 q_2}{a p_1 q_2 + b p_2 q_1}\right)^2. \tag{8}$$

Dadurch erhält der aufgestellte Satz den allgemeinsten Beweis, da aus 8) ersichtlich ist, daß der Parameter eines beliebigen Strahles OC derselbe bleibt, wie man auch die Schnittgerade auswählt, wenn nur die im Satze aufgestellten Bedingungen erfüllt worden sind.

Bezeichnen wir die auf der Schnittgerade CD durch den zu OC senkrechten Strahl OC' bedingte Strecke durch x, so erhält man $(p_2\sqrt{b})^2 = xp_1\sqrt{a}$, und daraus

$$\overline{OC'}^2 = (p_2\sqrt{b})^2 + x^2 = \frac{b}{a}(ap_1^2 + bp_2^2)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = dq'^2.$$

Also
$$c\,d\,q^2 q'^2 = \frac{b}{a}(ap_1^2 + bp_2^2)^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = abk^2, \tag{9}$$

das heißt: das Produkt der Parameter zweier beliebiger zu einander senkrechter Strahlen ist stets gleich dem Parameter des Komplexes.[1])

Nun wollen wir daraus verschiedene Folgerungen ziehen.

Wir sehen, daß es gut möglich ist, eine unendliche Anzahl ebener isotroper Komplexe zu erhalten, indem man zweien einander senkrechten, sonst beliebigen Strahlen die Parameter a und b zuerteilt, wo a und b beliebige Zahlen sind, aber weder gemeinschaftliche noch quadratische Faktoren besitzen.

Die Tangentenquadrate sämtlicher Strahlenwinkel sind parametrisch gleiche Zahlen, und dieser Parameter ab ist der des Gesamtkomplexes.

Auch jedem Komplexstrahl kommt ein bestimmter Parameter zu. Welche Strahlen auch als die Ausgangsstrahlen angenommen würden, stets ist das Produkt der Parameter dieser Strahlen dem Parameter des Komplexes ab gleich; folglich besteht diese Relation gleichgeltend für sämtliche Paare zu einander senkrechter Strahlen, was übrigens durch 9) direkten Beweis erhält.

Aber jedem beliebig herausgenommenen Strahl können wir auch sonst eine beliebige ganze Zahl als dessen Parameter zuerteilen, nur muß diese Zahl in dem Komplex als ein möglicher Parameter auftreten.

Wollen wir einige Beispiele betrachten.

Es sei ein Komplex mit dem Parameter 1 gegeben. Nehmen wir als Parameter eines Strahles die Zahl a, so erhalten wir für den senkrechten Strahl das Parameter $\frac{1}{a}$, das heißt die Zahl, welche der Zahl a parametrisch gleich ist. In diesem Komplex besitzen folglich zwei senkrechte Strahlen stets einen und denselben Parameter resp. die Strahlen selbst sind parametrisch gleich. Daraus folgt das Vorhandensein der vierzähligen Symmetrieachse.

Die Gesamtheit der parametrisch gleichen Strahlen bildet einen **Teilkomplex**.

Nun ist es klar, daß die Symmetrie jedes Teilkomplexes dieselbe ist, wie die des Gesamtkomplexes. Aus dem Satze über Vorhandensein der Symmetrieachsen mit unendlicher Zähligkeit folgt aber, daß **alle Teilkomplexe deckbar gleich sind.**

In dem Komplex mit dem Parameter 1 müssen die Symmetrieebenen sich auch unter dem Winkel 45° schneiden, als Folge des Vorhandenseins der vierzähligen Symmetrieachse; und wirklich ist $\tang^2 45^0 = 1$.

In dem Komplex mit dem Parameter 3 müssen die Symmetrieebenen unter 60° stehen, da $\tang^2 60 = 3$. Also besitzt derselbe drei-, folglich auch sechszählige Symmetrieachsen.

---

[1]) Ziehen wir noch die Gerade OC'' unter dem Winkel BOC'' gleich dem Winkel BOC, so besitzt der Strahl OC'' denselben Parameter wie OC (da OD die Trace der Symmetrieebene ist). Andersereits ist OC'' mit OC' symmetrisch in Bezug auf OE, welche mit Or' den Winkel 45° bildet. Daraus folgt a) daß OE keinem anderen Komplex als $\{11\}$ zugehören kann und b) daß das Produkt der Parameter der so symmetrischen Strahlen gleich dem Parameter des Komplexes ist.

Schreiben wir einem Strahl den Parameter 1 zu, so soll der zu ihm senkrechte den Parameter 3 besitzen. Daraus ist zu schließen, daß in diesem Komplexe nach je 30^0 sich die Parameter 1 und 3 abwechseln.

Natürlich ist auch in jedem anderen Komplexe mit dem Parameter ab einem Strahle 1 der senkrechte Strahl ab zugeordnet.

Hier treffen wir auch verschiedenartige und lehrreiche Zahlenrelationen.

In erster Linie ist jetzt mit den Summen der Quadrate der ganzen Zahlen zu tun, wie dies aus der Formel 7) hervorgeht.

Der Satz über das Vorhandensein der Symmetrieachse von unendlicher Zähligkeit und der daraus weiter folgende Satz über das Vorhandensein einer unendlichen Reihe von Teilkomplexen mit gleichen Parametern führt uns zu dem Schlusse, daß die Gesamtheit der ganzen Zahlen, welche durch 7) ausgedrückt worden ist, in eine weitere Summe zerlegt werden kann, in welcher jedes Glied aus parametrisch gleichen Zahlen besteht, also:

$$N = A + B + C + \dots, \qquad 10)$$

wo A die Summe der Zahlen ak_1^2, B die Summe der Zahlen bk_2^2 u. s. f. bedeuten.

Diese Teilsummen entsprechen den Teilkomplexen; dabei sind die Strahlen der Teilkomplexe durch die Gleichheit der Winkel verbunden.

Daß wirklich sämtliche mit gleichen Winkeln untereinander stehenden Strahlen demselben Gesamtkomplexe angehören, ersieht man auch direkt aus dem allgemeinen Ausdruck der Tangenten solcher Winkel.

Es sei z. B. der Winkel γ gegeben zwischen dem Strahle r' und beliebigem Strahle r'''. Natürlich hat $\text{tang}^2 \gamma$ die Form des Produktes $ab \cdot k^2$, wo ab der Parameter des Komplexes ist. Nun ist zu beweisen, daß $\text{tang}^2 n\gamma = \text{tang}^2 \gamma \cdot l^2$, wo l ebenfalls eine rationale Zahl ist.

Zu diesem Zweck entwickeln wir den Ausdruck $\text{tang}\, n\gamma$. Der Kürze wegen wollen wir anstatt $\text{tang}\, \gamma$ einfach t schreiben.

Also

$$\text{tang}\ 2\gamma = t\,\frac{2}{1 - t^2}$$

$$\text{tang}\ 3\gamma = t\,\frac{3 - t^2}{1 - 3t^2}$$

$$\text{tang}\ 4\gamma = t\,\frac{4 - 4t^2}{1 - 6t^2 + t^4}$$

$$\text{tang}\ 5\gamma = t\,\frac{5 - 10t^2 + t^4}{7 - 10t^2 + 5t^4}$$

$$\text{tang}\ 6\gamma = t\,\frac{6 - 20t^2 + 6t^4}{1 - 15t^2 + 15t^4 - t^6}$$

$$\text{tang}\ 7\gamma = t\,\frac{7 - 35t^2 + 21t^4 - t^6}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6}$$

$$\text{tang}\ 8\gamma = t\,\frac{8 - 56t^2 + 56t^4 - 8t^6}{1 - 28t^2 + 70t^4 - 28t^6 + t^8}$$

$$\text{tang}\ 9\gamma = t\,\frac{9 - 84t^2 + 126t^4 - 36t^6 + t^8}{1 - 36t^2 + 126t^4 - 84t^6 + 9t^8}$$

$$\text{tang}\ 10\gamma = t\,\frac{10 - 120t^2 + 252t^4 - 120t^6 + 10t^8}{1 - 45t^2 + 210t^4 - 210t^6 + 45t^8 - t^{10}}\ {}^{1)}$$

. . . .

$$\operatorname{tang} n\gamma = \mathrm{t}\,\frac{n - n_1 \mathrm{t}^2 + n_2 \mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-5}{2}} n_{\frac{n-5}{2}} \mathrm{t}^{n-5} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_{\frac{n-3}{2}} \mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{t}^{n-1}}{1 - n_{\frac{n-3}{2}} \mathrm{t}^2 + n_{\frac{n-5}{2}} \mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-5}{2}} n_2 \mathrm{t}^{n-5} + (-1)^{\frac{n-3}{2}} n_1 \mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \mathrm{t}^{n-1}}$$

$$\operatorname{tang}(n+1)\gamma = \mathrm{t}\,\frac{(n+1) - (n_1 + n_{\frac{n-3}{2}})\mathrm{t}^2 + (n_2 + n_{\frac{n-5}{2}})\mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n_{\frac{n-3}{2}} + n_1)\mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n+1)\mathrm{t}^{n-1}}{1 - (n + n_{\frac{n-3}{2}})\mathrm{t}^2 + (n_1 + n_{\frac{n-5}{2}})\mathrm{t}^4 - \cdots + (-1)^{\frac{n-3}{2}} (n_{\frac{n-5}{2}} + n_1)\mathrm{t}^{n-3} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n_{\frac{n-3}{2}} + n)\mathrm{t}^{n-1} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{t}^{n+1}}$$

Dabei wird die Zahl n als eine ungerade gemeint.

Diese Tabelle, welche unendlich fortgesetzt gedacht werden kann, dient als direkter Beweis des eben erwähnten Satzes, da natürlich, wegen Rationalität des $\mathrm{t}^2\gamma$ auch sämtliche Koeffizienten bei $\operatorname{tang}\gamma$ hier rationale Brüche sind.

Das nähere Studium derselben Tangententabelle lehrt uns sehr merkwürdige Relationen kennen zwischen den Koeffizienten derjenigen Glieder dieser Reihe, welche auf Tangenten mit Winkeln von gerader Zähligkeit sich beziehen. Zuerst wollen wir zeigen, daß diese Koeffizienten unabhängig von denen zusammengesetzt werden können, welche sich auf Winkel mit ungerader Zähligkeit beziehen. Wir haben nämlich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} 2\gamma &= \frac{2\mathrm{t}}{1-\mathrm{t}^2} \\
\operatorname{tang} 4\gamma &= \frac{4\mathrm{t}-4\mathrm{t}^3}{1-6\mathrm{t}^2+\mathrm{t}^4} \\
\operatorname{tang} 6\gamma &= \frac{6\mathrm{t}-20\mathrm{t}^3+6\mathrm{t}^5}{1-15\mathrm{t}^2+15\mathrm{t}^4-\mathrm{t}^6} \\
\operatorname{tang} 8\gamma &= \frac{8\mathrm{t}-56\mathrm{t}^3+56\mathrm{t}^5-8\mathrm{t}^7}{1-28\mathrm{t}^2+70\mathrm{t}^4-28\mathrm{t}^6+\mathrm{t}^8} \qquad \text{A)} \\
\operatorname{tang} 10\gamma &= \frac{10\mathrm{t}-120\mathrm{t}^3+252\mathrm{t}^5-120\mathrm{t}^7+10\mathrm{t}^9}{1-45\mathrm{t}^2+210\mathrm{t}^4-210\mathrm{t}^6+45\mathrm{t}^8-\mathrm{t}^{10}} \\
\operatorname{tang} 12\gamma &= \frac{12\mathrm{t}-220\mathrm{t}^3+792\mathrm{t}^5-792\mathrm{t}^7+220\mathrm{t}^8-12\mathrm{t}^{11}}{1-66\mathrm{t}^2+495\mathrm{t}^4-924\mathrm{t}^6+495\mathrm{t}^8-66\mathrm{t}^{10}+\mathrm{t}^{12}} \\
\operatorname{tang} 14\gamma &= \frac{14\mathrm{t}-364\mathrm{t}^3+2002\mathrm{t}^5-3432\mathrm{t}^7+2002\mathrm{t}^9-364\mathrm{t}^{11}+14\mathrm{t}^{13}}{1-91\mathrm{t}^2+1001\mathrm{t}^4-3003\mathrm{t}^6+3003\mathrm{t}^8-1001\mathrm{t}^{10}+91\mathrm{t}^{12}-\mathrm{t}^{14}} \\
\operatorname{tang} 16\gamma &= \frac{16\mathrm{t}-560\mathrm{t}^3+4368\mathrm{t}^5-11440\mathrm{t}^7+11440\mathrm{t}^9-4368\mathrm{t}^{11}+560\mathrm{t}^{13}-16\mathrm{t}^{15}}{1-120\mathrm{t}^2+1820\mathrm{t}^4-8008\mathrm{t}^6+12870\mathrm{t}^8-8008\mathrm{t}^{10}+1820\mathrm{t}^{12}-120\mathrm{t}^{14}+\mathrm{t}^{16}}
\end{aligned}$$

. . . .

$$\operatorname{tang} 2n\gamma = \frac{2nt - n_1 t^3 + n_2 t^5 - \cdots + (-1)^{n-1} n_2 t^{2n-5} + (-1)^n n_1 t^{2n-3} + (-1)^{n+1} 2n t^{2n-1}}{1 - m_1 t^2 + m_2 t^4 - m_3 t^6 \cdots + (-1)^{n-2} m_2 t^{2n-4} + (-1)^{n-1} m_1 t^{2n-2} + (-1)^n t^{2n}}$$

$$\operatorname{tang}(2n+2)\gamma = \frac{(2n+2)t - (2n + n_1 + 2m_1)t^3 + (n_1 + n_2 + 2m_2)t^5 + \cdots\cdots}{1 - (1 + m_1 + 4n)t^2 + (m_1 + m_2 + 2n_1)t^4 - (m_2 + m_3 + 2n_2)t^6 + \cdots}\ [1])$$

Alle Zahlen $n_1, n_2, n_3 \ldots$ sind notwendigerweise gerade, was durch die Zusammensetzung $(2n + n_1 + 2m_1)$, $(n_1 + n_2 + 2m_2) \ldots$ bewiesen wird.

Auf diese Weise läßt sich die Tabelle unbegrenzt fortsetzen.

Nun ist leicht zu konstatieren, daß die Summe der Quadrate des Zählers und des Nenners dieser Brüche gleich ist einem vollständigen Quadrat. Daraus ist leicht zu ersehen, daß

$$\begin{aligned} 1 + \operatorname{tang}^2 2\gamma &= \frac{1}{\cos^2 2\gamma} = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 \\ 1 + \operatorname{tang}^2 4\gamma &= \frac{1}{\cos^2 4\gamma} = \frac{(1+t^2)^4}{(1-6t^2+t^4)^2} \\ 1 + \operatorname{tang}^2 6\gamma &= \frac{1}{\cos^2 6\gamma} = \frac{(1+t^2)^6}{(1-15t^2+15t^4-t^6)^2} \\ 1 + \operatorname{tang}^2 8\gamma &= \frac{1}{\cos^2 8\gamma} = \frac{(1+t^2)^8}{(1-28t^2+70t^4-28t^6+t^8)^2} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \text{B)}$$

Diese Relation ist für uns von hoher Wichtigkeit, da sie zum Beweise dient, daß alle mit r' den Winkel $2n\gamma$ bildenden Strahlen denselben Parameter besitzen, also mit r' zu einem und demselben Teilkomplexe gehören.

Wenn in der Tat wir dem Strahl r' den Parameter 1 zuerteilen, so ist der Parameter des Strahles, welcher mit r' den Winkel $2n\gamma$ bildet, in dem Ausdrucke $1 + \operatorname{tang}^2 2n\gamma = \frac{1}{\cos^2 2n\gamma}$ enthalten, und nun sehen wir, daß derselbe wirklich ein vollständiges Quadrat ist, also als Parameter gleich 1 ist.

Erteilt man dem Winkel γ solche Bedeutung zu, daß $\operatorname{tang}\gamma$ eine ganze Zahl sein würde, so erhält man für den Zähler ebenso wie für den Nenner der Brüche der angegebenen Tangentenreihe ebenfalls ganze Zahlen, und zwar solche, deren Quadratensumme auch das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Auf diese Weise ist also möglich, eine unbegrenzte Menge solcher Zahlen aufzufinden.

Zugleich läßt sich auf Grund dieser Relationen eine Anzahl von Sätzen ableiten, zum Beispiel den folgenden allgemeinen Zahlensatz:

Für jede ganze Zahl $1 + t^2$ (wo t eine beliebige ganze Zahl ist) und ihre beliebigen Potenzen ist stets möglich, solche zugeordnete Zahlen aufzufinden, daß

[1]) Da der Koeffizient m_1 gleich $(2n-1)n$ ist, so ist $1 + m_1 + 4n = 2n^2 + 3n + 1 = (2n+1)(n+1)$. Auch $n_1 = \sum_2^{2n-2} + \sum_{1\cdot 2}^{(2n-3)(2n-2)}$, wo $\sum_2^{2n-2}$ die Summe $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n-2)$, und $\sum_{1\cdot 2}^{(2n-3)(2n-2)}$ die Summe $1\cdot 2 + 3\cdot 4 + \cdots + (2n-3)(2n-2)$ bedeutet. Folglich $(2n + n_1 + 2m_1) = (2n + \sum_2^{2n-2} + \sum_{1\cdot 2}^{(2n-3)(2n-2)} + (2n-1)2n) = \sum_2^{2n} + \sum_{1\cdot 2}^{(2n-1)2n}$ u. s. f.

die Summe der Quadrate der beiden Zahlen gleich ist dem Quadrate einer ganzen Zahl.

Speziell für $t = 1$ haben wir $1 + t^2 = 2$, und da $\tan g\gamma = 1$, so ist $\gamma = \frac{\pi}{4}$. Somit erhält die periodische Reihe tang 2γ, tang 4γ, tang 6γ ... sukzessive die Werte ∞, 0, ∞, 0 ..., also in angegebener Reihe sind wechselweise Nenner und Zähler gleich Null, was übrigens direkt ersichtlich ist, da wechselweise die Summe der Koeffizienten in dem Nenner und Zähler der Tangenten gleich Null ist.

Wenn tang $2n\gamma$, wo n eine ungerade Zahl ist, gleich ∞ wird, so behält natürlich dieselbe Größe auch $1 + \text{tang}^2\, 2n\gamma$ resp. $\frac{1}{\cos^2 2n\gamma}$.

Ist aber tang $2n\gamma$, wo n eine gerade Zahl ist, gleich 0, so erhält $\frac{1}{\cos^2 2n\gamma}$ die Größe 1. Also bei $t = 1$ haben wir:

$$\pm(1 + t^2)^2 = 1 - 6t^2 + t^4;\quad \pm(1 + t^2)^4 = 1 - 28t^2 + 70t^4 - 28t^6 + t^8;\quad \pm(1 + t^2)^6$$
$$= 1 - 66t^2 + 495t^4 - 924t^6 + 495t^8 - 66t^{10} + t^{12} \text{ u. s. f.}$$ [1]

Daraus besteht eine Reihe von Sätzen über die Koeffizientengrößen der oben angeführten Tangentenausdrücke.

Natürlich läßt sich über dieselben noch eine längere Reihe von Sätzen ableiten.

Erteilt man z. B. der Größe t^2 den Wert 3 zu, so erhält man für $1 + \text{tang}^2 2n\gamma$ die periodische Zahlenreihe $+4$, $+4$, $+1$, $+4$, $+4$ ... und da zugleich $1 + t^2 = 4$, so findet man bei $t^2 = 3$:

$$4 = (1 - t^2)^2,\; 4^3 = (1 - 6t^2 + t^4)^2,\; \pm 4^5 = 1 - 15t^2 + 15t^4 - t^6;$$
$$4^7 = (1 - 28t^2 + 70t^4 - 28t^6 + t^8)^2 \text{ u. s. f.}$$

In den angeführten Tabellen sind also die Formeln enthalten, welche uns in Stand setzen, nach der Lage des einen gegebenen Strahles unbegrenzt viele Strahlen desselben Teilkomplexes aufzufinden. Wie wir aus der letzten Tabelle ersehen, gehören die Reihen der rationalen Kosinusse dazu.

Im allgemeinen, da der Winkel γ in Bezug auf 2π irrational ist, erhalten wir unendliche Reihen, was gerade mit dem Begriff des Teilkomplexes übereinstimmt. Nur als Ausnahmefälle erscheinen rationale Winkel γ, und dann entsteht anstatt des Komplexes nur eine begrenzte Strahlenkombination.

Für den gegebenen Komplex besteht die Gleichheit $\text{tang}^2(r'r'') = \frac{a}{b}$, und nun ergibt die erste Formel der letzten Tabelle:

$$\cos^2 2(r'r'') = \left(\frac{b - a}{b + a}\right)^2. \tag{11}$$

Es ist ersichtlich, daß $r'r''$ keinen irrationalen Wert erhält, a) wenn $2(r'r'')$ einen rechten Winkel ausbildet, oder b) wenn Verdoppelung des Winkels keine Änderung in dem Werte von $\cos^2$ führt.

---

[1] Da diese Gleichungen vermittelst Quadratwurzel zustande gekommen sind, so bleiben die Vorzeichen unbestimmt.

Im ersten Fall haben wir:

$$\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 = 0, \text{ also } a = b, \text{ und } r'r'' = \frac{\pi}{4}.$$

Im zweiten Fall erhält man:

$$\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 = \frac{1}{1+\frac{a}{b}} = \frac{b}{a+b}; \text{ also } a^2 = 3ab, \text{ und } \frac{a}{b} = 3.$$

Im ersten Falle besitzt der Komplex vierzählige, im zweiten sechszählige Symmetrieachsen.

In diesen beiden Fällen erfordert die Entwicklung des Teilkomplexes die Ersetzung des Strahles (11) durch einen anderen Strahl.

Nun läßt sich der Beweis hervorbringen, daß diese beiden Fälle die Ausnahmefälle sind: sonst erhält man nur irrationale Winkel.

Wenn in der Tat eine $2n$zählige Symmetrieachse vorhanden ist, so ist $\tang 2n\gamma = 0$, also in Anbetracht der Reihe A lassen sich sämtliche mögliche Symmetrieachsen auffinden, wenn man die Reihe der Gleichungen höheren Grades

$$2t = 0;\ 4t - 4t^3 = 0;\ 6t - 20t^3 + 6t^5 = 0;\ 8t - 56t^3 + 56t^5 - 8t^7 \ldots$$

auflöst.

Man sieht zuerst, daß alle diese Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel $t = 0$ besitzen, und diese Auflösung gibt uns die zweizählige Symmetrieachse, deren Vorhandensein in allen, sogar anisotropen Komplexen von Anfang an betont wurde. Überhaupt lassen sich Auflösungen der ersten Gleichungen periodisch in den übrigen wiederholen. Für alle geraden Werte von r haben wir die Wurzel 1, was vierzähligen Symmetrieachsen, für alle Werte $n = 3k$ (k beliebige ganze Zahl) haben wir die Wurzel $\frac{1}{3}$, was sechszähligen Symmetrieachsen entspricht.

Unterdrücken wir in allen diesen Gleichungen die gemeinschaftlichen Faktoren und bezeichnen t^2 durch x, so erhalten wir die Reihe (zuerst sehen wir von der zweiten Kolonne ab):

$$\begin{array}{ll}
x - 1 = 0; & z - 1 = 0 \\
3x^2 - 10x + 3 = 0; & z^2 - 10z + 9 = 0 \\
x^3 - 7x^2 + 7x - 1 = 0; & z^3 - 7z^2 + 7z - 1 = 0 \\
5x^4 - 60x^3 + 126x^2 - 60x + 5 = 0; & z^4 - 60z^3 + 5\cdot 126 z^2 - 5^2\cdot 60 z + 5^4 = 0 \\
3x^5 - 55x^4 + 198x^3 - 198x^2 + 55x - 3 = 0; & z^5 - 55z^4 + 3\cdot 198 z^3 - 3^2\cdot 198 z^2 + 3^3\cdot 55 z - 3^5 = 0 \\
7x^6 - 188x^5 + 1001x^4 - 1716x^3 + 1001x^2 & z^6 - 188z^5 + 7\cdot 1001 z^4 - 7^2\cdot 1716 z^3 + 7^3 \\
\quad - 188x + 7 = 0; & \quad \cdot 1001 z^2 - 7^4\cdot 188 z + 7^6 = 0 \\
2x^7 - 70x^6 + 546x^5 - 1430x^4 + 1430x^3 & z^7 - 70z^6 + 2\cdot 546 z^5 - 2^2\cdot 1430 z^4 + 2^3\cdot 1430 z^3 \\
\quad - 546x^2 + 70x - 2 = 0; & \quad - 2^4\cdot 546 z^2 + 2^5\cdot 70 z - 2^7 = 0
\end{array}$$

. . . .

Besitzt eine dieser Gleichungen die rationale Wurzel $\frac{p}{q}$ (und solche Wurzeln sind jetzt allein in Betracht zu nehmen), so müssen die Zahlen p und q als Faktoren der Koeffizienten im ersten und letzten Gliede dieser Gleichungen auftreten. Gerade aber läßt

sich jetzt von Faktoren absehen und lediglich die Koeffizienten im ganzen in Rücksicht nehmen, da dieselben lauter einfache Zahlen sind. Da aber zugleich der erste und letzte Koeffizient die gleichen Zahlen sind und die Gleichungen nicht in ganzen Zahlen (außer 1) auflösbar sind, so muß p notwendigerweise gleich 1 sein. Also die einzige zulässige Form der Wurzel ist $\frac{1}{q}$.

Ersetzen wir also x durch $\frac{z}{q}$, so erhalten wir die Gleichungen in der Form, in welcher sie die Wurzel 1 besitzen müssen (also die Summe der Koeffizienten gleich Null sein muß). In dieser Form sind diese Gleichungen in der zweiten Kolonne angegeben.

Nun sieht man, daß diese Bedingung lediglich in den drei ersten Gleichungen erfüllt ist, welchen respektive die Wurzeln $1, \frac{1}{3}$ und 1 entsprechen.

Außer diesen beiden besitzen also die Gleichungen keine andere Wurzel, welche den rationalen Winkeln entsprechen.

Aus den Gleichungen B ersieht man noch, daß wenn solche rationalen Werte der Winkel γ vorhanden sind, so müssen auch die Kosinusse derselben rational sein. Und nun ist schon längst bewiesen worden,[1]) daß solche Werte von $\cos\frac{2\pi}{n}$ nur 0, $\pm\frac{1}{2}$ und ± 1 zulässig sind, und diese Werte entsprechen den vierzähligen, der drei- respektive sechszähligen und den zweizähligen Symmetrieachsen.

Demgemäß dürfen die oben angegebenen Sätze nur als Schlußfolgerungen angesehen werden.

Sonst aber existiert eine unendliche Reihe von rationalen Kosinussen, und vermittelst dieser Reihe lassen sich aus einem gegebenen Strahle eines Teilkomplexes alle übrigen Strahlen desselben ableiten.

Sind a und b nicht zu große Zahlen, so können wir leicht einfachste Glieder solcher Kosinus-Tabelle für jeden rationalen Komplex besonders herstellen.

In der Tat $\frac{1}{t^2\gamma} = \frac{\cos^2\gamma}{1-\cos^2\gamma}$; wenn also $\cos\gamma = \frac{c}{d}$ ist, so besteht $\frac{1}{t^2\gamma} = \frac{c^2}{d^2-c^2}$. Dieser Formel gemäß läßt sich die Parametergröße für jeden rationalen Kosinus bestimmen, wenn wir sukzessive dem Zähler alle Werte der natürlichen Zahlenreihe, und dem Nenner alle Werte der größeren Zahlen erteilen.

Diese Zusammenstellung ist in der nächstfolgenden Tabelle geschehen. Der Einfachheit wegen, da jedem Werte von c^2 eine Kolonne entspricht, ist diese Zahl nur einmal am Haupte der Kolonne angegeben, und die übrigen Zahlen der Kolonne sind die Nenner der Brüche, das heißt d^2-c^2.

Wenn nicht direkt der Parameter, sondern eine andere ihm gleiche Zahl auftritt, so wird dieselbe in Parenthesen eingeschlossen angezeigt. Falls der Bruch, welcher die Kosinusgröße darstellt, gemeinschaftliche Faktoren im Zähler und Nenner besitzt, also keinen neuen Fall darstellt, so ist die entsprechende Zahl in Klammern [ ] eingeschlossen.

[1]) Zuerst von Budajew in Verhandlungen der K. Mineralog. Gesellschaft zu St. Petersburg 4, 189.

c =	1	2	3	4	5	6	7
c^2 =	1:	4:	9:	16:	25:	36:	49:
	3 1/2	5 2/3	7 3/4	9 (1) 4/5	11 5/6	13 6/7	15 7/8
	8 (2) 1/3	[12] —	16 (1) 3/5	[20] —	24 (6) 5/7	[28] —	32 (2) 7/9
	15 1/4	21 2/5	[27] —	33 4/7	39 5/8	[45] —	51 7/10
	24 (6) 1/5	[32] —	40 (10) 3/7	[48] —	56 (14) 5/9	[64] —	72 (2) 7/11
	35 1/6	45 (5) 2/7	55 3/8	65 4/9	[75] —	85 6/11	95 7/12
	48 (3) 1/7	[60] —	[72] —	[84]	96 (6) 5/11	[108] —	120 (30) 7/13
	63 (7) 1/8	77 2/9	91 3/10	105 4/11	119 5/12	133 6/13	[147] —
	80 (5) 1/9	[96]	112 (7) 3/11	[128] —	144 (1) 5/13	[160] —	176 (11) 7/15
	99 (11) 1/10	117 (13) 2/11	[135] —	153 (17) 4/13	171 (19) 5/14	[189]	207 (23) 7/16

c =	16	17	18	19	20	21	22
c^2 =	256:	289:	324:	361:	400:	441:	484:
	33 16/17	35 17/18	37 18/19	39 19/20	41 20/21	43 21/22	45 (5) 22/23
	[68]	72 (2) 17/19	[76]	80 (5) 19/21	[84] —	88 (22) 21/23	[92]
	105 16/19	111 17/20	[117] —	123 19/22	129 20/23	[135] —	141 22/25
	[144]	152 (38) 17/21	[160] —	168 (42) 19/23	[176]	184 (46) 21/25	[192] —
	185 16/21	195 17/22	205 18/23	215 19/24	[225] —	235 21/26	245 (5) 22/27
	[228]	240 (15) 17/23	[252]	264 (66) 19/25	[276]	[288]	[300] —
	273 16/23	287 17/24	301 18/25	315 (35) 19/26	329 20/27	[343] —	357 22/29
	[320] —	336 (21) 17/25	[352]	368 (23) 19/27	[384] —	400 (1) 21/29	[416]
	369 (41) 16/25	387 (43) 17/26	[405] —	423 (47) 19/28	441 (1) 20/29	[459] —	477 (53) 22/31

8	9	10	11	12	13	14	15
64:	81:	100:	121:	144:	169:	196:	225:
17 8/9	19 9/10	21 10/11	23 11/12	25 (1) 12/13	27 (3) 13/14	29 14/15	31 15/16
[36]	40 (10) 9/11	[44] —	48 (3) 11/13	[52] —	56 (14) 13/15	[60] —	64 (1) 15/17
57 8/11	[63] —	69 10/13	75 (3) 11/14	[81] —	87 13/16	93 14/17	[99] —
[80] –	88 (22) 9/13	[96] —	104 (26) 11/15	[112] —	120 (30) 13/17	[128] —	136 (34) 15/19
105 8/13	115 9/14	[125] —	135 (15) 11/16	145 12/17	155 13/18	165 14/19	[175] ·
[132] —	[144] —	[156]	168 (42) 11/17	[180] —	192 (3) 13/19	[204] —	[216] —
161 8/15	175 (7) 9/16	189 (21) 10/17	203 11/18	217 12/19	231 13/20	[245] —	259 15/22
[192] —	208 (13) 9/17	[224] ·	240 11/19	[256] —	272 (17) 13/21	[288] —	304 (19) 15/23
225 (1) 8/17	[243] —	261 (29) 10/19	279 (31) 11/20	[297] –	315 (35) 13/22	333 (37) 14/23	[351] —

23	24	25	26	27	28	29	30
529:	576:	625:	676:	729:	784:	841:	900:
47 23/24	49 (1) 24/25	51 25/26	53 26/27	55 27/28	57 28/29	59 29/30	61 30/31
96 (6) 23/25	[100] —	104 (26) 25/27	[108] –	112 (7) 27/29	[116] —	120 (30) 29/31	[124] ·
147 (3) 23/26	[153]	159 25/28	165 26/29	[171] –	177 28/31	183 29/32	[189] —
200 (2) 23/27	[208] —	216 (6) 25/29	[224] —	232 (58) 27/31	[240] —	298 (62) 29/33	[256] —
255 23/28	265 24/29	[275]	285 26/31	295 27/32	305 28/33	315 (35) 29/34	[325] —
312 (78) 23/29	[324] —	336 (21) 25/31	[348] —	[360] —	[372] —	384 (6) 29/35	[396] —
371 23/30	385 24/31	399 25/32	413 26/33	427 27/34	[441] –	455 29/36	469 30/37
432 (3) 23/31	[448]	464 (29) 25/33	[480] —	496 (31) 27/35	[512] —	528 (33) 29/37	[544] —
495 (55) 23/32	[513]	531 (59) 25/34	549 (61) 26/35	[567] —	585 (65) 28/37	603 (67) 29/38	[621] —

Zieht man aus dieser Tabelle die jedem gegebenen Parameter zukommende rationale Kosinusgröße, so erhält man noch folgende Tabelle:

Parameter	1	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19	21
	3/5	1/3	1/2	2/3	1/5	3/4	3/7	5/6	6/7	5/9	1/4	8/9	9/10	2/5
	4/5	7/9	1/7	2/7	5/7	1/8	9/11	1/10	2/11	1/15	7/8	4/13	5/14	10/11
	5/13	7/11	11/13	1/9	5/11	3/11	3/13	7/15	9/17	13/15	11/16	13/21	15/23	10/17
	12/13	1/17	11/14	19/21	23/25	9/16	1/19				11/19			17/25
	8/17	17/19	13/14	22/23	25/29	27/29					17/23			25/31
	15/17	23/27	13/19	22/27	29/35	31/32								
	7/25 24/25		23/26											
	20/29		23/31											
	21/29													

Parameter	23	26	29	30	31	33	34	35	37	38	39	41	42	43	46
	11/12	11/15	14/15	1/11 7/13	15/16	4/7	15/19	1/6	18/19	17/21	5/8	20/21	1/13 11/17	21/22	21/25
	19/27	25/27	10/19	13/17	11/20	16/17	33/35	17/18	14/23	37/39	19/20	16/25	19/23	17/26	45/47
			25/33	29/31	27/35	1/23 27/37		13/22							
								19/26							
								29/34							

Parameter	47	51	53	55	57	58	59	61	62	65	66	67	69	. .	. .
	23/24	7/10	26/27	3/8	8/11	27/31	29/30	30/31	29/33	4/9	5/17	33/34	10/13		
	19/28	25/26	22/31	27/28	28/29	57/59	25/34	26/35	61/63	32/33	19/25	29/38	34/35		
										28/37					

Übrigens ist es sehr leicht, die Zugehörigkeit des bestimmten rationalen Kosinus zu einem Komplex mit bestimmtem Parameter festzustellen. Ist $\cos \gamma = \frac{p}{q}$, so folgt daraus, daß $\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{q^2 - p^2}{p^2} = \frac{(q+p)(q-p)}{p^2}$. Diese Zahl ist der Zahl $(q+p)(q-p)$ parametrisch gleich.

Im speziellen Fall, wenn $q - p = 1$, haben wir $(q + p)$, wenn $q - p = 2$, haben wir $2(q+p)$, wenn $q - p = 3$, haben wir $3(q+p)$ als Parameter. Auch umgekehrt, für jeden gegebenen Parameter ist leicht die zugeordnete rationale Kosinusgröße aufzufinden, indem wir die Parameterzahl P resp. $P \cdot 2^2$, $P\,3^2$ . . . . in irgendwelche zwei Faktoren zerlegen und dieselben gleich $q + p$ und $q - p$ setzen; dann ist $\frac{p}{q}$ die gesuchte Größe.

Im ganz speziellen Fall $P = 1$ resp. a^2 haben wir $p^2 + q^2 = a^2$. In die erste Kolonne der letzten Tabelle kommen also lediglich die Zahlen, welche dieser Bedingung Genüge leisten.[1])

Wir haben gesehen, daß jeder Teilkomplex durch eine sehr einfache Operation — unbegrenzt gedachte Vervielfachung eines gegebenen Winkels desselben — entwickelt werden kann. Ist aber diese Entwicklung vollständig, das heißt würden mittelst dieser Operation sämtliche Strahlen erscheinen?

Es ist leicht den Beweis hervorzubringen, daß dies nicht der Fall ist.

Nehmen wir vorläufig an, daß dies der Fall ist für einen bestimmten Winkel α, dessen Kosinus gleich $\frac{p}{q}$ ist. Nun ist sofort klar, daß, wenn wir diesen Winkel durch 2α, 3α .. $n\alpha$ .. ersetzen, der Strahl unter dem Winkel α keineswegs bei dieser Operation erscheint, wie lange dieselbe auch fortgesetzt gedacht wird. Allgemeiner ausgedrückt ist dies für sämtliche Winkel 2α, 3α .. nicht der Fall, wenn zur Entwicklung als Grundwinkel $n\alpha$ angenommen wird. Natürlich werden hier die Winkel $m_1 2\pi + \alpha$, $m_2 2\pi + 2\alpha$, $m_3 2\pi + 3\alpha \ldots m_\varkappa 2\pi + \varkappa\alpha \ldots$ gemeint.

Wäre in der Tat die Annahme zutreffend, daß

$$m_\varkappa 2\pi + \varkappa\alpha = Nn\alpha,$$

so würde daraus folgen

$$\alpha(Nn - \varkappa) = m_\varkappa 2\pi \quad \text{resp.} \quad \alpha = \frac{m_\varkappa}{Nn - \varkappa} 2\pi.$$

Die Zonenachse wäre dann Symmetrieachse mit der Zähligkeit $Nn - \varkappa$ gewesen, was aber unmöglich ist.

Daraus folgt, daß die auf diese Weise aus α, 2α, 3α .. $(n-1)\alpha$ .. bestimmten Komplexe verschiedene sind, obgleich sämtliche die Strahlen enthalten, welche schon im Komplex α eingeschlossen sind. Wir können somit in Bezug auf einen gegebenen Winkel den ersten, zweiten, ... n^{ten} Komplex unterscheiden.

Zum Beispiel erwähnen wir für den ersten Winkel des Teilkomplexes in dem Komplexe {11} den Winkel 53° 8′ 15,96″, dessen Kosinus gleich $\frac{3}{5}$ ist, so erhalten wir

für den zweiten Winkel den Wert	106° 16′ 31,92″	dessen Kosinus	$-\frac{7}{25}$	ist,
„ „ dritten „ „ „	159° 24′ 47,88″	„ „	$-\frac{44}{125}$	ist,
„ „ vierten „ „ „	212° 33′ 3,84″	„ „	$-\frac{527}{625}$	ist,
„ „ fünften „ „ „	265° 41′ 19,80″	„ „	$-\frac{237}{3125}$	ist,
„ „ sechsten „ „ „	318° 49′ 35,76″	„ „	$+\frac{11753}{15625}$	ist,

[1]) Die allgemeine Formel für die Auffindung solcher Zahlen wurde von mir schon in Zeitschrift für Kristallographie 28, 47 hergeleitet. Dabei wurde von dem speziellen Fall abgesehen, für welchen $a - c$ ein volles Quadrat ist. In diesem Fall ist aber auch $a + c$ ein volles Quadrat, z. B. $29 - 20 = 3^2$, $29 + 20 = 7^2$, also $20^2 + 21^2 = 29^2$ u. s. w.

für den siebenten Winkel den Wert	(360^0+) $11^0\ 57'\ 51{,}72''$	dessen Kosinus	$+\dfrac{76443}{78125}$ ist,
„ „ achten „ „ „ „	$65^0\ 6'\ 7{,}68''$	„ „	$+\dfrac{164833}{390625}$ ist.

Im Komplex {12} erhalten wir auf analoge Weise, falls wir als ersten Winkel $70^0\ 31'\ 43{,}62''$ wählen, dessen Kosinus $\frac{1}{3}$ ist:

für den zweiten Winkel den Wert	$141^0\ 3'\ 27{,}24''$	dessen Kosinus	$-\dfrac{7}{9}$ ist,
„ „ dritten „ „ „	$211^0\ 35'\ 10{,}86''$	„ „	$-\dfrac{23}{27}$ ist,
„ „ vierten „ „ „	$282^0\ 6'\ 54{,}48''$	„ „	$+\dfrac{17}{81}$ ist,
„ „ fünften „ „ „	$352^0\ 38'\ 38{,}10''$	„ „	$+\dfrac{241}{243}$ ist,
„ „ sechsten „ „ „	(360^0+) $63^0\ 10'\ 21{,}72''$	„ „	$+\dfrac{329}{729}$ ist,
„ „ siebenten „ „ „ „	$133^0\ 42'\ 5{,}34''$	„ „	$-\dfrac{1511}{2187}$ ist,
„ „ achten „ „ „ „	$204^0\ 13'\ 48{,}96''$	„ „	$-\dfrac{5983}{6561}$ ist.

Wenn wir einen Winkel als n^{ten} bezeichnen, so heißt das, daß auch ein n mal geringerer Winkel demselben Teilkomplex eigen ist, wenn gleich zu demselben auch eine Anzahl von 360^0 hinzugefügt wird. Der Winkel $63^0\ 10'\ 21{,}72''$ in der letzten Tabelle ist nicht der sechste Winkel, sondern der Winkel $423^0\ 10'\ 21{,}72''$.

Die Betrachtung dieser beiden Tabellen zeigt uns, daß der Nenner des Kosinus des n^{ten} Winkels die n^{te} Potenz ist des Nenners des ersten Winkels. Es ist nun leicht zu beweisen, daß dieses Verhältnis das allgemeine Gesetz ist mit Ausnahme derjenigen Fälle, in welchen q eine gerade Zahl ist.

Daß der genannte Nenner wirklich eine solche Zahl ist und nicht mehr Faktoren besitzen kann, ersieht man direkt aus dem allgemeinen Ausdruck für $\cos(n\,\alpha)$, und zwar:

$$\cos(n\,\alpha) = \cos^n\alpha - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\cos^{n-2}\alpha\,\sin^2\alpha + \frac{n!}{4!\,(n-4)!}\cos^{n-4}\alpha\,\sin^4\alpha - \cdots$$

$$= \frac{p^n}{q^n} - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\,\frac{p^{n-2}(q^2-p^2)}{p^n} + \frac{n!}{4!\,(n-4)!}\,\frac{p^{n-4}(q^2-p^2)^2}{q^n} - \cdots$$

$$= \frac{1}{q^n}\left\{p^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,p^{n-2}(q^2-p^2)\left[1 + \frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}\,\frac{(q^2-p^2)}{p^2}\left(1 - \frac{(n-4)(n-5)}{5\cdot 6}\,\frac{(q^2-p^2)}{p^2}\cdots\right)\right]\right\}$$

Nun denken wir, daß q eine ungerade Zahl ist, und schreiben die Reihe der Ausdrücke:

$$\cos(2\,\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{q^2}(2\,p^2 - q^2)$$

$$\cos(4\,\alpha) = 2\,(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = \frac{1}{q^4}[2\,(2\,p^2 - q^2)^2 - q^2]$$

$$\cos(8\,\alpha) = 2\,[2\,(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1]^2 - 1 = \frac{1}{q^8}\{2\,[2\,(2\,p^2 - q^2)^2 - q^2] - q^2\}$$

. . . .

In jedem Gliede dieser Reihe haben wir in Parenthesen ein Binom von der Form $2\,p'^2 - q^2$, wo p' und q keine gemeinschaftliche Faktoren besitzen; infolgedessen bleibt der Nenner des Bruches $\cos(2^n\,\alpha)$ stets q^{2^n}.

Wenn aber dies der Fall ist für diese Reihe, so muß dasselbe auch für alle anderen Glieder der Reihe $\cos(n\,\alpha)$ bestehen; denn, wie aus dem allgemeinen Ausdruck zu ersehen ist, würde die Reduktion in einem Gliede dieser Reihe stattgehabt, so hätte dieselbe auch für alle folgenden Glieder bestanden, was aber für die Glieder der eben angeführten Reihe nicht der Fall sein kann.

Dieser Satz ist für uns von hoher Bedeutung, da derselbe uns in Stand setzt für jeden gegebenen Winkel eines Teilkomplexes direkt zu entscheiden, ob derselbe der erste, zweite, . . . n^{te} Winkel des Systems ist. Dazu ist nur nötig zahlenmäßig seinen Kosinus auszudrücken; ist der Nenner keine ganze Potenz, so ist der Winkel der erste.

Nur in dem Falle $q = 2\,r$ (wenn also q eine gerade Zahl ist) erfolgt eine Reduktion der Ausdrücke, und zwar:

$$\cos(2\,\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{2\,r^2}(p^2 - 2\,r^2)$$

$$\cos(4\,\alpha) = 2\,(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = \frac{1}{2\,r^4}[(p^2 - 2\,r^2)^2 - 2\,r^2]$$

$$\cos(8\,\alpha) = 2\,[2\,(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1]^2 - 1 = \frac{1}{2\,r^8}\{[(p^2 - 2\,r^2)^2 - 2\,r^2]^2 - 2\,r^2\}$$

. . . .

Wie man sieht, ist auch in diesem Falle die Nummer des gegebenen Winkels im Systeme zu ermitteln, nachdem sein Kosinus zahlenmäßigen Ausdruck in der Form eines regelmäßigen Bruches erhält.

Wenn aber die Bedingung q^n (resp. $2\,r^n$) für den Nenner des Bruches notwendig dafür ist, daß der Bruch im n^{ten} Winkel des Systems wäre, so ist dieselbe nicht zugleich hinreichend.

Man hätte zum Beispiel glauben können, daß $\frac{24}{25}$ ein Kosinus des zweiten Winkels eines Systems gewesen wäre; dies ist aber nicht der Fall, da dieses Glied weder dem System $\frac{3}{5}$, noch dem System $\frac{4}{5}$ angehört. Also ist der zugeordnete Winkel der erste Winkel des speziellen Systems des Komplexes {11}.

Die Systeme $\frac{p}{q}$ und $-\frac{p}{q}$ können als identische gelten, obgleich in denselben die identischen Glieder mit solchen von entgegengesetzten Vorzeichen wechseln.

Aber es sind Systeme denkbar, welche teilweise identisch sind. Zum Beispiel die Systeme $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$.

Natürlich gehören diese Kosinusse den ersten Gliedern der zugeordneten Systeme an. Die zweiten Glieder derselben sind respektive $-\frac{7}{25}$ und $+\frac{7}{25}$; die vierten Glieder sind aber vollständig identisch. Wenn also der Winkel angegeben wird, dessen Kosinus $\frac{527}{625}$ ist, so bleibt ganz unbestimmt, ob das erste Glied dieses Systems $\frac{3}{5}$ oder $\frac{4}{5}$ ist.

Jedenfalls folgt aus dieser Auseinandersetzung, daß sogar ein Teilkomplex nicht etwas Einheitliches darstellt, sondern in unendlich viele Teilsysteme sich gliedern läßt, und nur für diese letztere kommt die Entwicklung durch Zusammenstellung einer einfachen arithmetischen Progression aus dem ersten Winkel desselben zustande.

Auf diese Weise kann jeder Teilkomplex nach einem gegebenen Strahle entwickelt werden. Dazu gehört die Gesamtheit der Winkel, deren rationale Kosinusse dem Komplex-Parameter entsprechen, also eine und dieselbe Gesamtheit für alle Strahlen, unabhängig von den Parametern der letzteren. Wenn wir also den Strahlenkomplex (ab) so auf sich selbst anlegen, daß ein Strahl vom Parameter c zur Deckung mit einem Strahle vom Parameter d kommt, so kommen zugleich die betreffenden Teilkomplexe vollständig zur Deckung; dabei kommen aber die Komplexe selbst zur Deckung, das heißt auch die übrigen Teilkomplexe mit bestimmten anderen Teilkomplexen, da zur Deckung des Komplexes nur notwendig und hinreichend ist, wenn drei Strahlen einander decken.

Gerade aber diese Folgerung ist gleichbedeutend mit dem Satze, nach welchem jeder isotrope Komplex unendlich-zählige Symmetrieachsen besitzt.

Ist γ ein Winkel zwischen zwei Strahlen verschiedener Teilkomplexe, so ist 2γ der Winkel, welcher die Zähligkeit einer vorhandenen Symmetrieachse bedingt, und alle Drehungen um den mehrfachen Winkel ergeben keinen einzigen Strahl der übrigen Teilkomplexe. Für den Übergang zu einem Strahl von diesen übrigen Teilkomplexen ist eine Drehung um einen ganz anderen Winkel und dessen mehrfache nötig.

Daraus ergibt sich, daß einem jeden isotropen Komplex nicht eine einzige, sondern die unendliche Gesamtheit der Symmetrieachsen von unendlicher Zähligkeit zukommt, und daß dabei alle unendlichen Größen, welche die Zähligkeit der betreffenden Symmetrieachsen bedingen, keine endliche Faktoren (außer 2) besitzen. Als Ausnahmefälle erscheinen der tetragonale Komplex, für welchen diese Größe durch 4 und der hexagonale Komplex, für welchen diese Größe durch 6 teilbar ist.

Alle diese unendlich-zähligen Symmetrieachsen sind untereinander inkongruent (abgesehen vom gemeinschaftlichen Faktor 2), weil bei der Annahme des gemeinschaftlichen Faktors r zwischen den Zähligkeiten der beiden, dies bedeuten würde, daß auch eine n zählige Symmetrieachse vorhanden ist, was, wie bewiesen, unmöglich ist. Wenn also γ einen Winkel zwischen zwei Strahlen verschiedener Teilkomplexe bedeutet, so fehlen in dem Komplexe sämtliche Winkel $\frac{\gamma}{n}$, wo n eine beliebige ganze Zahl ist.

In Anbetracht der Formel 7) haben wir hier also mit folgenden Aufgaben der Zahlentheorie zu tun.

1. Es sind drei Zahlen a, b und c gegeben. Zu finden sind die Zahlen p_1 und p_2, deren Quadratmesser $ap_1^2 + bp_2^2$ durch c gleiche Quadrate ausgedrückt werden kann?

Die Auflösung dieser Zahlenaufgabe reduziert sich auf die Konstruktion eines Komplexes mit den Ausgangsstrahlen r (Parameter a) und r' (Parameter b) und die Entscheidung darüber, ob Strahlen mit dem Parameter c vorhanden sind.

Haben wir einmal konstatiert, daß ein solcher Parameter wirklich vorhanden ist, so existiert ein ganzer Teilkomplex mit diesem Parameter. Folglich, wenn es möglich erscheint, die Summe von a Quadraten irgendwelcher ganzen Zahl p_1 und von b Quadraten einer ganzen Zahl p_2 durch die Summe von c Quadraten einer Zahl q zu ersetzen, so sind unendlich viele Zahlen p_1, p_2 und q vorhanden, welche dieser Bedingung Genüge leisten. Die betreffenden Strahlen $(p_1\, p_2)$ bilden eine unendliche Reihe von Winkeln, welchen rationale Kosinusse entsprechen und dem Komplexparameter $a\,b$ entsprechen.

Daraus ersehen wir, daß dieselbe Aufgabe mehr korrekt so zu formulieren wäre:

2. Es sind zwei ganze Zahlen a und b gegeben. Zu entscheiden ist, ob die Summe von $a p_1^2 + b p_2^2$, wo p_1 und p_2 verschiedenartige ganze Zahlen sind, durch c gleiche Quadrate ausgedrückt werden kann? oder noch: „durch welche Summe von c gleichen Quadraten kann die Summe $a p_1^2 + b p_2^2$ ausgedrückt werden, wo p_1 und p_2 beliebige ganze Zahlen sind?"

Vom Standpunkt der Syngonielehre reduziert sich diese Aufgabe auf die Auffindung der möglichen Strahlenparameter. Unter den notwendig vorhandenen Werten von c sind auch die Zahlen a und b vorhanden, das heißt die Summe $a p_1^2 + b p_2^2$ kann auf unendliche Weise auch einfach durch die Summen von a resp. b gleichen Quadraten ersetzt werden. Ist z. B. $a = 1$, so kann diese Summe auf unendliche Weise auch durch ein einziges Quadrat der ganzen Zahlen ersetzt werden.

Aus allem Gesagten geht klar hervor, auf welche Weise sich jeder Komplex bildlich vorstellen läßt.

Derselbe besteht aus einer unendlichen Anzahl von Teilkomplexen, und jedem letzteren kommt eine bestimmte Parametergröße, die gleiche für alle Strahlen des Teilkomplexes, zu. Wenn wir also jedem Strahle eine Strecke zuerteilen, welche durch diesen Parameter ausgedrückt wird, so wird jeder Teilkomplex durch einen Kreis dargestellt und der vollständige Komplex durch eine Gesamtheit von konzentrischen Kreisen, deren Radien gleich sind den respektiven Parametern der Teilkomplexe.

Nun aber spielen sämtliche Strahlen des Komplexes dieselbe Rolle, da durch Drehung um einen bestimmten Winkel zwischen zwei Strahlen verschiedener Teilkomplexe auch der vollständige Komplex mit sich zur Deckung kommt.

Von dem erwähnten bildlichen Standpunkte aus ist aber diese Drehoperation identisch mit Verlängerung einer Strecke um eine Größe, welche dieselbe einer anderen Strecke gleich macht und einem Strahle des anderen Teilkomplexes zukommt.

Falls wir also die Strecken eines Ausgangsstrahles um einen Faktor vergrößern, wodurch diese Strecke einer anderen Strecke des Komplexes gleich kommt und zugleich sämtliche anderen Strahlenstrecken um denselben Faktor vergrößern, so erhalten wir einen mit dem früheren identischen Komplex, was seine bildliche Darstellung anbetrifft, obgleich der analytische Ausdruck des Komplexes durch die Formel 7) verändert wird.

Multiplizieren wir zum Beispiel diese Gleichung mit $a\,c$, so erhalten wir:

$$c\,p_1'^2 + a\,b\,c\,p_2^2 = a\,q'^2. \qquad 7a)$$

Diese Identität der Komplexe führt zu einer sehr wichtigen Folgerung.

Denken wir, daß a und c Primzahlen sind, ebenso wie eine noch vorhandene Komplexzahl d. Die Multiplikation mit $a\,c$ gibt die Zahl $a\,c\,d$; die Identität des Komplexes erfordert aber, daß auch in dem ersten Komplexe die Zahl $a\,c\,d$ vertreten wäre. Also sind die Komplexzahlen (Parameter) die verschiedenartigen Produkte der bestimmten Primzahlen, welche selbst als Parameter auftreten.

Wenn aber d nicht eine Primzahl ist, sondern ein Produkt $d_1\,d_2$ von zwei (oder mehreren) Primzahlen, so sagt das Produkt $a\,c\,d_1\,d_2$ gar nicht aus, daß notwendigerweise auch d_1 und d_2 als selbständige Parameter auftreten. Es ist also auch der Fall nicht ausgeschlossen, daß einige Primzahlen nicht selbständig als Parameter, sondern nur als Faktoren der Parameterzahlen auftreten.

Nun ist aber stets möglich solche zwei Zahlen a und b auszuwählen, daß die Summe $a\,p_1^2 + b\,p_2^2$ durch keine p_1, p_2 als ein einziges Quadrat dargestellt werden kann. Durch die Multiplikation mit a nimmt aber die Summe die Form $p_1'^2 + a\,b\,p_2^2$ an, und da die Parameter der Ausgangsstrahlen natürlich zwei möglichen Parametern der Komplexstrahlen angehören, so ist jetzt auch Parameter 1 notwendigerweise ein möglicher Strahlenparameter.

Daraus ist zu folgern, daß in der Reihe der Komplexzahlen desselben Komplexes in seinen beiden Formen $a\,p_1^2 + b\,p_2^2$ und $p_1'^2 + a\,b\,p_2^2$ keine einzige gemeinschaftliche ist. Wäre eine einzige Zahl für beide Komplexe gemeinschaftlich, so würden auch sämtliche Komplexzahlen identisch, und das ist unmöglich.

Demzufolge sind Strahlenkomplexe und Zahlenkomplexe zu unterscheiden: einem und demselben Strahlenkomplexe können verschiedene Zahlenkomplexe zugeordnet sein, und dann haben solche Zahlenkomplexe keine einzige Zahl gemeinschaftlich. Wollen wir solche Zahlenkomplexe als koordinierte bezeichnen.

Dann ist der Satz zu formulieren: jeden zwei koordinierten Zahlenkomplexen gehört eine und dieselbe Gesamtheit der Primzahlen zu, aber in verschiedenen Kombinationen als Faktoren der Zahl.

Solche Zahlenkomplexe, welchen keine koordinierten Zahlenkomplexe zugeordnet sind, wollen wir als vollständige bezeichnen.

Nun ist es klar, daß jeder vollständige Zahlenkomplex auch die Zahl 1 enthält und überhaupt alle seine Zahlen alle möglichen Kombinationen einer bestimmten Reihe von Primzahlen darstellen: wäre eine Faktorenkombination $a_1\,a_2\,a_3\ldots$ nicht darin enthalten, so würden demselben auch sämtliche andere Kombinationen dieser einfachen Zahlen a_1, a_2, a_3 fremd sein, da durch Multiplikation mit a_1, a_2, a_3, $a_1\,a_2$, $a_1\,a_3$ u. s. w. wir andere Kombinationen erhalten, welche durch Einführung der komplementären Faktoren die Zahl $a_1\,a_2\,a_3\ldots$ ergeben hätten, als ein Glied des koordinierten Zahlenkomplexes, und dies ist unmöglich.

Also kann der vollständige Komplex nur durch die Gleichung der Form

$$a\,p_1^2 + p_2^2 = c\,q^2 \tag{7 b}$$

ausgedrückt werden, und dabei muß a eine Primzahl sein, weil sonst, z. B. wenn $a = a_1\,a_2$, a_1 ein möglicher Parameter gewesen wäre: so würde er nur mit einem quadratischen Faktor erscheinen können und die Kombination der Faktoren würde in dem Komplexe nicht vollständig vertreten sein, da die Zahlen a_1, a_2, einzeln genommen, in demselben nicht auftreten

würden. Die Ursache des Fehlens dieser Zahlen ist also dieselbe, wie die der Gleichheit einer der Zahlen a oder b der Einheit.

Durch Multiplikation mit a erhält die Gleichung die Form:

$$p_1'^2 + a p_2^2 = a c q^2. \qquad 7\text{ c)}$$

Die Einheit wird durch a und a durch die Einheit ersetzt, ebenso wie c durch $a c$ und $a c$ durch c. Das ist keine eigentliche Multiplikation, sondern die Vertauschung des Strahles r mit r', was natürlich stets erlaubt worden ist, ohne daß dabei eine Änderung auftritt.

Überhaupt bleibt der Zahlenkomplex unverändert, wenn man seine sämtlichen Zahlen durch zwei derselben multipliziert. Sind z. B. zwei Zahlen a und b vorhanden, so ersetzt die Multiplikation mit $a b$ a durch b und b durch a. Nun ist aber das Vorhandensein einer einzigen gemeinschaftlichen Zahl genügend, um die Identität der Zahlenkomplexe festzustellen.

Wenn also der Komplex durch zwei Zahlen 1 und $a_1 a_2$ bestimmt wird, so enthält derselbe weder a_1 noch a_2, da einfach Multiplikation durch $a_1 a_2$ diese zwei einander gegenseitig ersetzt. Das gleichzeitige Vorhandensein sämtlicher vier Zahlen 1, a_1, a_2 und c, a_2 würde bedeuten, daß der Komplex vollständig ist, was für die nicht einfache Zahl $a_1 a_2$ unmöglich ist.

Wird der Komplex durch zwei Zahlen 1 und $a_1 a_2 a_3$ bestimmt, so findet man auf dieselbe Weise, daß demselben weder a_1, a_2, a_3, noch $a_1 a_2$, $a_1 a_3$, $a_2 a_3$ notwendig zugehören. Überhaupt demjenigen koordinierten Komplex, welchem die Zahlen a_1 und $a_2 a_3$ zugehören, können nicht die Zahlen a_2 und $a_1 a_3$, auch nicht die Zahlen a_3 und $a_1 a_2$ zugehören. Diesem Strahlenkomplex sind somit vier Zahlenkomplexe zugeordnet.

Bei größerer Anzahl von einfachen Faktoren erhält man auch größere Anzahl der zugeordneten konjugierten Zahlenkomplexe. Es ist leicht den Beweis zu erbringen, daß, wenn die Anzahl der einfachen Zahlenfaktoren gleich n ist, die Anzahl der zugeordneten Zahlenkomplexe 2^{n-1} ist.

Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß auch einem einzigen einfachen Faktor nicht der vollständige, sondern eine Anzahl koordinierter Zahlenkomplexe entspricht und daß dies sogar der allgemeine Fall ist. Man bedenke nur, daß unter anderen auch stets der Parameter $1 + a$ vorhanden ist (dazu ist nur nötig p_1 und p_2 gleich 1 zu setzen); da a eine ungerade Zahl ist (mit Ausnahme von $a = 2$), so ist $1 + a$ stets eine gerade Zahl und überhaupt kann $1 + a$ verschiedene Faktoren besitzen, und diese Faktoren können nicht explicite als Parameter auftreten.

Sehr lehrreich ist hier auch die Vektorentheorie (resp. die Lehre der Imaginären) zur Anwendung zu bringen.

Man weiß, daß nach dieser Theorie $a + b i$, also auch $p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b} \cdot i$ (wo $i = \sqrt{-1}$) einen Vektor ausdrückt, welcher eine Resultierende (geometrische Summe) von zwei senkrechten Vektoren a resp. $p_1 \sqrt{a}$ auf der Ausgangsgerade und b resp. $p_2 \sqrt{b}$ auf der dazu senkrechten Gerade ist. Die jedem Vektor zukommende Streckengröße wird nach Hamilton „Skalar“ genannt. Also die Größen a resp. $p_1 \sqrt{a}$ und b resp. $p_2 \sqrt{b}$ sind die Skalare beider zusammengesetzten Vektoren.

Die Summierung zweier komplexen Zahlen geschieht durch die gesonderte Summierung ihrer reellen und ihrer imaginären Zahlen. Die geometrische Bedeutung der Summe ist die parallelogrammatische Zusammensetzung wie bei dem Summieren der Kräfte u. dgl. Also ist die Zahl $p_1\sqrt{a}+p_2\sqrt{b}\,i$ die Summe von $p_1\sqrt{a}$ und $p_2\sqrt{b}\,i$ und der betreffende Vektor ist die Diagonale des Rechteckes, dessen Seiten den zusammensetzenden Skalaren gleich ist.

In der Theorie der Imaginären wird anstatt „Skalar" das Fachwort „Modulus" gebraucht.

Der komplexen Zahl $a+b\,i$ entspricht der Modulus $\sqrt{a^2+b^2}$. Also ist der Parameter der Syngonielehre das Quadrat des Modulus. Ausserdem nennt man „Argument" den Winkel α, für welchen $\operatorname{tang}\alpha=\frac{b}{a}$, also der Winkel zwischen dem Ausgangsstrahle r und dem gegebenem Vektor resp. Strahl.

Für den Vektor resp. Strahl $p_1\sqrt{a}+p_2\sqrt{b}\,i$ ist der Modulus $\sqrt{a\,p_1^2+b\,p_2^2}$ resp. $q\sqrt{c}$.

Nun ist von vornherein klar, daß die Summe der Vektoren eines rationalen Komplexes ein Vektor desselben Komplexes ist.

In der Tat haben wir:

$$(p_1\sqrt{a}+p_2\sqrt{b}\cdot i)+(q_1\sqrt{a}+q_2\sqrt{b}\cdot i)=(p_1+q_1)\sqrt{a}+(p_2+q_2)\sqrt{b}\cdot i.$$

Diesem zusammengesetzten Vektor gehört der Modulus $\sqrt{a(p_1+q_1)^2+b(p_2+q_2)^2}$ an.

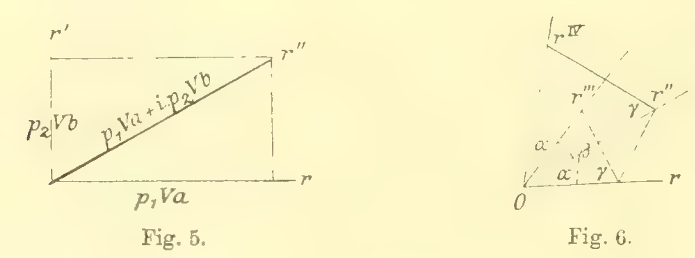


Fig. 5. Fig. 6.

Der Begriff „Vektor" unterscheidet sich von dem einfacheren Begriff „Strahl" dadurch, daß in dem ersten außer der Lage des Strahles noch seine Strecke hinzugenommen wird. Dieser Unterschied ist also dem Unterschiede zwischen Koordinatenachse und kristallographischer Achse analog.

Es muß noch bemerkt werden, daß der Parameter nicht eigentlich das Quadrat des Modulus, sondern diese Zahl mit Ausschluß von quadratischen Faktoren, als nicht $c\,q^2$, sondern c ist.

Der Begriff des Symboles $(p_1\,p_2)$ eines Strahles gehört ausschließlich der Lehre von den rationalen Strahlenkomplexen, also der reinen Syngonielehre an, und war der allgemeinen Vektorenlehre fremd.

Nun wird in der Theorie des Imaginären der für uns sehr wichtige Satz bewiesen, daß die Multiplikation zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen eine Zahl ergibt, deren Modulus dem Produkte der Moduli und deren Argumente der Summe der Argumente der gegebenen Zahlen gleich sind.

In der Theorie der Vektoren ist dasselbe in Bezug auf Vektoren selbst der Fall.

Es ist leicht den Beweis hervorzubringen, daß das Produkt zweier Vektoren eines gegebenen Komplexes ein Vektor desselben Komplexes ist.

Auf Grund des Satzes, nach welchem sämtlichen Komplexstrahlen die gleiche Rolle zukommt, ist es zuerst ganz klar, daß, wenn außer r'', welcher mit r den Winkel α bildet, noch der Strahl r''' in demselben Komplexe vorkommt, welcher mit r den Winkel β bildet, auch der Strahl r^{IV} vorhanden ist, welcher mit r den Winkel $\alpha + \beta$ bildet, da dieser Strahl mit r'' den Winkel β, also denselben wie r''' mit r, bildet.

Nehmen wir weiter den Strahl resp. Vektor r'' (Fig. 6) als den Ausgangsvektor. Da die Strecke $d\,r''$ die diesem Vektor zugeordnete Strecke (Modulus) ist, so wird jede geometrische Konstruktion, welche aus einem gegebenen Strahl zu einem anderen desselben Komplexes führt, für den letzteren auch die ihm früher zukommende Strecke ergeben. Und nun ist die Konstruktion des Strahles r^{IV} mittelst der Winkel β und γ aus r'' genau dieselbe, wie die Konstruktion von r''' aus r. Also ist der Vektor r^{IV} ein Vektor des Komplexes. Aber dieser Vektor ist das Produkt der Vektoren r'' und r'''.[1])

Sind also die Parameter der Strahlen r'' und r''' Primzahlen a_1 und a_2, so ist der Parameter des Strahles r^{IV} das Produkt a_1 und a_2. Folglich sind unter den Parametern alle solche vorhanden, welche sämtliche mögliche Kombinationen derjenigen Primzahlen darstellen, die auch gesondert die Parameter einiger Strahlen sind.[2])

Daraus folgt weiter, daß solche Vektoren nicht möglich sind, deren Parameter das Produkt $a\,f$ darstellt, wo a die Primzahl ist, welche als Parameter auftritt, und f eine solche, welche als Parameter nicht auftritt. Also sind die Primzahlen, welche, vereinzelt, als Parameter, nicht auftreten, auch in Produkten nur in einer Gesamtheit und nicht vereinzelt möglich.

Im besonderen sind für einen Komplex $(1, a\,b)$ die Parameter a und b unmöglich. Da aber $(1, a\,b)$ und $(a\,b)$ eigentlich einen und denselben Strahlenkomplex darstellen, so sind dieselben als Zahlenkomplexe von Grund aus verschieden (besitzen keine einzige gemeinschaftliche Zahl). Zwei solche Zahlenkomplexe, zusammen genommen, bilden einen vollständigen Komplex.

Ganz analog können wir diese Regel auf die Komplexe übertragen, welche durch 1 und ein Produkt von mehr als zwei Primzahlen sich bestimmen lassen.

Im Speziellen können wir aber einen gegebenen Vektor beliebige Male mit sich selbst multiplizieren, das heißt denselben potenzieren, und alle Potenzen desselben bilden ebenfalls mögliche Vektoren des Komplexes.

Bei sukzessiver Potenzierung erhalten wir für einen Vektor $p_1\sqrt{a} + p_2\sqrt{b}\cdot i$ eine arithmetische Reihe von Argumenten α, also α, $2\,\alpha$, $3\,\alpha\ldots$ und zugleich ist der Modulus der Potenz gleich der respektiven Potenz des Modulus, also der Reihe nach $\sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2}$, $(\sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2})^2 = a\,p_1^2 + b\,p_2^2$ (Parameter gleich 1), $(\sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2})^3 = \sqrt{a\,p_1^2 + b\,p_2^2}$ u. s. w., also Sukzession von zwei gleichen Parametern, in welchen alle geraden Glieder gleich 1 sind.

---

[1]) Das Produkt der Vektoren $p_1\sqrt{a} + p_2\sqrt{b}\cdot i$ und $q_1\sqrt{a} + q_2\sqrt{b}\cdot i$ ist der Vektorensumme $(p_1\,q_1\,a - p_2\,q_2\,b) + \sqrt{a\,b}\,(p_1\,q_2 + p_2\,q_1)\,i$ gleich.

[2]) Zu bemerken ist, daß dabei der Ausgangsvektor gleich 1 vorausgesetzt wird. Für die Komplexe $\{a\,b\}$, wo keine bestimmende Zahl gleich 1 ist, ist der Satz nicht mehr anwendbar; nun aber kann ein solcher Zahlenkomplex durch $\{1, a\,b\}$ ersetzt werden, und dann erhält der Satz wieder seine Gültigkeit.

Wenn wir also alle diese Potenzen mit dem Vektor des Ausgangsstrahles multiplizieren, so erhalten wir die Sukzession von Modulen $\sqrt{a}$, $\sqrt{a p_1^2 + b p_2^2}$ und $\sqrt{a}$.

Alle gerade Glieder dieser Sukzession bilden zusammen einen Kreis mit dem Radius a, und die ungeraden Glieder den Kreis mit dem Radius $a(a p_1^2 + b p_2^2)$, resp. $a c q^2$.

Somit sind wir auf anderem Wege zu derselben bildlichen Vorstellung des Komplexes durch eine unendliche Gesamtheit konzentrischer Kreise gekommen.

Nun wollen wir einige einfache Beispiele näher betrachten.

Bei der Entwicklung (in V Perioden) verschiedener Komplexe wollen wir die Symbole der Strahlen in Klammern oben und die zugeordneten Parameter unten schreiben.

Entwicklung des Komplexes {11}.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	5	2	5	1

(13)	(23)	(32)	(31)
10	13	13	10

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
17	29	34	1	1	34	29	17

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
26	53	73	58	65	89	74	41	41	74	89	65	58	73	53	26

(16)	(29)	(3 · 11)	(3 · 10)	(4 · 11)	(5 · 13)	(5 · 12)	(49)	(59)	(7 · 12)	(8 · 13)	(7 · 11)	(7 · 10)
37	85	130	109	137	191	169	97	106	193	233	170	149

(8 · 11)	(7 · 12)	(56)	(65)	(12 · 7)	(11 · 8)	(10 · 7)	(11 · 7)	(13 · 8)	(12 · 7)	(95)	(94)	(12 · 5)
185	193	61	61	193	185	149	170	233	193	106	97	169

(13 · 5)	(11 · 4)	(10 · 3)	(11 · 3)	(92)	(61)
191	137	109	130	85	37

Alle diese Parameter in der Reihe der Zahlen vereinigend, erhalten wir die Tabelle:

1 · 2 · 5 · 10 · 13 · 17 · 26 · 29 · 34 · 37 · 41 · 53 · 58 · 61 · 65 · 73 · 74 · 85 · 89 · 97 · 106 · 109 · 130 ...
2·5 2·13 2·17 2·29 5·13 2·37 5·17 2·53 2·5·13

Sehr merkwürdig ist die Reihe der Primzahlen, welche diesen vollständigen Komplex bilden. Das sind außer der Zahl 2 noch die Primzahlen von der Form $1 + 4n$, also:

1, 2, 5, (9), 13, 17, (21), (25), 29, (33), 37, 41, (45), (49), 53, (57), 61, (65), (69), 73, (77), (81), (85), 89, (93), 97 .....

Also sind alle diejenigen Glieder dieser arithmetischen Progression auszustreichen, welche nicht Primzahlen sind; deswegen sind sie in Klammern eingeschlossen.

Bei der eingeschränkten Entwicklung ist natürlich das Fehlen einiger Glieder zu erwarten, welche aus der weiteren Entwicklung zum Vorschein kommen würden.

Eine solche Zahl ist z. B. $82 = 2 \cdot 41$. Nun ist aber leicht zu beweisen, daß diese Zahl notwendigerweise als ein Parameter dieses Komplexes auftreten muß. Dazu ist nötig die Tangente derjenigen Summe von zwei Winkeln zu bestimmen, welche den Strahlen 2 (Symbol 11) und 41 (Symbol 54) entsprechen.

Nun ist tang $(1 \cdot 2) = 1$; tang $(1 \cdot 41) = \frac{4}{5}$; folglich

$$\text{tang}\,(1 \cdot 82) = \frac{\text{tang}\,(1 \cdot 2) + \text{tang}\,(1 \cdot 41)}{1 - \text{tang}\,(1 \cdot 2)\,\text{tang}\,(1 \cdot 41)} = 9\,;$$

das Symbol ist also $(9 \cdot 1)$.

Die besondere Eigenschaft dieses Komplexes, welche allein demselben zukommt, ist seine Symmetrie in Bezug auf den Strahl (11). Dieselbe kommt keinem anderen Komplex zu, da in keinem die beiden den Komplex bestimmenden Parameter gleich sein können. Das ist die Ursache, warum die Entwicklung ausnahmsweise bis zu VI Perioden verlängert wurde.

Entwicklung des Komplexes {12}.

(01) (12) (11) (21) (10)
1 1 3 6 2

(13) (23) (32) (31)
19 22 17 11

(14) (25) (35) (34) (43) (53) (52) (41)
33 6 59 41 34 43 33 2

(15) (27) (38) (37) (47) (58) (57) (45) (54) (75) (85) (74) (73) (83) (72) (51)
51 102 137 107 114 153 123 66 57 11 114 1 67 82 57 3

Daraus entnimmt man folgende Reihe der Parameterzahlen:[1]

1	2	3	6	11	17	19	22	33	34	38[2])	41	43	51	57	59	66	67	82	102	107	114...
			2·3				2·11	3·11	2·17	2·19			3·17	3·19		2·3·11		2·41	2·3·17		2·3·19

Dieser Komplex ist also wieder ein vollständiger.

Entwicklung des Komplexes {13}.

(01) (12) (11) (21) (10)
1 13 1 7 3

(13) (23) (32) (31)
7 31 21 3

(14) (25) (35) (34) (43) (53) (52) (41)
1 79 21 57 43 13 37 19

(15) (27) (38) (37) (47) (58) (57) (45) (54) (75) (85) (74) (73) (83) (72) (51)
19 151 201 39 163 217 43 91 73 131 139 97 19 91 61 7

Daraus entnimmt man folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	3	7	13	19	21	31	37	39	43	57	61	67	73	79	91	97	139	151	163	201 ...
					3·7			3·13		3·19					7·13					3·67

Auch dieser Komplex ist der vollständige (obgleich infolge ungenügender Entwicklung manche Zahlenkombinationen nicht zum Vorschein gekommen sind).

[1]) In diesem Komplex sind die Primzahlen von der Form $3 + 8n$ enthalten. Wenn z. B. in der angegebenen Entwicklung die Zahl 83 fehlt (und sie allein), so ersieht man aus der Gleichung $83 = 1 \cdot 9^2 + 2 \cdot 1$, daß diese Zahl bei der weiteren Entwicklung wirklich zum Vorschein kommt. Aber außer dieser Reihe der einfachen Zahlen gibt es noch andere, wie 2, 17, 41 ...

[2]) $38 = 1 \cdot 6^2 + 2 \cdot 1^2$.

Auch hier, wie im Komplex $\{11\}$, ersieht man eine merkwürdige Reihe von Primzahlen in der Form $1 + 6n$ mit Hinzufügung von 3. Also

1, 3, 7, 13, 19, (25), 31, 37, 43, (49), (55), 61, 67, 73, 79, (85), (91), 97, 103, 109, (115) . . . .

Infolge der ungenügenden Entwicklung hat es den Anschein, als ob einige dieser Zahlen fehlen, zum Beispiel 103, 109 . . ; nun ist es aber nicht schwer zu beweisen, daß in der Tat solche Zahlen wirklich als Parameter in die Reihe kommen. Also

$103 \cdot 2^2 = 1 \cdot 7^2 + 3 \cdot 11^2$ oder $103 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 10^2$, endlich $103 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 1 \ldots$

Entwicklung des Komplexes $\{15\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	21	6	1	5

(13)	(23)	(32)	(31)
46	1	29	14

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
1	129	134	89	61	70	5	21

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
14	249	329	254	29	345	30	141	105	174	21	129	94	109	69	30

Daraus entnimmt man folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	5	6	14	21	29	30	61	69	70	89	94	105	109	129	134	141	145 [1]
		2·3	2·7	3·7		2·3·5		2·23	2·5·7		2·47	3·5·7		3·43	2·67	3·37	5·29

174	249	254	329	345 . . .
2·3·29	3·83	2·127	7·47	3·5·23

Nun sieht man, daß dieser Zahlenkomplex kein vollständiger ist. Außer den Primzahlen, welche explizit in Parametern auftreten, gibt es eine Reihe anderer Zahlen, für welche dies nicht der Fall ist und welche, dem obigen Satz gemäß, überhaupt in die Parameter nur in einer Gesamtheit von Faktoren eintreten. Dazu gehören die Zahlen 2, 3, 7, 23, 37, 43, 67 . . .

Ersetzt man diesen Zahlenkomplex durch den Komplex $(2 \cdot 10)$, welcher als Strahlenkomplex mit demselben identisch ist, so findet man, daß dieser letzte der demselben koordinierte Komplex ist.

Entwicklung des Komplexes $\{2 \cdot 10\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
2	42	3	2	10

(13)	(23)	(32)	(31)
92	2	58	7

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
2	258	268	178	122	140	10	42

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
7	498	658	127	58	690	15	282	210	87	42	258	47	218	138	15

[1] $145 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 3^2$.

Daraus entnimmt man folgende Reihen der Parameterzahlen:

2	3	7	10	15	23	35	42	47	58	67	87	122	127	138	178	210
			2·5	3·5		5·7	2·3·7		2·29		3·29	2·61		2·3·23	2·89	2·3·5·7

218	258	282	498	658	690	...
2·109	2·129	2·141	2·249	2·329	2·3·5·23	

Stellt man in einer Zeile die explizit auftretenden Primzahlen des ersten, und in zweiter diejenigen des zweiten Komplexes, so erhält man die Reihe:

1				5		29		41			61		...
	2	3	7		23		37		43	47		67	...

Das Verhältnis der beiden Zahlenkomplexe ist folgendes: Alle möglichen Kombinationen der Zahlen der ersten Zeile, ebenso wie dieselben mit geraden Kombinationen der Zahlen der zweiten Zeile setzen den ersten Komplex zusammen. In dem zweiten sind dieselben Kombinationen nur mit den ungeraden Kombinationen der Zahlen der zweiten Zeile verbunden. Zusammengenommen bilden die beiden einen vollständigen Zahlenkomplex.

Da die Primzahlen einer jeden Zeile die gleiche Rolle spielen — man hätte sagen können, daß der Zahlenkomplex symmetrisch ist in Bezug auf jede Primzahl einer Zeile — so erhalten wir dasselbe Resultat, wenn wir die Zahl 2 durch 3 ersetzen würden, das heißt, daß die Zahlenkomplexe $\{2 \cdot 10\}$, $\{3 \cdot 15\}$ identische sind. Man kann weiter gehen und behaupten, daß der erste Komplex identisch bleibt, wenn wir seine bestimmenden Zahlen $\{15\}$ mit einer beliebigen Kombination der Primzahlen der ersten Zeile und noch durch eine gerade Anzahl der Primzahlen der zweiten Zeile multiplizieren, und daß der zweite Zahlenkomplex identisch bleibt, wenn wir dieselben bestimmenden Zahlen des ersteren durch eine beliebige Kombination der Primzahlen der ersten Zeile und zugleich noch mit einer ungeraden Anzahl der Primzahlen der zweiten Zeile multiplizieren.

Jetzt kehren wir uns der Betrachtung der Zahlenkomplexe $\{a\ 1\}$ zu, in welchen a keine Primzahl ist. Dabei müssen aber die quadratischen Zahlen ausgeschlossen werden, da dieselben in den Zahlenkomplex keine Änderung einführen; $\{a^2, 1\}$ ist offenbar mit $\{11\}$ identisch, was übrigens leicht direkt zu beweisen, wenn man die Gesamtheit der Zahlen $a^2 p_1^2 + p_2^2$ berücksichtigt. Auch der Komplex $\{a^2, b^2\}$ ist mit dem Komplex $\{11\}$ identisch gleich und zwar aus demselben Grunde.

Bei näherer Betrachtung eines Zahlenkomplexes sind also überhaupt quadratische Faktoren auszuschließen.

Nun gehen wir zur näheren Betrachtung der Komplexe $\{a\,b \cdot 1\}$ über, wo a und b Primzahlen sind.

Diese Primzahlen treten schon nicht mehr vereinzelt, sondern paarweise oder überhaupt in gerader Anzahl der Faktoren auf. Also muß in diesem Falle notwendigerweise ein koordinierter Zahlenkomplex vorhanden sein, welcher aus diesem durch Multiplikation mit $a, b \dots$ oder einer ungeraden Anzahl solcher Faktoren entsteht. Solche zwei Zahlenkomplexe, zusammengenommen, bilden einen vollständigen Zahlenkomplex mit bestimmter, ihm eigener Reihe der Primzahlen.

Als das einfachste Beispiel ziehen wir folgende Komplexe in Betracht.

Entwicklung des Komplexes {16}.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	1	7	10	6

(13)	(23)	(32)	(31)
55	58	33	15

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
95	154	159	105	70	79	1	22

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
151	298	393	303	310	409	319	166	1	199	214	145	103	118	73	31

Daraus entnehmen wir folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	6	7	10	15	22	31	33	55	58	73	79	97	103	105	118	145
	2·3		2·5	3·5	2·11		3·11	5·11	2·29					3·5·**7**	2·59	5·29

154	159	166	199	214	217	298	303	310	319...
2·**7**·11	3·53	2·83		2·107	**7·31**	2·149	3·101	2·5·**31**	

Der Anschaulichkeit wegen sind die hier explizit vorkommenden Primzahlen fett gedruckt. Man sieht. daß andere Primzahlen. welche explizit nicht auftreten. ausschließlich in gerader Kombination vertreten sind, während die ersteren in beliebiger Kombination vorkommen.

Wir können also die für diesen Komplex charakteristische Reihe der Primzahlen in zwei Teile sondern, und dadurch werden sämtliche Parameter dieses, wie des ihm koordinierten Zahlenkomplexes, eindeutig bestimmt.

Diese Zahlenreihen sind respektive:

1 7 31 73 79 97 103 ...

2 3 5 11 29 53 59 83 107 ...

Der einfachste Ausdruck des ihm koordinierten Zahlenkomplexes wird durch Multiplikation mit 2, als {23}, erhalten.

Es ist aber natürlich, daß

$\{23\} = \{32\} = \{5 \cdot 30\} = \{11 \cdot 176\}$ u. s. w., während

$\{16\} = \{7 \cdot 42\} = \{31 \cdot 186\}$ u. s. w. auch $= \{10 \cdot 60\} = \{15 \cdot 90\} \ldots$

Überhaupt ist jede Kombination dieser Primzahlen direkt auf den einen oder anderen Teilkomplex zu beziehen. Bezeichnen wir im Allgemeinen diese Zahlenreihen respektive

$$\begin{matrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ b & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \end{matrix}$$

so ist die Zahl $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_m \times b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots b_n$ der Parameter des ersteren, wenn n eine gerade und des letzteren, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Entwicklung des Komplexes $\{1 \cdot 10\}$.

(01)	(12)	(11)	(21)	(10)
1	41	11	14	10

(13)	(23)	(32)	(31)
91	94	1	19

(14)	(25)	(35)	(34)	(43)	(53)	(52)	(41)
161	254	259	1	106	115	65	26

(15)	(27)	(38)	(37)	(47)	(58)	(57)	(45)	(54)	(75)	(85)	(74)	(73)	(83)	(72)	(51)
251	494	649	499	506	665	575	266	185	299	314	209	139	154	89	35

Daraus entnehmen wir folgende Reihe der Parameterzahlen:

1	10	11	14	19	26	35	46	59	65	74	89	91	94	106	110	115	139
	2·5		2·7		2·13	5·7	2·23		5·13	2·37		7·13	2·47	2·53	2·5·**11**	5·23	

154	161	185	190	209	251	254	259	266	299 . . .
2·7·**11**	7·23	5·37	2·5·**19**	**11·19**		2·127		2·133	13·23

Also sind die charakteristischen Primzahlen in folgende zwei Zeilen zu verteilen:

1				11		19					59	. . .
	2	5	7		13		23	37	47	53		. . .

Solche Zahlen wie 2, 5, 7, 13, 22 = 2·11, 23, 37, 38 = 2·19, 47, 55 = 5·11 u. s. f. sind die Parameterzahlen des Komplexes $\{25\}$ und demselben gleicher Komplexe.

Aus dem Obigen ersehen wir, von wie hervorragender Bedeutung derjenige Zahlencomplex ist, in dessen Zusammensetzung der Parameter 1 hinzutritt. In demselben, ebenso wie in allen mit ihm koordinirten Komplexen sind die für denselben charakteristischen Primzahlen in beliebigen Kombinationen zu nehmen; für die übrigen Primzahlen ist dies nicht der Fall. Deswegen verdient ein solcher Komplex als Hauptkomplex bezeichnet zu werden.

Im Allgemeinen sind zwei solche Komplexe wie $\{1 \cdot ab\}$ und $\{ab\}$ koordinierte. Aber dies ist nicht stets der Fall, da die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, daß $a p_1^2 + b p_2^2$ durch ein einziges Quadrat ausgedrückt werden kann. Tritt ein solcher Fall ein, so sind die beiden Komplexe identisch, da es für die Identität hinreichend ist, daß ein einziger Parameter gemeinschaftlich auftritt.

Als der einfachste solche Fall ist der Komplex $\{2 \cdot 7\}$ resp. $\{1 : 14\}$ aufzuzeichnen, da $2 + 9 = 1 \cdot 3^2$ und folglich nicht nur in $\{1 \cdot 14\}$, sondern auch in $\{2 \cdot 7\}$ der Parameter 1 gemeinschaftlich auftritt.

Jedem solchen Komplexenpaar ist ein anderes zugeordnet, welches durch Permutation der ersten Zahlen entsteht.

Unter solchen sind auch die Komplexe $\{1 \cdot 7\}$ und $\{2 \cdot 14\}$ die gleichen, da $2 \cdot 5^2 + 14 = 1 . 8^2$.

Dasselbe gilt für die Komplexenpaare $\{2 \cdot 23\} = \{1 \cdot 46\}$ und $\{1 \cdot 23\} = \{2 \cdot 46\}$, da $2 \cdot 3^2 + 46 = 1 \cdot 8^2$.

Auch für die Komplexenpaare $\{2 \cdot 34\} = \{1 \cdot 68\} = \{1 \cdot 17\}$ und $\{1 \cdot 34\} = \{2 \cdot 68\} = \{2 \cdot 17\}$, da $2 \cdot 4^2 + 17 = 1 \cdot 7^2$.

Auch für die Komplexenpaare $\{2 \cdot 47\} = \{1 \cdot 94\}$ und $\{1 \cdot 47\} = \{2 \cdot 94\}$, da $2 \cdot 9^2 + 1 \cdot 94 = 1 \cdot 16^2$.

In diesen Fällen sind die beiden so einander zugeordneten Komplexenpaare die gleichen.

Für die Komplexe $\{2 \cdot 7\}$ und $\{1 \cdot 14\}$ sind die charakteristischen Primzahlen:

1	2			7			23			71			....
		3	5		13	19		59	61		83	101	....

Ein Komplex $\{1 \cdot abc\}$ kann auch in den Formen $\{a \cdot bc\}$, $\{b \cdot ca\}$, $\{c \cdot ab\}$ dargestellt werden. Man erhält diese drei Formen durch Multiplikation des Hauptkomplexes respektive mit a, b, c. Treten also diese Zahlen in demselben nicht auf, so erhalten wir vier verschiedene Zahlenkomplexe; demgemäß sind auch die charakteristischen Primzahlen in vier Zeilen zu gliedern; die Zahlen jeder Zeile treten einzeln nur in dem respektiven Zahlenkomplex auf. Sind aber alle Zeilen gegeben, so ist schon leicht für jeden besonderen Zahlenkomplex seine Parameter zusammenzusetzen.

Wollen wir diese Zahlen durch

1	o_1	o_2	o_3	$\dots$	abc
a	a_1	a_2	a_3	$\dots$	bc
b	b_1	b_2	b_3	$\dots$	ac
c	c_1	c_2	c_3	$\dots$	ab

bezeichnen, und nun sei eine Kombination

$$o_1\ o_3\ a\, a_1\ a_4\ b_2\ c_1\ c_3$$

gegeben und es wird gefragt, zu welchem Zahlenkomplex gehört dieser Parameter?

Zuerst unterdrücken wir alle o und die gerade Anzahl der Faktoren jeder Zeile, da solche Produkte die Zugehörigkeit des Parameters zu einem bestimmten Zahlenkomplex nicht ändern.

Wir erhalten auf diesem Wege etwa

$$a\, b_2,$$

also die Kombination der Faktoren, welche für die Zeile c charakteristisch sind, und nun ist die Aufgabe gelöst.

Man hätte auch rekursiv verfahren können, was zu demselben Resultate führt, aber ohne Nutzen komplizierter wird:

c_3 gehört der Zeile c, $c_1 c_3$ der Zeile 1, $b_2 c_1 c_3$ der Zeile b, $a_4 b_2 c_1 c_3$ der Zeile c, $a_1 a_4 b_2 c_1 c_3$ der Zeile b, $a\, a_1 a_4 b_2 c_1 c_3$ der Zeile c an, und die Faktoren o_1, o_3 ändern diese Zugehörigkeit nicht.

Wollen wir diese Verhältnisse an einem Beispiel, z. B. dem Komplex $\{1 \cdot 30\}$, demonstrieren.

Nach Ausführung der Entwicklung findet man die folgenden Zahlenzeilen:

1					31					79							30
2			17	23			47					113		137			15
3		13			37	43			67							157	10
5	11				29			59			101		131		149		6

Mit Hilfe dieser vier Zeilen nun können wir eine beliebige Anzahl von Parametern ermitteln und jeden auf einen bestimmten Zahlenkomplex beziehen. Wollen wir z. B. sämtliche Parameter aufsuchen, welche aus zwei Faktoren zusammengesetzt sind, deren Größen die Zahl 70 nicht übertreffen, so finden wir:

1	2·17	2·23	2·47	3·13	3·37	3·43	3·67	5·11	5·29	5·59	11·29	11·59	13·37	13·43	30
2	2·31	3·5	3·11	3·29	3·59	5·13	5·37	5·43	5·67	11·13	11·37	11·43	11·67	13·29	15
3	2·5	2·11	2·29	2·59	3·31	5·17	5·23	5·47	11·17	11·23	11·47	13·31	17·29	17·59	10
5	2·3	2·13	2·37	2·43	2·67	3·17	3·23	3·47	5·31	11·31	13·17	13·23	13·47	17·37	6

1	13·67	17·23	17·47	23·47	29·59	37·43	37·67	43·67			30
2	13·59	17·31	23·31	29·37	29·43	29·67	31·47	37·59	43·59	59·67	15
3	23·29	23·59	29·47	31·37	31·43	31·67	47·59				10
5	17·43	17·67	23·37	23·43	23·67	29·31	31·59	37·47	43·47	47·67	6

Wollen wir noch sämtliche Parameter aufsuchen, welche aus drei Faktoren zusammengesetzt sind, deren Größe die Zahl 35 nicht übertrifft, so finden wir:

1	2·3·5	2·3·11	2·3·29	2·5·13	2·11·13	2·13·29	2·17·31	2·23·31	3·5·17	3·5·23	3·11·17	30
2	2·3·13	2·5·11	2·5·29	2·11·29	2·17·23	3·5·31	3·11·31	3·13·17	3·13·23	3·29·31	5·11·17	15
3	2·3·17	2·3·23	2·5·31	2·11·31	2·13·17	2·13·23	2·29·31	3·5·11	3·5·29	3·11·29	3·17·23	10
5	2·3·31	2·5·17	2·5·23	2·11·17	2·11·23	2·13·31	2·17·29	2·23·29	3·5·13	3·11·13	3·13·29	6

1	3·11·23	3·13·31	3·17·29	3·23·29	5·11·31	5·13·17	5·13·23	5·29·31	11·13·17	11·13·23	30
2	5·11·23	5·13·31	5·17·29	5·23·29	11·13·31	11·17·29	11·23·29	13·29·31			15
3	5·11·13	5·13·29	5·17·31	5·23·31	11·13·29	11·17·31	11·23·31	13·17·23	17·29·31	23·29·31	10
5	3·17·31	3·23·31	5·11·29	5·17·23	11·17·23	13·17·31	13·23·31	17·23·29			6
1	11·29·31	13·17·29	13·23·29	17·23·31							30

Natürlich sind auch hier Fälle möglich, in welchen manche der vier Zahlenkomplexe $\{1 \cdot abc\}$, $\{a \cdot bc\}$, $\{b \cdot ca\}$, $\{c \cdot ab\}$ einige Parameter gemein haben, und dann haben sie sämtliche Parameter gemein, das heißt die Komplexe sind identisch.

Das ist zum Beispiel der Fall für die Zahlenkomplexe $\{1 \cdot 66\}$ und $\{3 \cdot 22\}$, da $22 + 3 = 1 \cdot 5^2$. In diesem Fall sind auch $\{2 \cdot 33\}$ und $\{6 \cdot 11\}$ identisch.

Dieser Komplex hat folgende charakteristische Zeilen der Primzahlen:

1 resp. 3	1		3									67		97		66 resp. 22
2 resp. 6		2				11		17		41			83		107	33 resp. 11
5·1				5					23							5·66
7·1					7		13				61					7·66

Nach obigem ist es leicht daraus für jeden dieser Zahlenkomplexe eine unbegrenzte Anzahl von Parametern herzuleiten.

Der Komplex $\{1 \cdot abcd\}$ gliedert sich in acht Zahlenkomplexe:

1) $\{1 \cdot abcd\}$, 2) $\{a \cdot bcd\}$, 3) $\{b \cdot cda\}$, 4) $\{c \cdot dab\}$, 5) $\{d \cdot abc\}$, 6) $\{ab \cdot cd\}$, 7) $\{ac \cdot da\}$, 8) $\{ad \cdot bc\}$.

Und überhaupt der Komplex $\{1 \cdot ab \ldots c\}$, wo n Faktoren in der zweiten bestimmenden Zahl enthalten sind, gliedert sich in 2^{n-1} Zahlenkomplexe, da diese Zahl durch den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{1}+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{n\,(n-1)\,.\,.\,2}{1\cdot 2\cdot 3\,.\,.\,(n-1)}\right)$$

bestimmt wird.

Man ersieht daraus, daß die Aufgabe der Aufsuchung der Parameter jedes gegebenen Komplexes sich auf die der Aufsuchung der charakteristischen Zeilen der Reihen der Primzahlen reduziert.

Man kann natürlich diese Aufgabe durch reguläre Entwicklung des Komplexes auflösen, aber dabei werden unterwegs auch und zwar in überwiegender Mehrzahl die Parameter selbst zur Rechnung gelangen, und dieser Umstand erfordert viele unnütze Mühe. Viel einfacher ist, sich darauf zu beschränken, zwei Reihen der für den Komplex charakteristischen Quadrate zu schreiben und dann die Reihe der Primzahlen zu prüfen, ob dieselbe aus diesen Quadraten znsammengesetzt werden kann.

Zur Demonstration des Verfahrens wollen wir uns mit einigen einfachen Beispielen begnügen.

Für die Aufsuchung der charakteristischen Primzahlen des Komplexes $\{1\}$ schreiben wir die natürlichen Reihen der Quadrate, also:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 324 361 400 . . .
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 324 361 400 . . .

Die angedeutete Prüfung ergibt:

$1 = 1\cdot 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $5 = 4 + 1$, $13 = 9 + 4$, $17 = 16 + 1$, $29 = 25 + 4$, $37 = 36 + 1$, $41 = 25 + 16$, $53 = 49 + 4$, $61 = 36 + 25$, $73 = 64 + 9$, $89 = 64 + 25$, $97 = 81 + 16$, $101 = 100 + 1$, $109 = 100 + 9$, $113 = 64 + 49$, $129 = 121 + 8$, $137 = 121 + 16$, $149 + 100 + 49$, $157 = 121 + 36$, $173 = 169 + 4$, $181 = 100 + 81$, $193 = 144 + 49$, $197 = 196 + 1$, $221 = 196 + 25$, $229 = 225 + 4$, $233 = 169 + 64$, $241 = 225 + 16$, $257 = 256 + 1$, $269 = 169 + 100$, $277 = 196 + 81$, $281 = 256 + 25$, $293 = 289 + 4$, $313 = 169 + 144$, $317 = 196 + 121$, $337 = 256 + 81$, $401 = 400 + 1 \ldots$

Dasselbe Verfahren für den Komplex $\{1\cdot 3\}$ ergibt:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289 334 361 400 . . .
3 12 27 48 75 108 147 192 243 300 363 432 507 588 . . . .

Nun haben wir:

$1 = 1 + 0\cdot 3$, $3 = 1\cdot 0 + 3$, $7 = 4 + 3$, $13 = 1 + 12$, $19 = 16 + 3$, $31 = 4 + 27$, $37 = 25 + 12$, $43 = 16 + 27$, $61 = 49 + 12$, $67 = 64 + 3$, $73 = 25 + 48$, $79 = 4 + 75$, $97 = 49 + 48$, $103 = 100 + 3$, $109 = 1 + 108$, $127 = 100 + 27$, $133 = 25 + 108$, $139 = 64 + 75$, $151 = 4 + 147$, $157 = 49 + 108$, $163 = 16 + 147$, $181 = 169 + 12$, $193 = 1 + 192$, $199 = 196 + 3$, $211 = 64 + 147$, $223 = 96 + 27$, $229 = 121 + 108$, $241 = 49 + 192$, $247 = 4 + 243$, $259 = 16 + 243$, $271 = 196 + 75$, $277 = 169 + 108$, $283 = 256 + 27$, $301 = 1 + 300$, $307 = 64 + 243$, $313 = 121 + 192$, $331 = 256 + 75$, $337 = 289 + 48$, $349 = 49 + 300$, $367 = 4 + 363$, $373 = 361 + 12$, $379 = 16 + 363$.

$397 = 289 + 108$, $403 = 400 + 3 \ldots$

Wenn die bestimmende Zahl des Komplexes mehrere einfache Faktoren besitzt, so wird das Verfahren natürlich etwas komplizierter, da die gefundenen einfachen Zahlen sich in verschiedene Zeilen gliedern lassen.

Ich glaube, daß das einfachste Verfahren dasselbe ist, welches weiter unten an dem Beispiele $\{1 \cdot 30\}$ demonstriert wird. Dabei werden der Prüfung nicht allein die Primzahlen selbst, sondern auch deren Produkte mit den einfachsten Parametern des Komplexes, je eine aus jeder Zeile, unterzogen. Gerade aus der Zusammensetzung der Faktoren ersehen wir, auf welche Zeile die gefundene Primzahl Bezug hat.

Für diesen Komplex schreiben wir also folgende Quadratenreihen:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 289
324 361 400 441 484 529 576 . . . .
30 120 270 480 750 1080 . . . .

Da die Zahl 30 aus den Faktoren 2, 3 und 5 besteht, so erhalten wir direkt die Anfangsglieder sämtlicher vier Zeilen und nun steht uns bevor, jede Primzahl sukzessive mit allen diesen Zahlen zu multiplizieren und der Prüfung zu unterziehen, ob die so gefundene Zahl eine Summe von zwei dieser quadratischen Zahlen ist.

Nun finden wir:

$5 \cdot 11 = 25 + 30,\ 3 \cdot 13 = 9 + 30,\ 2 \cdot 17 = 4 + 30,\ 2 \cdot 23 = 16 + 30,\ 5 \cdot 29 = 25 + 120,$
$31 = 1 + 30,\ 3 \cdot 37 = 81 + 30,\ 3 \cdot 43 = 9 + 120,\ 2 \cdot 47 = 64 + 30,\ 5 \cdot 59 = 25 + 270,$
$3 \cdot 67 = 81 + 120,\ 79 = 49 + 30,\ 5 \cdot 101 = 25 + 480,\ 2 \cdot 113 = 196 + 30,$
$5 \cdot 131 = 625 + 30,\ 2 \cdot 137 = 4 + 270 \ldots$

Daraus entnehmen wir direkt folgende Zeilen der Primzahlen:

1 31 79
2 17 23 47 113 137
3 13 37 43 67
5 11 29 59 101 131

Diese Zeilen sind mit den oben angegebenen identisch, aber auf viel einfachere Weise erhalten, als jene.

Unter allen isotropen Komplexen sind also zwei, und nur zwei, welche sich durch ihre Symmetrieeigenschaften auszeichnen und infolgedessen auf besondere Syngoniearten zu beziehen sind. Das sind $\{11\}$, dessen Syngonie als **tetragonale** und $\{13\}$, dessen Syngonie als **hexagonale** bezeichnet wird.

Zusammengenommen sind also vier Syngoniearten der ebenen Komplexe zu verzeichnen: monokline, rhombische, tetragonale und hexagonale.

Wir haben gesehen, daß sämtliche Vektoren eines Strahlenkomplexes durch Addition von zwei senkrechten Vektoren $p_1 \sqrt{a}$ und $p_2 \sqrt{b \cdot i}$ sich ableiten lassen, wo p_1 und p_2 die Gesamtheit aller ganzen Zahlen ist.

Analytischer Ausdruck dieser Gesamtheit ist die Gleichung

$$a p_1^2 + b p_2^2 = c q^2,$$

also eine lineare quadratische Form.

Nun ist offenbar, daß die erwähnte Vektorensumme ein ebenes Netz bedingt, dessen parallelogrammatischen Maschen Rechtecke sind, mit den Seiten $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ respektive auf den Strahl r und r'. Wie bekannt, drückt dasselbe auch die angegebene quadratische Form aus. Ein einziger Widerspruch entsteht bei Anwesenheit der sechszähligen Symmetrieachse, also für die Form $p_1^2 + 3 p_2^2 = c q^2$.

Der Vektor $1 + \sqrt{3} \cdot i$ hat den Modulus $\sqrt{1 + 3} = 2$; derselbe ist also mit dem Modulus von 1 nicht gleich, sondern doppelt so groß, trotzdem daß der Winkel zwischen beiden 60^0 groß ist. In diesem einzigen Falle, um den Widerspruch zu beseitigen und das Vorhandensein der sechszähligen Symmetrieachse wirklich geltend zu machen, muß man die betreffenden rechteckig-parallelepipedischen Maschen noch mit Zentralpunkten ergänzen, was aber zulässig, da dadurch keine Parametergröße in dem Strahlensystem einer Änderung unterliegt; aber dieses ergänzende Punktsystem ist von vornherein in der allgemeinen Gleichung nicht enthalten.

Es ist selbstverständlich, daß solche ergänzende Punktsysteme auch für sämtliche vollständige Vektorensysteme zulässig und im Allgemeinen die auf diese Weise erhaltenen Punktsysteme verschieden sind.

Jedem vollständigen Vektorensystem entsprechen also je zwei regelmäßige Punktsysteme einfachster Art resp. ebene Netze.

Somit sind wir also zur Theorie der ebenen Netze gekommen. Darin liegen also die Berührungspunkte der Syngonielehre mit dieser Theorie.

Daß sämtliche solche Punktsysteme wirklich die ebenen Netze sind, ist daraus ersichtlich, daß dabei ganz gleichgültig jeder Systempunkt für den Mittelpunkt des gleichen Strahlen- resp. Vektorensystems angenommen werden darf. Bei solcher Transformation ändern sich nur die ganzen Zahlen p_1 und p_2, und nun ist von vornherein vorausgesetzt, daß diese Zahlen sämtlich ganze Zahlen sind. Die erwähnte Transformation führt also noch zu keiner Änderung in dem Punktsystem.

Speziell aber für den Fall des Vektorensystems $\{11\}$ dürfen die beiden zugeordneten Punktsysteme als die gleichen angesehen werden: durch die Addition der Vektoren 1 und i erhält man zwar den Vektor $1 + i$ mit dem Modulus $\sqrt{2}$, also für den neu eingeführten Punkt den Modulus $\frac{\sqrt{2}}{2}$, aber jedes Vektorensystem kann als das gleiche betrachtet werden, wenn wir seine sämtliche Vektoren mit einer und derselben, rationalen oder irrationalen Zahl, multiplizieren. Und nun wird das neu gefundene System mit dem früheren identisch, wenn wir als einen solchen Faktor $\frac{2}{\sqrt{2}}$ annehmen.

Nun führt die Anwendung der Syngonielehre auf die Lehre über die ebenen Netze zu folgender neuen Definition und folgenden Sätzen:

Ein ebenes Netz, dessen parallelogrammatischen Maschen Rechtecke sind mit den Seiten $\sqrt{a}$ resp. $\sqrt{b}$ (wo $a\, b$ ganze Zahlen sind) wird das isotrope genannt.

Es gibt unendlich viele isotrope ebene Netze.

Wenn wir in einem isotropen ebenen Netze die Seiten der Maschen, welche die Vektoren $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b} \cdot i$ sind, durch zwei beliebige senkrechte Vektoren $p_1 \sqrt{a} + p_2 \sqrt{b} \cdot i$ und $a\, p_1 \sqrt{b} + b\, p_2 \sqrt{a} \cdot i$ ersetzen und diese wieder als Maschenseiten annehmen, so erhalten wir das dem früheren gleiche ebene Netz.

Also enthält jedes isotrope ebene Netz unendlich viele nicht parallele gleiche ebene Netze in sich.

Nun denken wir uns, daß um jeden Punkt eines isotropen ebenen Netzes gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit ein Kreis wächst, dessen Mittelpunkt dieser Punkt ist.

bis endlich unendlich viele Kreise zugleich zur Berührung kommen, aber in dem frei gebliebenen Raume mit derselben Geschwindigkeit fortwachsen; zuletzt entsteht in der unbegrenzt gedachten Ebene ein System gleicher und paralleler Polygone, welche Parallelogone genannt wurden, da in denselben notwendigerweise die Seiten in die gleichen und parallel zugeordneten Seiten sich teilen lassen.

Daß diese Figuren wirklich Polygone und dabei Paarseitner[1]) sind, ergibt sich daraus, daß unter gemachter Voraussetzung ihre Grenzseiten zu den ein Paar nächster Punkte verbindenden Geraden die senkrechten Geraden sind, welche durch die Mittelpunkte der betreffenden Strecken hindurchgehen. Daß die Figuren Parallelogone sind, folgt daraus, daß durch dieselben die Ebene in parallele gleiche Teile regulär geteilt wird. Zugleich sind diese Parallelogone konvexe Polygone.

In der Lehre von der regulären Planteilung wird der Beweis erbracht, daß solche Parallelogone von Tri- resp. Diparallelogonen möglich sind.

Es sei noch erwähnt, daß hier von den primitiven und einfachen Parallelogonen die Rede ist.[2])

Nun ist von vornherein klar, daß jedem isotropen ebenen Netz erster Art (d. h. ohne Hinzufügen des intermediären Punktsystems) die Parallelogone zukommen, welche mit den rechteckigen Maschen des Netzes selbst identisch sind.

Weiter ist leicht der Beweis zu erbringen, daß jedem isotropen ebenen Netz zweiter Art bestimmte Triparallelogone zukommen.

In jedem solchen Punktsystem sind, außer den durch die allgemeine Formel bedingten Punkten a, b, c, d (Fig. 7), noch die intermediären Punkte o vorhanden. Verbinden

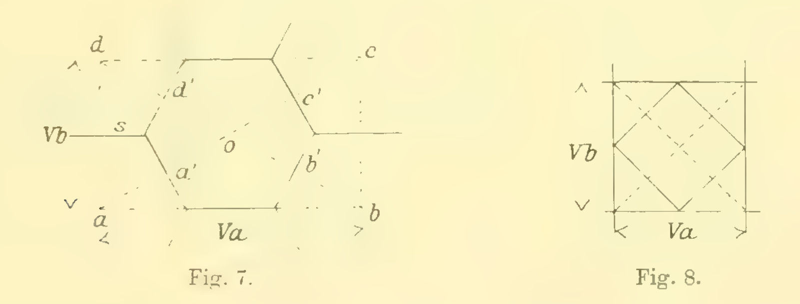


Fig. 7. Fig. 8.

wir einen solchen Punkt mit den ihm nächstliegenden Punkten a, b, c, d und ziehen zu den Mittelpunkten a', b', c', d' der so entstandenen Strecken die Perpendikel, so bedingen dieselben das Perimeter des betreffenden Triparallelogons, wie dies aus der Figur unmittelbar ersichtlich ist. Dieses Parallelogon wird dann in ein Diparallelogon verwandelt, wenn eine Seite etwa sich bis zum Verschwinden verkürzt. In diesem Fall, wie aus der Figur 8 ersichtlich, verwandelt sich die rechteckige Masche in die quadratische, und dann entsteht

[1]) Unter Paarseitner wurde noch in den Elementen der Gestaltenlehre des Verfassers ein Polygon verstanden, dessen Seiten paarweise gleich und parallel sind.

[2]) Das Parallelogon heißt primitiv, wenn es das Inversionszentrum besitzt. Das primitive Parallelogon ist einfach, wenn in demselben nur je ein Paar paralleler Seiten vorhanden sind. Ein konvexes Parallelogon ist stets primitiv und einfach.

das Punktsystem zweiter Art von dem Parametersystem {11}, welches, wie eben bewiesen, gleich ist dem betreffenden Punktsystem erster Art.

Nun wurde in der Lehre von der regulären Planteilung der Beweis erbracht, daß den besonderen symmetrischen Komplexen {11} und {13} besondere symmetrische Parallelogone zugeordnet sind, und zwar dem {11} das Quadrat und dem Punktsystem zweiter Art von {13} das reguläre Sechseck. Die anderen Vektorensystemen zukommenden Parallelogone sind anomale, das heißt solche, welche durch kein System von Verschiebungen in das Quadrat resp. in ein reguläres Sechseck verwandelt werden können. In der Tat, jedem solchen Parallelogon können zwei konzentrische Kreise eingeschrieben werden, deren Durchmesser den Höhenlinien der betreffenden Parallelogone entspricht. Dies ist in der Figur 9 für Di- und in der Figur 10 für Triparallelogone angezeigt.

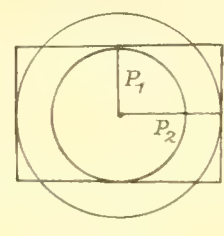


Fig. 9.

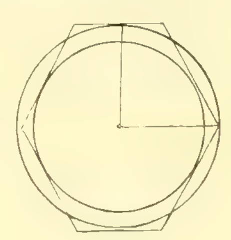


Fig. 10.

Auch in diese Lehre führt die Syngonielehre neue Definitionen und Sätze ein und zwar:

Unter isotropen Parallelogonen werden solche verstanden, deren Höhenlinien (resp. die die Berührungspunkte der Parallelogone mit Kreisen verbindenden Durchmesser) die Vektoren eines isotropen Komplexes sind.

Es gibt unendlich viele isotrope Parallelogone. Darunter zeichnen sich zwei besondere — das Quadrat und das reguläre Sechseck — aus und die übrigen sind die anomalen. Überhaupt ist jedem isotropen Vektorenkomplex ein Di- und ein Triparallelogon zugeordnet.

Zwei besondere Parallelogone zeichnen sich dadurch aus, daß darin nur ein einziger Kreis eingeschrieben ist, in den übrigen aber zwei Kreise.

Andererseits können in den letzteren zwei eingeschriebene Kreise durch eine einzige Ellipse ersetzt werden. Im Grunde genommen sind solche Systeme von den nicht isotropen nicht verschieden, welche ihren Ausdruck in diesen Ellipsen findet, und davon soll jetzt die Rede sein.

Sämtliche Komplexe überhaupt sind miteinander durch eindeutige kristallographische Projektivität verbunden: eindeutige, weil jeder Strahl durch die Indizes $(p_1\, p_2)$ ausgedrückt werden kann und dies ist für sämtliche Komplexe der Fall; also jede zwei Strahlen von irgendwelchen zwei verschiedenen Komplexen, welche durch dieselben Indizes $(p_1\, p_2)$ ausgedrückt werden, sind untereinander eindeutig projektiv verbunden. Daß die Projektivität die kristallographische ist, erhellt daraus, daß auch nach der Deformation das Netz in ein anderes Netz verwandelt wird, das heißt gleiche und parallele gerade Strecken bleiben auch nach der Deformation gleich und parallel, und das ist gerade die Charakteristik der kristallographischen Projektivität (Affinität Mobius').

Nun läßt sich im allgemeinsten Falle diese Projektivität durch die Gleichungen

$$x_1' = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2$$
$$x_2' = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2$$

ausdrücken.[1])

Demgemäß erhält die Gleichung des Kreises

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2$$

nach der Deformation die Form:

$$x_1'^2 (a_{22}^2 + a_{21}^2) - 2\, x_1'\, x_2' (a_{11}\, a_{21} + a_{12}\, a_{22}) + x_2'^2 (a_{12}^2 + a_{11}^2) = r^2 \Delta^2 \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right).$$

Diese Kurve II. Ordnung ist die Ellipse, da für dieselbe die Bedingung $4\, AC - B^2 > 0$ Geltung hat, weil:

$$4\, (a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2) - 4\, (a_{11}\, a_{21} + a_{12}\, a_{22})^2 = 4\, (a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})^2 = 4\, \Delta^2 > 0\,.$$

Im besonderen, wenn $\Delta = 1$, ist die Deformation eine Gesamtheit von Verschiebungen, da dabei die Flächengröße der parallelogrammatischen Maschen unverändert bleibt.

Diese Ellipse wird Projektivitätskurve genannt, da dieselbe bildlich den Effekt der Deformation darstellt.

Infolge eines bekannten Satzes kann das Quadrat durch homogene Deformation in ein beliebiges Parallelogramm verwandelt werden. Andererseits läßt sich in einem beliebigen Parallelogramm $a\, b\, c\, d$ eine bestimmte Ellipse einschreiben, deren zwei koordinierte Diameter $e\, g$ und $f\, h$ (Fig. 11) den Seiten des gegebenen Parallelogramm respektive parallel sind.

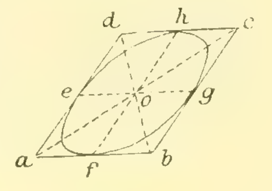


Fig. 11.

Daraus ist zu schließen, daß die Besonderheiten der isotropen Komplexe nach der Deformation verloren gehen, und man kann sämtliche deformierte Komplexe aus einem einzigen, zum Beispiel von {11} entstanden, annehmen.

Natürlich ändert sich das Quadrat je nach der Art der Deformation. Wird es dabei in ein Rechteck verwandelt, so verbleiben zwei senkrechte Symmetrieebenen, und der Komplex wird rhombisch; sonst erhält er die Zugehörigkeit zur monoklinen Syngonie.

Aber stets wird für seine Bestimmung eine einzige parallelogrammatische Masche hinreichend, da dieselbe uns außer den Strahlen $o\, f$ und $o\, g$ noch zwei Strahlen $o\, a$ und $o\, b$ offenbart; zur vollständigen Bestimmung des Komplexes sind aber schon drei Strahlen hinreichend.

Für die isotropen Komplexe gilt als Ausdruck der komplexialen Symmetrieverhältnisse der Kreis als eine partikuläre Form der Ellipse. In demselben sind alle zwei senkrechte Durchmesser die konjugierten, und wenn einer derselben Komplexstrahl ist, so gilt dasselbe auch für den senkrechten Strahl.

Da aber die homogene Deformation von solchen Eigenschaften, wie die Zuordnung der konjugierten Strahlen, unberührt bleibt, so kann man für die beliebige Ellipse als Projektivitätskurve sagen, daß, wenn einer ihrer Durchmesser der Komplexstrahl ist, das-

[1]) Die betreffenden Fragen wurden in der III. analytisch-kristallographischen Studie speziell behandelt.

selbe auch für den konjugierten Durchmesser gilt. Ist also eine der Hauptachsen der Ellipse der Komplexstrahl, so ist dasselbe auch für die andere der Fall. Das bezeichnet den Fall eines rhombischen Komplexes; im monoklinen Komplex ist dies für keine der Hauptachsen der Fall, das heißt: die beiden Hauptachsen sind irrational.

Dadurch erhalten die Syngonieeigenschaften in Ellipsen als Projektivitätskurven ihren genauen Ausdruck.

In der Projektivitätsellipse findet seinen Ausdruck das Gesetz der Verteilung der rationalen Vektoren samt ihren Strecken.

Wenn auch die Frage über den isotropen Komplex, aus welchem jeder gegebene abgeleitet gedacht werden muß, die unbestimmte Lösung erhält — da diese Lösung schon außerhalb der Grenzen der Syngonielehre enthalten ist —, so ist doch die aus irgendwelchem Grunde gefaßte Lösung in der Form einer oder zweier Ellipsen, welche in Di- resp. Triparallelogonen eingeschrieben sind, zugleich die Lösung der Frage über denjenigen isotropen Komplex resp. das isotrope ebene Netz, aus welchen die gegebenen entstanden gedacht werden müssen.

Und nun ist jeder Vektor durch dieselben Indizes $(p_1 p_2)$ bestimmt, welche in dem isotropen Komplex eindeutig auch seinen Parameter bestimmten. Jetzt aber erhält jeder Strahl nicht diejenige Strecke, welche ihm durch den Parameter zugeschrieben wird, sondern er kommt verändert vor, und gerade das Gesetz dieser Veränderung ist das Ellipsengesetz. Für jede gegebene rationale Richtung eines ebenen Netzes, die Richtung mit bestimmten ihr zukommenden Indizes, kann man jetzt mittelst dieser Indizes und des Ellipsengesetzes die betreffende Streckengröße auffinden; diejenigen, welche gleiche Parameter besaßen, erhalten jetzt ungleiche, aber leicht zu bestimmende Streckengrößen bis auf den quadratischen Faktor, welcher dabei ebenso ausfällt, wie dies für die isotropen Komplexe der Fall ist. Auch die gleichen Winkel zwischen den Strahlen von gleichem Parameter werden durch eine Reihe ungleicher, einem bestimmten Gesetz folgenden Winkel ersetzt.[1])

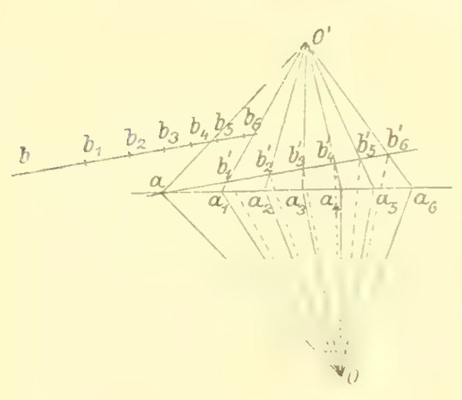


Fig. 12.

Das Ellipsengesetz ist also das Grundgesetz der Syngonielehre in der Ebene.

Wenn aber die Ellipse unbekannt bleibt und nur drei Strahlen gegeben sind, was eigentlich für die Bestimmung des Strahlenkomplexes hinreichend ist, so ist es doch möglich die Syngonieart des betreffenden Komplexes aufzufinden.

[1]) Dieses Gesetz ist leicht zu formulieren. Es seien Oa, Oa_1, Oa_2 ... (Fig. 12) die unter gleichen Winkeln stehenden Strahlen eines isotropen Komplexes; es sei die Punktreihe a, a_1, a_2 ... durch die erfolgte Deformation (welche den Kreis in die gegebene Ellipse verwandelt) durch die Punktreihe b, b_1, b_2 .. ersetzt. Nun ist nötig die beiden Punktreihen, als die projektiven, in perspektive Lage zu setzen, also z. B. den Punkt b mit dem ihm zugeordneten Punkt a in Koinzidenz zu bringen und dabei die Reihe b in die parallele Lage der Reihe b' zu führen. Dann genügt es, irgend zwei Paare zugeordneter Punkte, z. B. a_1 und b_1', a_2 und b_2' durch Gerade zu verbinden, welche sich in dem Punkte O' schneiden. Durch das Projizieren aus diesem Punkte erhält man die der Punktreihe a_1, a_2, a_3 .. zugeordnete Punktreihe $b_1' b_2' b_3'$... und es ist der Strahlenbüschel Oa, Ob_1', Ob_2', Ob_3' ... der gesuchte.

Zuerst finden wir die Größen der Tangentenquadrate beider Winkel, und falls dieselben in einem und demselben rationalen Parameter sich auflösen lassen, so kann man nicht nur behaupten, daß der Komplex der isotrope ist, sondern zugleich durch seine Konstante — Parameter — charakterisiert wird. Aber nur in den Fällen der Gleichheit dieser Parameter mit den Zahlen 1 resp. 3 haben wir das Recht von bestimmten Syngoniearten zu sprechen und zwar der tetragonalen resp. der hexagonalen. Sonst bleibt die Antwort unbestimmt (wie wir im folgenden Teile erkennen, erscheinen solche Komplexe nur als die Ebenen der rationalen Schnitte eines isotropen räumlichen Komplexes).

Ist dies nicht der Fall, so bleibt nur eine Entwicklung des Komplexes auszuführen und das Vorhandensein zweier zueinander senkrechter Strahlen zu prüfen. Führt diese Prüfung zu positivem Resultat, so können wir behaupten, daß der Komplex der rhombische ist. In dem Falle des negativen Resultates können wir sagen, daß die Prüfung in den Grenzen der ausgeführten Entwicklung (zum Beispiel in n bestimmten Perioden) als Resultat zu einem monoklinen Komplex geführt hätte.

Wie gesagt, dient die für jeden Komplex charakteristische Kurve, Projektivitätsellipse als Indexkurve aller wesentlichen Eigenschaften des Komplexes, unter anderem auch seiner (das heißt komplexialer) Symmetrie. Zugleich aber entsteht sie aus der homogenen Deformation des Kreises, als Indexkurve eines isotropen Komplexes. Bei dieser Deformation gehen aber Symmetrieelemente verloren (außer dem Inversionszentrum und der zur Komplexebene senkrechten Gerade, welche stets zweizählige Symmetrieachse bleibt). Als Ausnahmefall verbleiben zwei senkrechte Symmetrieebenen, und dann haben wir einen speziellen Fall des rhombischen Komplexes. Wir wollen jetzt von diesem speziellen Ausnahmefall absehen und die Frage aufstellen, was verbleibt von den Symmetrieelementen in dem allgemeinen Fall?

Wenn vor der Deformation AB Symmetrieebene ist, so soll jedem Punkt a ein Punkt a' zugeordnet werden, welcher sich auf derselben zu AB senkrechten Gerade aBa' befindet, und dabei $aB = a'B$ ist. Bezeichnen wir den zur AB senkrechten Strahl durch r, so bildet die Gesamtheit der Strahlen $(r\ r'\ r''\ r''')$ ein sogenanntes harmonisches Strahlenbündel, da

Fig. 13.

$$\frac{\sin r\ r''}{\sin r'\ r''} : \frac{\sin r\ r'''}{\sin r'\ r'''} = -1,$$

was man noch einfacher durch die symbolische Gleichheit $(r r' r'' r''') = -1$ bezeichnet.

Nach der erfolgten Deformation bleibt aber diese Gleichheit bestehen. Wenn also die Symmetrieebene verschwindet, so behält doch diese wesentliche Bedingung ihre Gültigkeit; harmonische Eigenschaften sind also diejenigen, welche für sämtliche Komplexe charakteristisch sind und nur für spezielle (z. B. rhombische und ganz besonders für die isotropen) Komplexe zu Symmetrieeigenschaften werden. Es besteht also zwischen komplexialer Symmetrie und Harmonie eine nahe Verwandtschaft. Demzufolge lassen sich auch Harmonieelemente — und dies haben gerade Herr Goldschmidt und besonders Herr Viola[1]) getan — bestimmen, also solche Symmetrieelemente

[1]) In seinen „Grundzügen der Kristallographie“, Leipzig 1904.

des Komplexes, welche durch die betreffende homogene Deformation verloren gegangen sind. Außer Harmonieebenen können wir also Harmonieachsen unterscheiden, aber keineswegs spezielle Elemente der zusammengesetzten Harmonie, da solche spezielle Symmetrieelemente von vornherein den Komplexen eigen sind, wenn die respektiven Symmetrieachsen vorhanden sind (vierzählige Achse der zusammengesetzten Symmetrie, wenn vierzählige Symmetrieachse, und sechszählige Achsen der zusammengesetzten Symmetrie, wenn sechszählige Symmetrieachse vorhanden ist).

Diese verwandtschaftlichen Beziehungen existieren aber ausschließlich zwischen den Harmonieelementen und den Elementen der komplexialen Symmetrie, keineswegs aber den Elementen der realen (resp. wirklichen) Symmetrieelementen. Wenn wir unter Symmetrieelementen eines Komplexes die komplexialen und realen unterscheiden können, so ist dies nicht der Fall für die Harmonieelemente, welche ausschließlich komplexial sind.

Und gerade nun die Symmetrieelemente sind die individuellen, ganz bestimmten geometrischen Gebilde, während komplexiale Symmetrieelemente in unendlicher Anzahl vorhanden sind, z. B. sämtliche Strahlen eines isotropen Komplexes sind die Tracen der komplexialen Symmetrieebenen, also auch sämtliche Strahlen eines beliebigen Komplexes sind die Harmonieebenen; allen kommt die gleiche Rolle in einem Komplex zu, welchem spezielle reelle Symmetrieelemente fehlen. Das Vorhandensein eines realen Symmetrieelementes ist also eine wichtige und ganz bestimmte Konstante dieses Komplexes, was für die Harmonieelemente nicht der Fall ist.

Da alle Harmonieeigenschaften durch obige Gleichheit einen vollständigen Ausdruck erhalten, wenn man — 1 durch sämtliche rationale Zahlen ersetzt, und dieser Ausdruck nichts anderes ist als die Bedingung der Rationalität des Komplexes, welche schon seit Gauss und Miller festgestellt und ausführlich studiert wurde, so kann man sagen, daß Harmonie nur ein neues Fachwort ist und keinen neuen Inhalt mit sich bringt.

Wenn also Rationalität der Komplexe dasselbe Ding ist, wie deren Harmonie, so würden auch die Bezeichnungen rationale Komplexe und harmonische Komplexe als identische zu betrachten sein, und also auch die Lehre von den rationalen Komplexen, d. h. die Syngonielehre, zugleich die Lehre über harmonische Strahlenbündel sein, wo aber darunter nicht nur vier bestimmte, sondern unendlich viele Strahlen verstanden werden, gemäß der Definition der Harmonie.

Aus den verwandtschaftlichen Beziehungen zwischen Elementen der komplexialen Symmetrie- und Harmonieelementen können wir schließen, daß außer den in jedem Komplexe vorhandenen realen Symmetrieelementen nur Harmonieebene, sowie vier- und sechszählige Harmonieachsen möglich sind (nicht aber acht-, zehn . . . zählige).

Diese verwandtschaftlichen Beziehungen sind aber einseitig. Ein komplexiales Symmetrieelement verwandelt sich nach der Deformation in ein zugeordnetes Harmonieelement und nicht umgekehrt. Das ersieht man daraus, daß nur bestimmte Komplexe vier- und sechszählige Symmetrieachsen, ebenso wie Symmetrieebenen besitzen können; es gibt sogar unendlich viele isotrope Komplexe, in welchen die erwähnten Symmetrieelemente fehlen. Für Harmonieelemente ist dies nicht der Fall. In dieser Hinsicht sind sämtliche Komplexe gleich. Wir können z. B. aus dem Komplexe beliebig drei Strahlen herauswählen und da dieselben die Tracen der Harmonieebenen sind, so ist die Schnittgerade dieser Ebenen (Zonenachse) die sechszählige Harmonieachse. Jeder harmonische vierstrahlige Büschel,

welcher aus dem Komplexe in unzähliger Anzahl herausgenommen werden kann (dabei drei Strahlen beliebig herausgenommen), kann als Beweis dienen, daß der Komplex zugleich eine vierzählige Harmonieachse besitzt.

In Anbetracht dessen, daß die Einführung der neuen Fachwörter „Harmonie", „Harmonieelemente" u. dgl. keinen neuen Inhalt mitbringt, infolge der eben erwähnten Einseitigkeit, welche Veranlassung zu einer Verlegenheit gibt, glaube ich nicht, daß sie den alten Fachwörtern „rationale Doppelverhältnisse", „rationale Komplexe" vorzuziehen ist. Dabei spielen auch „harmonische Doppelverhältnisse" eine wichtige Rolle und waren stets im Gebrauch, ebenso wie anharmonische resp. Doppelverhältnisse schlechtweg.[1]) In der Tat, wenn in komplexialer Hinsicht sämtlichen Strahlen eine ganz gleiche harmonische Rolle zukommt, wenn man also die Eigenschaften der rationalen Komplexe überhaupt kennt, wozu dann dieselben Strahlen noch als die Tracen der Harmonieebenen bezeichnen? Darin liegt keine neue Entdeckung. Dies würde der Fall sein, wenn nur einige individuelle Strahlen solche Eigenschaften besitzen würden, welche den übrigen fehlen, wie dies für die Symmetrieeigenschaften der Fall ist, oder wenn dabei solche Eigenschaften entdeckt würden und nur durch diese Bezeichnungen ausgedrückt werden könnten, welche bisher unbekannt waren. Dies ist aber nicht der Fall und es bleiben nur leere Wörter übrig.

II. Teil.

Syngonielehre im Raume.

Nachdem die Eigenschaften des ebenen rationalen Komplexes untersucht wurden, entsteht am allerersten die Frage, was unter dem rationalen Komplex im Raume zu verstehen ist.

In Anbetracht dessen, daß die Fragen der Geometrie zweier Dimensionen nur partikuläre Fälle derjenigen im Raume sind, kann man die Forderung aufstellen, daß jeder ebene Schnitt des rationalen Raumkomplexes ein rationaler ebener Komplex sein muß. Um aber eine solche Definition zulässig zu machen, muß der Beweis erbracht werden, daß solche Komplexe wirklich existieren.

Nun ist es leicht den Beweis zu erbringen, daß wirklich ein solcher Komplex entsteht aus vier beliebig im Raume gedachten Strahlen (von welchen keine drei komplanar sind) mit der Anwendung der bekannten Regeln der Zonenentwicklung, welche durch das Zonengesetz bedingt worden sind.

Zuerst beweisen wir den Satz, nach welchem zwei in perspektivischer Lage sich befindende ebene Komplexe beide rational sind, wenn einer davon rational ist.

[1]) Z. B. „Die Determinanten und anharmonischen Verhältnisse in dem Gebiete der Kristallographie" wurden zum alleinigen Objekt der II. analytischen kristallographischen Studie des Verfassers, und dort wurde die hierzu gehörige Literatur erwähnt und benutzt. Sogar sämtliche vier erwähnte Studien sind auf der projektiven Geometrie fußend, und gerade für diese stellt der Begriff des „anharmonischen" Verhältnisses den Grundbegriff dar.

Es sei ein ebener rationaler Komplex mit den Winkeln a, b, c . . gegeben (Fig. 14); es sei ein anderer ebener Komplex mit den zugeordneten Winkeln a', b', c' . . in perspektivischer Lage mit demselben befindliche gegeben, indem die beiden den zugeordneten Strahl A gemein haben, und sämtliche andere zugeordnete Strahlen, durch große Kreise vereinigt, den Hauptstrahl C der Perspektive bedingen.

Nun haben wir:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin f}{\sin \varphi}; \quad \frac{\sin (a+b)}{\sin (\alpha+\beta)} = \frac{\sin g}{\sin \varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin a}{\sin (a+b)} = \frac{\sin f \sin \alpha}{\sin g \sin (\alpha+\beta)}.$$

Auch:

$$\frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin g}{\sin \psi}; \quad \frac{\sin (b+c)}{\sin (\beta+\gamma)} = \frac{\sin f}{\sin \psi} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin c}{\sin (b+c)} = \frac{\sin g \sin \gamma}{\sin f \sin (\beta+\gamma)}.$$

Also

$$\frac{\sin a}{\sin (a+b)} : \frac{\sin (b+c)}{\sin c} = k = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha+\beta)} : \frac{\sin (\beta+\gamma)}{\sin \gamma}, \tag{1}$$

wo k eine beliebige rationale Zahl ist, gemäß der Voraussetzung.

Da der zweite Teil von der Lage der in perspektivischer Lage befindlichen Komplexe a . ., a' . . unabhängig ist, so besteht ebenfalls die Relation:

$$\frac{\sin a'}{\sin (a'+b')} : \frac{\sin (b'+c')}{\sin c'} = k, \tag{1a}$$

was zu beweisen war.

Aus diesen Formeln folgt zugleich, daß nicht nur die ebenen Strahlenkomplexe selbst (mit den Winkeln a . . a' . .), sondern auch die Zonenkomplexe der Strahlenebenen rational sind.

Wenn wir in dem geführten Beweise die Strahlen durch die Normalen zu Ebenenbüschel ersetzen, so erhalten wir dasselbe Resultat der Rationalität der Normalenkomplexe ebenso wie der Ebenenbüschel selbst.

Daraus folgt, daß, wenn wir für die integrierenden Teile des Raumkomplexes alle Strahlen halten würden, welche die Schnittgeraden zweier rationalen projizierenden Ebenenbüschel sind, der Raumkomplex selbst rational wird.

Es seien zwei rationale Ebenenbüschel A (mit den Winkeln α . .) und A' (mit den Winkeln α' . .) als Bestimmungsbüschel des Raumkomplexes ausgewählt (Fig. 15); dann bestimmen zwei zugeordnete Ebenenpaare dieser Büschel zwei Schnittstrahlen und zugleich

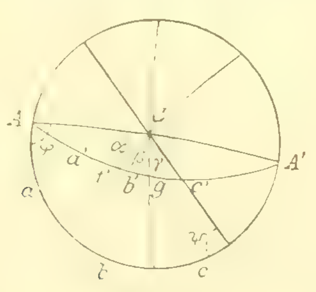


Fig. 14.

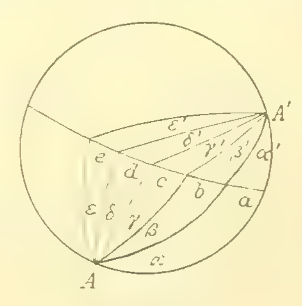


Fig. 15.

eine Strahlenebene (mit den Winkeln a . .), welche sich in perspektivischer Lage befindet in Bezug auf den Büschel A ebenso wie auf den Büschel A'. Folglich ist diese Strahlenebene die Ebene eines rationalen Strahlenkomplexes.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man A und A' als die Normalen zweier Ebenen und die projizierenden Ebenen als diejenigen annimmt, welche zu den Strahlen eines ebenen Komplexes senkrecht sind. Dann ist die Ebene mit den Winkeln a . . . eine zu einem gewissen Strahle senkrechte Ebene und die Winkel a . . . beziehen sich auf die Ebenenwinkeln eines rationalen Ebenenbüschels.

Auf Grund dieser aus der projektiven Geometrie bekannten Relationen ist es schon leicht, den allgemeinen analytischen Ausdruck für rationale Raumkomplexe aufzufinden.

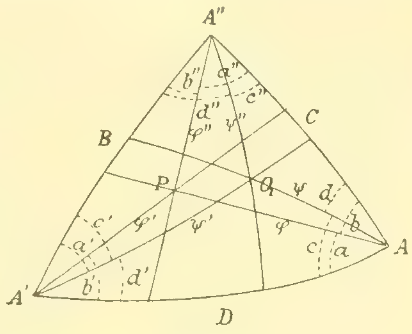


Fig. 16.

In Anbetracht der Bezeichnungen, welche in der Figur 16 angegeben sind, mit Hinzunahme noch folgender: die Winkel $A'PA''$, $A''PA$, APA' werden respektive durch B_p, C_p, D_p und die Winkel $A'QA''$, $A''QA$, AQA' werden respektive durch B_q, C_q, D_q bezeichnet, kann man schreiben:

$$\frac{\sin a}{\sin \varphi'} = \frac{\sin b'}{\sin \varphi} = \frac{\sin D_p}{\sin D}; \quad \frac{\sin c}{\sin \psi'} = \frac{\sin \partial'}{\sin \psi} = \frac{\sin D_q}{\sin D}$$

$$\frac{\sin a'}{\sin \varphi''} = \frac{\sin b''}{\sin \varphi'} = \frac{\sin B_p}{\sin B}; \quad \frac{\sin c'}{\sin \psi''} = \frac{\sin \partial''}{\sin \psi'} = \frac{\sin B_q}{\sin B}$$

$$\frac{\sin a''}{\sin \varphi} = \frac{\sin b}{\sin \varphi''} = \frac{\sin C_p}{\sin C}; \quad \frac{\sin c''}{\sin \psi} = \frac{\sin \partial}{\sin \varphi''} = \frac{\sin C_q}{\sin C}.$$

Also auch:

$$\frac{\sin a}{\sin c} : \frac{\sin \varphi'}{\sin \psi'} = \frac{\sin D_p}{\sin D_q} = \frac{\sin b'}{\sin \partial'} : \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \text{ resp. } \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin D_p}{\sin D_q}\frac{\sin \varphi'}{\sin \psi'}; \quad \frac{\sin b'}{\sin \partial'} = \frac{\sin D_p}{\sin D_q}\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$$

$$\frac{\sin a'}{\sin c'} = \frac{\sin B_p}{\sin B_q}\frac{\sin \varphi''}{\sin \psi''}; \quad \frac{\sin b''}{\sin \partial''} = \frac{\sin B_p}{\sin D_q}\frac{\sin \varphi'}{\sin \psi'}$$

$$\frac{\sin a''}{\sin c''} = \frac{\sin C_p}{\sin C_q}\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}; \quad \frac{\sin b}{\sin \partial} = \frac{\sin C_p}{\sin C_q}\frac{\sin \varphi''}{\sin \psi''}.$$

Daraus

$$\frac{\sin a}{\sin c} : \frac{\sin b}{\sin d} = \frac{\sin D_p \sin \varphi' \sin \varphi}{\sin D_q \sin \psi' \sin \psi} : \frac{\sin C_p \sin \varphi'' \sin \varphi}{\sin C_q \sin \psi'' \sin \psi} = \frac{\text{Sin}(APA')}{\text{Sin}(AQA')} : \frac{\text{Sin}(APA'')}{\text{Sin}(AQA'')}$$

und noch

$$\frac{\sin a'}{\sin c'} : \frac{\sin b'}{\sin d'} = \frac{\text{Sin}(A'PA'')}{\text{Sin}(A'QA'')} : \frac{\text{Sin}(A'PA)}{\text{Sin}(A'QA)}$$

und 2)

$$\frac{\sin a''}{\sin c''} : \frac{\sin b''}{\sin d''} = \frac{\text{Sin}(A'PA)}{\text{Sin}(A''QA)} : \frac{\text{Sin}(A''PA')}{\text{Sin}(A''QA')}.$$

Sin bedeutet hier Sinusfunktion des betreffenden Trigonoëders.

Man ersieht sogleich aus den letzten Teilen der Gleichungen, daß jede derselben nur eine Folgerung der beiden anderen ist und sich durch einfache Multiplikation erhalten läßt. Das muß auch für die ersten Teile der Fall sein. Wenn zwei derselben rationale Zahlen sind, so ist dies der Fall für alle angegebenen Doppelverhältnisse, und diese sind die bekannten Gaussschen Doppelverhältnisse für einen kristallographischen Komplex.

Nun kann man sagen, daß jeder Strahl eines Raumkomplexes durch zwei rationale Winkel als sphärische Koordinaten desselben sich bestimmen läßt.

Im I. Teile wurden die wichtigsten speziellen Komplexe, die isotropen, mit besonderer Umständlichkeit untersucht. Dieselben zeichnen sich dadurch aus, daß die Tangentenquadrate sämtlicher Winkel derselben rationale Zahlen sind und in der Form $c\,q^2$ dargestellt werden können, wo die ganze Zahl c, welche keine zwei gleiche Faktoren besitzt, als Parameter bezeichnet wurde.

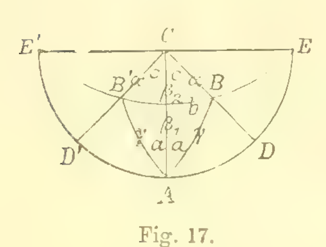


Fig. 17.

Nun ist leicht der Beweis zu erbringen, daß auch in Raumkomplexen sämtliche ebene Komplexe (Zonen), als integrierende Teile derselben, isotrop sind, wenn für zwei Bestimmungskomplexe die isotropen genommen sind, und wenn die Achsen dieser beiden aufeinander senkrecht stehen.

Nehmen wir als die den Raumkomplex bestimmenden die isotropen Ebenenbüschel, deren Achsen die senkrechten Geraden A und C sind (Fig. 17).

Da der Winkel β ein rechter ist, so ist nach bekannter Formel der sphärischen Trigonometrie:

$$\cos^2 b = \cos^2 c \cos^2 a \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1+\mathrm{t}^2 b} = \frac{1}{(1+\mathrm{t}^2 c)(1+\mathrm{t}^2 a)}.$$

Also

$$\mathrm{t}^2 b = \mathrm{t}^2 a + \mathrm{t}^2 c + \mathrm{t}^2 a\, \mathrm{t}^2 c. \tag{3}$$

Wenn $\mathrm{t}^2 a$ und $\mathrm{t}^2 c$ rationale Zahlen sind, so ist dies auch für $\mathrm{t}^2 b$ der Fall, was zu beweisen war.

Solche Raumkomplexe werden ebenfalls als isotrope bezeichnet.

Diesem Satze gemäß sind die Quadrate der Tangenten von sämtlichen Winkeln, als integrierenden Teilen der isotropen Komplexe, rationale Zahlen, welchen die Form $c\,q^2$ zugeschrieben werden kann. Da durch jeden Strahl derselben unendlich viele isotrope ebene Komplexe gezogen werden können, und in jedem derselben notwendig ein zum gegebenen senkrechter Strahl vorhanden ist, so ist zugleich demselben die ihm senkrechte komplexiale Ebene zugeordnet, und die einzelnen Strahlen der letzteren bilden dieselben ebenen Winkel, wie die Flächenwinkel der durch diesen Strahl hindurchgehenden Ebenen. Wenn also der Parameter c charakteristisch ist für den ebenen Strahlenkomplex, so gilt genau dasselbe auch für die Flächenwinkel der letzteren Ebenenbüschel. Wir können also nicht nur jedem ebenen Schnitte eines isotropen Komplexes, sondern auch jedem einzelnen Strahl einen bestimmten Parameter in der Form einer ganzen Zahl zuschreiben, und dieser Parameter wird derselbe für einen beliebigen Strahl und für den ihm senkrechten ebenen Komplex.

Ersetzen wir in der Gleichung 3) die Tangentenquadrate durch die rationalen Zahlen von bekannter Form, so erhalten wir

$$P\left(\frac{p}{q}\right)^2 = P_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 + P_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2 + P_1 P_2\left(\frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}\right)^2$$

oder

$$P(p\, q_1 q_2)^2 = P_1 (q\, p_1 q_2)^2 + P_2 (q\, q_1 p_2)^2 + P_1 P_2 (q\, p_1 p_2)^2.$$

Da alle vier Zahlen $p\, q_1 q_2$, $p_1 q_1 q_2$, $q\, p_2 q_2$ und $q\, p_1 p_2$ voneinander unabhängig sind, so ist einfacher dieselbe Gleichung in der Form:

$$P p^2 = P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + P_1 P_2 p_3^2. \qquad 4)$$

Hier bedeuten P_1 und P_2 die Parameterzahlen der beiden den isotropen Komplex bedingenden senkrechten Zonen. Der Anschaulichkeit wegen können wir diese Zonen durch die zugeordneten Parameterzahlen bezeichnen.

Nehmen wir jetzt anstatt der Zone P_2 eine andere zu P_1 senkrechte Zone mit dem Parameter $P_1 P_2$. Dann erhalten wir als die entsprechende Gleichung:

$$P p^2 = P_1 p_1^2 + P_1 P_2 p_2^2 + P_1^2 P_2 p_3^2 = P_1 p_1^2 + P_1 P_2 p_2^2 + P_2 p_3'^2. \qquad 4\text{a})$$

Somit verhält sich die Zone P_2 zu den Zonen P_1 und $P_1 P_2$, ebenso wie $P_1 P_2$ zu den Zonen P_1 und P_2. Da aber P_2 als die zu P_1 senkrechte Zone angenommen wurde, so müssen alle drei Zonen P_1, P_2 und P_3 zu einander senkrechte Zonen sein.

Also die in jedem isotropen Komplex zu beiden senkrechten gegebenen Zonen mit den Parametern P_1 und P_2 senkrechte Zone besitzt den Parameter $P_1 P_2$, wie beliebig die Zonen P_1 und P_2 auch aus dem Komplex herausgenommen würden.

Dieser sehr wichtige Satz von allgemeiner Bedeutung für die isotropen Komplexe wäre als Grundsatz für dieselben zu bezeichnen.

Da $P_1 \times P_2 \times P_1 P_2 = (P_1 P_2)^2$, so kann man denselben Satz auch derart formulieren, daß das Produkt der Parameter dreier sonst beliebigen, aber zueinander senkrechten Zonen stets ein volles Quadrat ist.

Multiplizieren wir die Parameterzahlen der drei senkrechten Zonen mit einer dieser Zahlen, so erhalten wir drei Zahlen, welche schon die Bedingung für drei senkrechte Zonen eines isotropen Komplexes nicht mehr erfüllen.

Multiplizieren wir zum Beispiel die Zahlen P_1, P_2, $P_1 P_2$ mit P_1, so erhalten wir P_1^2, $P_1 P_2$, $P_1^2 P_2$ respektive 1, $P_1 P_2$, P_2 (da P_1^2 als volles Quadrat eine verschwindende Zahl ist); nun sieht man, daß eine dieser Zahlen keineswegs das Produkt der beiden anderen ist; auch ist das Produkt aller drei $P_1 P_2^2$, also kein volles Quadrat.

Darin ersehen wir einen Grundunterschied in der Bedeutung dieser Zahlen für den ebenen und für den Raumkomplex. Im isotropen Raumkomplexe ist nicht gestattet die Parameterzahlen sämtlich durch irgendwelche ganze Zahl zu multiplizieren, da auch die Zahlen $P_1 k$, $P_2 k$, $P_1 P_2 k$ die Bedingungen nicht erfüllen, welche den Parametern dreier senkrechten Zonen zukommen.

In isotropen Raumkomplexen kommt den Parameterzahlen eine absolute Bedeutung zu.

Auf Grund derselben Formel der sphärischen Trigonometrie können wir auch schreiben:

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 = \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b \text{ oder } \mathrm{t}\,\alpha\,\mathrm{t}\,\gamma = -\frac{1}{\cos b},$$

oder weiter

$$\mathrm{t}^2\alpha\,\mathrm{t}^2\gamma = \frac{1}{\cos^2 b} = 1 + \mathrm{t}^2 b$$

oder endlich

$$\mathrm{t}^2 b = \mathrm{t}^2\alpha\,\mathrm{t}^2\gamma - 1. \tag{5}$$

Der Vergleich dieser Formel mit 3) zeigt, daß wir den Parameter desselben Strahles auch vermittelst sphärischer Koordinaten anderer Art bestimmen können.

Auch dieser Formel kommt hervorragende Bedeutung zu in Anbetracht der zahlreichen Folgerungen, welche zur Aufklärung der Eigenschaften der isotropen Komplexe beitragen.

Ziehen wir in Betracht, daß jedes Tangentenquadrat des isotropen Komplexes eine Zahl von der Form $a\left(\frac{p}{q}\right)^2$ ist, wo a, p und q ganze Zahlen sind, dabei p und q ganz beliebige.

Es seien:

$$\mathrm{t}^2 b = B\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2;\ \mathrm{t}^2\alpha = A\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2;\ \mathrm{t}^2\gamma = C\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2.$$

Denken wir zuerst, daß α_1 und α_2 ganz beliebig herausgenommen werden, aber $\gamma_1 : \alpha_2 = \gamma_2 : \alpha_1$. Diesen Werten entsprechen unendlich viele Werte der Winkel α und γ, aber nur solche, welche zweien isotropen ebenen Zonen mit den Parametern A resp. C entsprechen und dabei in bestimmt koordinierten Kombinationen stehen. Für alle diese Koordinatenkombinationen bleibt das Produkt $\mathrm{t}^2\alpha\ \mathrm{t}^2\gamma$ konstant, folglich auch $\mathrm{t}^2 b$. Die unendliche Gesamtheit aller dieser Strahlen des Komplexes besitzt einen und denselben Parameter B.

Weiter denken wir sämtliche Glieder dieser Gleichheit mit dem Quadrat einer beliebigen rationalen Zahl c multipliziert; also:

$$\mathrm{t}^2 b' = c^2\,\mathrm{t}^2 b = c^2\,\mathrm{t}^2\alpha\,\mathrm{t}^2\gamma - c^2. \tag{5 a}$$

Als Koordinaten können wir jedesmal beliebig $\mathrm{t}^2\alpha' = c^2\,\mathrm{t}^2\alpha$ oder $\mathrm{t}^2\gamma' = c^2\,\mathrm{t}^2\gamma$ setzen. Diese beiden Annahmen entsprechen den Winkelkombinationen $(\alpha'\gamma)$ oder $(\alpha\gamma')$, welche untereinander und zugleich von den oben erwähnten wesentlich verschieden sind. Trotzdem erhalten wir für b' solche Werte, welche den Strahlen mit demselben Parameter entsprechen, obgleich diese Werte von den obigen Werten b verschieden sind; es ist aber natürlich, daß alle Werte von b' gerade die Gesamtheit der Winkel der isotropen Zone mit dem Parameter B umfassen.

So verschiedenartig erweist sich die Entwicklung desjenigen Teiles des Gesamtkomplexes, welche allein die Strahlen mit gleichen Parameter, also die parametrisch gleichen Strahlen, umfaßt. Diese Gesamtheit in Analogie mit der im I. Teile gemachten Annahme kann als ein Teilkomplex mit dem Parameter B bezeichnet werden.

Weiter ersehen wir aus der Formel 5) direkt, daß die Ebene AC Symmetrieebene des Komplexes ist. Da aber die senkrechten Strahlen A und C aus dem Komplex in seiner beliebigen Ebene herausgenommen wurden, so sind sämtliche Strahlenebenen des

Komplexes Symmetrieebenen desselben und folglich auch sämtliche Strahlen desselben zweizählige Symmetrieachsen desselben.

Nehmen wir beliebig aus dem Komplex zwei Strahlenebenen mit gleichem Parameter heraus, so schneiden sich die beiden in einem bestimmten Strahl, welcher als die Achse einer bestimmten Zone angenommen werden kann. Nun sind die beiden senkrechten Bisektrissen-Ebenen dieses Paares von Ebenen die Symmetrieebenen dieses Paares. Die Bestimmung des Gesamtkomplexes erleidet keine Änderung, wenn anstatt eines Paares senkrechter Strahlen wir auf einer dieser Ebenen das ihm symmetrische Strahlenpaar aus der anderen Ebene zur Bestimmung herausnehmen. Die Bestimmung erleidet auch keine Änderung, wenn wir das herausgenommene Strahlenpaar auf der ersten Ebene durch ein anderes Strahlenpaar auf derselben Ebene ersetzen, dessen konstituierende Strahlen gleichen Parameter besitzen.

Also die Gesamtheit aller Strahlen des Komplexes, welche gleichen Parameter besitzen, bildet eine symmetrische Gruppe, das heißt: sämtlichen Komplexstrahlen mit gleichem Parameter kommt in dem Komplexe gleiche Rolle zu.

Die Strahlen mit gleichem Parameter sind also die gleichen Strahlen. Aus dem Dualismusgrunde ist dasselbe für sämtliche Strahlenebenen gültig, das heißt: die Gesamtheit aller Strahlenebenen des Komplexes, welche gleichen Parameter besitzen, bildet eine symmetrische Gruppe, anders ausgedrückt: sämtlichen Komplexebenen mit gleichem Parameter kommt in dem Komplexe gleiche Rolle zu.

Die Komplexebenen mit gleichem Parameter sind die gleichen.

Dadurch werden die oben erwähnten Teilkomplexe bedingt: ein Teilkomplex umfaßt also die vollständige Gesamtheit aller gleichen Strahlen resp. Ebenen.

Wollen wir auf jedem Strahle seinen Parameter in der Form einer zentralen Strecke auffassen, so bedingt jeder Teilkomplex eine Sphäre mit bestimmtem Radius. Dieselbe Sphäre drückt zugleich die Gesamtheit der den Strahlen zugeordneten (das heißt respektive senkrechten) Komplexebenen aus.

Der Gesamtkomplex wird somit durch eine unendliche Gesamtheit der konzentrischen Sphären ausgedrückt, deren Radius durch alle dem Komplex zukommenden Parameterzahlen bestimmt werden.

Aus dem Satze, nach welchem sämtliche Strahlenebenen Symmetrieebenen des Komplexes sind und daß es solche Ebenen, welche sich in einer einzigen Achse schneiden, in unendlicher Anzahl gibt, folgt weiter, daß sämtliche Strahlen des Komplexes unendlichzählige (und nicht nur zweizählige) Symmetrieachsen sind.

Wenn wir also um jeden Strahl unendliche gleichachsige Rotationskegel mit den Öffnungswinkeln a_1, a_2, a_3 . . beschreiben würden, so liegen auf der Oberfläche jedes solchen Kegels die unendlich vielen gleichen Strahlen.

Dieser Schluß ist übrigens aus der Formel 5 a) direkt ersichtlich, wenn wir in derselben der Zahl c alle möglichen Werte erteilen und dabei den Winkel a unverändert lassen und nur von dem Winkel γ die aus der Formel hervorgehenden Werte γ' berechnen.

Aus der Formel 5) scheint weiter hervorzugehen, daß wir bei Änderung von γ und Beibehaltung von a den Strahl mit dem von B verschiedenen Parameter als Komplexstrahl erhalten, und zugleich muß sich dieser Strahl auf derselben Kegeloberfläche mit dem Öffnungswinkel a befinden.

Dies ist aber nicht der Fall, wie man aus dem Folgenden ersieht.

Es sei C ein Komplexstrahl, welcher als die Achse eines Kegels mit dem sphärischen Radius $C a'$ angenommen ist (Fig. 18). Es seien $a, a_1, a_2 \dots$ die in der zu C senkrechten Ebene vorkommenden gleichen, und $b, c \dots$ die ungleichen Strahlen. Dadurch wird die unendliche Anzahl von ebenen Komplexstrahlen bedingt, welche sämtlich den Strahl C mit bestimmten Parameter gemeinsam haben. Unter diesen Komplexen sind die Komplexe $C a$, Ca_1, $Ca_2 \dots$ die gleichen, da sie durch gleiche Parameter auf senkrechten Strahlen bestimmt sind; folglich müssen auch die Strahlen a', a_1', a_2' auf der Kegelfläche die gleichen sein. Würden aber auch die Strahlen b', $c' \dots$ auf derselben Kegelfläche möglich sein, so würde dies bedeuten, daß auch die Komplexe $C b$, $C c \dots$ den Komplexen $C a \dots$ gleich sind, da für die Gleichheit der ebenenen isotropen Komplexe die Gleichheit je eines Winkels hinreichend ist, und hier haben wir die gleichen Winkel $C a' = C b' = C c' \dots$

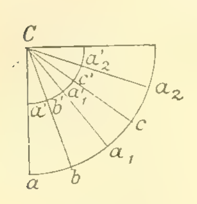


Fig. 18.

Die Strahlen b', $c' \dots$ sind also unmöglich, das heißt sie können in dem gegebenen Komplexe nicht vorhanden sein. Somit entsteht ein scheinbarer Widerspruch mit der Formel 5). Dieser Widerspruch entsteht aber infolgedessen, daß die Koordinatenwinkel α, γ nicht voneinander unabhängig sind, und davon ist in Formel 5) nichts enthalten.

Die zwischen α und γ bestehende Koordination kann auf folgendem Wege aufgeklärt werden. Bezeichnen wir diejenigen zwei Winkel, welche aus dem rechten Winkel $A C$ durch die Zone $B B'$ entstehen, durch β_1 resp. β_2, so erhalten wir: [1])

$$\begin{aligned} \mathrm{t}^2 \alpha &= \mathrm{t}^2 \beta_2 (1 + \mathrm{t}^2 c) = P_a P_c (1 + P_c k^2)\, C^2 = P_a (P_c p_1^2 + p_2^2)\, C_1^2 \\ \mathrm{t}^2 \gamma &= \mathrm{t}^2 \beta_1 (1 + \mathrm{t}^2 a) = P_a P_c (1 + P_a k'^2)\, C'^2 = P_c (P_a q_1^2 + q_2^2)\, C_1'^2. \end{aligned} \qquad 6)$$

Aus dieser Formel ersieht man sogleich, daß α nicht sämtliche für den Komplex zulässige Größen annehmen kann. Im Gegenteil nimmt die Gesamtheit von Zahlen $\mathrm{t}^2 \alpha$ nur die Werte derjenigen Zahlenreihe an, welche einem ebenen Komplex $\{P_c \cdot 1\}$ entspricht, und dabei noch mit P_a multipliziert. Der erste Faktor aller dieser Zahlen ist also gerade derselbe, wie für den Komplex von $\mathrm{t}^2 (c)$. Falls also in dieser unendlichen Reihe auch die Zahl P_a vorkommt, so bringt die Einführung der Faktoren P_a keine Änderung, und die beiden Zahlenreihen sind identisch. Ist dies aber nicht der Fall, so haben die beiden Zahlenreihen keine einzige Zahl gemeinsam.

Natürlich gilt dasselbe auch in Bezug auf die Zahlen der Reihe $\mathrm{t}^2 \gamma$ und $\{P_a \cdot 1\}$.

Jedenfalls läßt sich die Gesamtheit der Koordinaten $\mathrm{t}^2 \alpha$ (wie $\mathrm{t}^2 \gamma$) als eine solche auffassen, welche den Zahlen einer einzigen Zone entsprechen.

Übrigens kann dieser Schluß als selbstverständlich gelten. Wenn in der Tat D der zu C senkrechte Strahl der Zone ist, welche durch die Koordinate α bestimmt wird, und D' die Achse dieser Zone ist, so sind die Parameter beider identisch. Die Strahlen D und D' sind die senkrechten, also koordinierte Strahlen der Zone C; jedem Strahle dieser Zone entsprechen die Zahlen $x \{P_c \cdot 1\}$, wo x eine beliebige Zahl der betreffenden Zahlenreihe ist, und nun ist in dieser Zahlenreihe allein die Zahl P_a gegeben, welche den Parameter

[1]) Dem oben erwähnten Satze zufolge besitzt die Zone $A C$ den Parameter $P_a P_c$, wenn P_a der Parameter des Strahles A, und P_c der Parameter des Strahles C ist.

des Strahles A darstellt, folglich $x = P_a$. Ist $P_a = 1$, so ist dasselbe für x der Fall, aber das ist ein sehr partikulärer Fall.

Wenn P_x der Parameter eines Strahles der Zone $D\,A\,D'$ z. B. D' ist, so sind die betreffenden Parameter der Zone $C\,D$ die Gesamtheit der Zahlen $P_c\,\{P_x \cdot 1\}$; folglich ist die vollständige Gesamtheit aller Parameterzahlen des Komplexes:

$$P_c\,[P_a\,\{P_c \cdot 1\} \cdot 1] \equiv [P_a\,\{P_c \cdot 1\} \cdot P_c] \text{ resp. } [P_c\,\{P_a \cdot 1\} \cdot P_a]. \qquad 7)$$

Dieser Ausdruck, welchen man einfacher durch ein einheitliches Symbol $[P_a \cdot P_c]$ ersetzt, kann als Symbol des Gesamtkomplexes gelten, da in demselben sämtliche Parameterzahlen eingeschlossen sind.

Im Gegensatz zu den ebenen Komplexen ist hier nicht gestattet die Zahlen mit irgendwelcher Zahl weder zu multiplizieren noch dividieren, da in Raumkomplexen jeder Parameterzahl eine absolute Bedeutung zukommt; diese Zahl bedingt nämlich die Entwicklung der betreffenden Zone in eine Reihe bestimmter Winkel. Führt man einen beliebigen Faktor ein, so wird die Winkelreihe selbst eine ganz andere.

Also z. B. drücken solche zwei Symbole wie $[3 \cdot 1]$, $[6 \cdot 2]$, $[3 \cdot 4]$ ... ganz verschiedene Raumkomplexe aus, oder wenigstens bedarf deren Identität eines speziellen Beweises.

Wenn aber eine der bestimmenden Zahlen ein volles Quadrat ist, so ist der Parameter eigentlich gleich 1; also kann man von vornherein schreiben:

$$[3 \cdot 4] \equiv [3 \cdot 1],\ [3 \cdot 12] \equiv [3 \cdot 3] \equiv [3 \cdot 1] \ldots$$

Die letzte Gleichung beruht darauf, daß, wenn zwei bestimmende Zahlen A und C sind, die Parameterzahl des zu den gegebenen Strahlen senkrechten Strahles $A\,C$ ist, in diesem speziellen Fall $3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2$; nun ist es erlaubt, denselben Komplex durch die Zahlen A und $A\,C$ oder C und $A\,C$ zu bestimmen.

Da auf Grund der Formel 7) die Identität besteht

$$[A \cdot C] \equiv [A\,\{C \cdot 1\} \cdot C] \equiv [A \cdot C\,\{A \cdot 1\}],$$

so kann man sagen, daß, wenn irgendwelche Zahlen der Reihe $\{C \cdot 1\}$ bekannt sind, z. B. C_1, C_2, C_3 .. oder wenn irgendwelche Zahlen der Reihe $\{A \cdot 1\}$ bekannt sind, z. B. A_1, A_2, A_3 ... man eine neue Reihe der Identitäten aufstellen kann und zwar:

$$\begin{aligned} & [A \cdot C] \equiv [A\,C_1 \cdot C] \equiv [A\,C_2 \cdot C] \equiv [A\,C_3 \cdot C] \ldots \\ \text{und} \quad & [A \cdot C] \equiv [A \cdot A_1\,C] \equiv [A \cdot A_2\,C] \equiv [A \cdot A_3\,C] \ldots \end{aligned} \qquad 8)$$

Zum Beispiel bestehen die Identitäten (vgl. S. 34 ff.):

$$\begin{aligned} & [1 \cdot 1] \equiv [2 \cdot 1] \equiv [5 \cdot 1] \equiv [10 \cdot 1] \equiv [13 \cdot 1] \equiv [17 \cdot 1] \equiv [26 \cdot 1] \ldots \\ & [3 \cdot 1] \equiv [6 \cdot 1] \equiv [15 \cdot 1] \equiv [30 \cdot 1] \equiv [39 \cdot 1] \equiv [51 \cdot 1] \equiv [78 \cdot 1] \ldots \\ & \equiv [3 \cdot 3] \equiv [3 \cdot 9] \equiv [3 \cdot 21] \equiv [3 \cdot 39] \equiv [3 \cdot 57] \equiv [3 \cdot 63] \ldots \\ & \qquad\quad [3 \cdot 1] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [3 \cdot 7]. \end{aligned}$$

Jedes Glied dieser Gleichungen können wir durch weitere Entwicklungen als Anfangsglieder neuer Identitätenreihen darstellen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} & ([1 \cdot 1] \equiv)\, [2 \cdot 1] \equiv [2 \cdot 2] \equiv [2 \cdot 3] \equiv [2 \cdot 6] \equiv [2 \cdot 11] \equiv [2 \cdot 17] \equiv [2 \cdot 19] \ldots \\ \text{auch} \quad & [5 \cdot 1] \equiv [5 \cdot 5] \equiv [5 \cdot 6] \equiv [5 \cdot 14] \equiv [5 \cdot 21] \equiv [5 \cdot 29] \equiv [5 \cdot 30] \ldots \end{aligned}$$

Alle diese unbegrenzt gedachten Entwicklungen der Identitäten weisen auf das Vorhandensein zweier senkrechten Strahlen in dem gegebenen Komplex mit den angegebenen Parameterzahlen, welche zu koordinierten Paaren vereinigt vorkommen, hin.

Jedem dieser Zahlenpaare ist noch eine dritte Zahl koordiniert, welche das Produkt beider ist.

Eine weitere Erforschung der Formel 5) zeigt, daß die Bedingung der Möglichkeit zweier Koordinaten α und γ ist:

$$t^2 \alpha \, t^2 \gamma > 1. \tag{9}$$

Ist einer dieser Winkel, z. B. α ein rechter, so hat die Gleichheit $t^2 \alpha = \infty$ statt. Folglich ist auch $t^2 b = \infty$ unabhängig von dem Werte des Winkels γ. Diese Folgerung ist von vornherein klar.

Alle vorhergehenden Folgerungen über isotrope Raumkomplexe zusammenfassend, können wir sagen, daß jedem Strahle derselben eine bestimmte Parameterzahl zukommt und daß der Gesamtkomplex aus unendlich vielen Teilkomplexen besteht, unter welchen jedem eine bestimmte Parameterzahl zukommt, jeder also durch eine Sphäre repräsentiert werden kann, und die Gesamtheit aller solcher Sphären alle für den Komplex zulässigen Parameterzahlen als deren Radien umfaßt.

Besonders interessant ist aus dem Vorhergehenden folgende Repräsentation einer einem Teilkomplexe zukommenden Sphäre. Nehmen wir jeden von zwei senkrechten beliebigen Strahlen des Komplexes als die Achsen eines Büschels von einem koaxialen Rotationskegel an, wobei die Öffnungswinkel der Kegel sämtliche Winkel zwischen gleichen Strahlen zweier koordinierten Zonen umfassen, so sind die Schnittstrahlen dieser Kegelflächen die Strahlen eines und desselben Teilkomplexes. Unter koordinierten Zonen werden solche verstanden, deren senkrechten Achsen die koordinierten Parameterzahlenpaare des gegebenen Komplexes sind.

Da aber jedem koordinierten Strahlenpaar auch ein dritter, zu beiden senkrechter Strahl, koordiniert ist (und seine Parameterzahl das Produkt der beiden Parameterzahlen der gegebenen koordinierten Strahlen ist), so gilt dasselbe auch für das dritte koordinierte Kegelsystem.

Auf der Sphäre werden die koaxialen Kegeloberflächen durch konzentrische Kleinkreise repräsentiert, und da die gleichen Strahlen einer Zone (ebenen Komplexes) unter lauter gleichen (irrationalen) Winkeln stehen, also die Radien der konzentrischen Kleinkreise eine arithmetische Progression bilden, so kann man das Gesamtsystem von sphärischen konzentrischen Kreisen mit einem Wellensystem vergleichen, und dann können wir diese Folgerung in folgenden Worten zum Ausdruck bringen:

Ein Teilkomplex wird durch drei koordinierte sphärische Wellensysteme repräsentiert. Knotenpunkte dieser Systeme sind die Strahlen dieses Teilkomplexes. Auf sämtlichen Knotenkreisen dieser Wellensysteme liegt kein einziger Knotenpunkt (resp. ein Komplexstrahl) eines anderen Teilkomplexes.

Berücksichtigt man, daß die elementare Differenz dieser arithmetischen Progression, welche wir als $\Delta \alpha$ bezeichnen wollen, irrational ist, so kann man daraus schließen, daß unter diesen unendlichen Systemen von Kleinkreisen kein einzigesmal ein Großkreis entstehen kann.

In der Tat, hätte die Gleichheit $n \cdot \Delta a = \frac{\pi}{2}$ bestanden, wo n eine endliche, ganze Zahl bedeutet, so würde dies zu dem Schlusse führen, daß die betreffende Zonenachse vierzählige Symmetrieachse ist; diese Annahme ist aber, wie in dem I. Teil dieser Arbeit bewiesen wurde, unmöglich. Daraus folgt aber keineswegs die Unmöglichkeit derselben Annahme für den Fall $n = \infty$, da die letzte Annahme nur bedeuten würde, daß die Zonenachse eine Symmetrieachse von unendlicher Zähligkeit ist.

Wie in dem I. Teile ebenfalls bewiesen wurde, läßt sich jeder Teilkomplex in unendlich viele Systeme gliedern. Demzufolge stellt auch ein Teilkomplex im Raume nicht allein eine Gesamtheit der Knotenpunkte eines einzigen sphärischen Wellensystems, sondern die Knotenpunkte unendlich vieler solcher Systeme dar.

Kommt unter unendlichen konzentrischen Kleinkreisen auch ein Großkreis vor, so bildet derselbe von sich selbst ein abgesondertes System. Wie wir oben gesehen haben, unterscheidet sich derselbe von allen Kleinkreisen wesentlich dadurch, daß in ihm nicht allein die Strahlen desselben Teilkomplexes, sondern auch eine unendliche Anzahl der Strahlen anderer Teilkomplexe vorkommen.

Bezeichnen wir eine Kegelfläche eines Systems als konische Zone, so können wir sagen, daß die Schnittstrahlen konjugierter konischer Zonen eines Teilkomplexes die Strahlen desselben sind.

Es fällt die Analogie dieses Gesetzes der Teilkomplexe mit dem Zonengesetz für den Gesamtkomplex in die Augen.

Wollen wir den Teilkomplex entwickeln, dessen Strahlen einem Hauptstrahl, z. B. dem Strahl C (Fig. 17, S. 54) gleich sind, so sind die beiden senkrechten, durch C hindurchgehenden Hauptzonengroßkreise diejenigen besonderen Großkreise, welche den aus den beiden anderen Hauptstrahlen ausgehenden Wellensystemen zukommen. Der Fall aber, in welchem auch in der zu C senkrechten Zone Strahlen vorhanden sind, welche dem Strahle C gleich sind, ist ein partikulärer. Wenn ein solcher Strahl wirklich vorhanden ist, so können wir denselben als Hauptstrahl annehmen, und dann erhalten wir einen Komplex, welchen wir durch zwei gleiche Strahlen mit dem Parameter C bestimmen; dann ist der dritte Hauptstrahl der mit Parameter 1, das heißt zugleich eine komplexiale vierzählige Symmetrieachse.

Solche spezielle Komplexe können wir als tetragonaloïd-isotrope bezeichnen, ebenso wie solche, in welchen der Parameter 3 auftritt, als hexagonaloïd-isotrope.

Im Allgemeinen lassen sich die Winkel α und γ in der Formel 5) nicht vertauschen (trotzdem die Formel selbst in Bezug auf die beiden symmetrisch ist).

Wäre dies der Fall gewesen, so würde die Ebene BB' Symmetrieebene des Komplexes, also eine Zone desselben sein, und dann wären die Strahlen A und C die gleichen; die zur Ebene derselben senkrechte Gerade würde dann die vierzählige Symmetrieachse des Komplexes und der letzte wäre ein tetragonaloïder gewesen.

Im Allgemeinen sind durchaus nicht alle Schnittpunkte der aus verschiedenen aber gleichen Punkten eines Teilkomplexes sich ausbreitenden Wellensysteme Punkte desselben Teilkomplexes. Bei dieser Annahme hätten wir stets gleichseitige sphärische Dreiecke, deren sphärische Zentren einer dreizähligen Symmetrieachse des Teilkomplexes angehört hätten. Ein solcher Fall ist also allein in hexagonaloiden Komplexen zulässig. Sonst nicht.

Natürlich sind auch solche Komplexe denkbar, welche zugleich tetragonaloide und hexagonaloide sind. Es sind z. B. der Komplex [1 · 3], welcher als hexagonal-isotroper, und [1 · 1], welcher als kubischer bezeichnet wird. Für den ersten ist dies direkt ersichtlich. Was den zweiten anbetrifft, so wird dies klar sein, wenn man berücksichtigt, daß auch der dritte zu beiden Hauptstrahlen 1 und 1 senkrechte Hauptstrahl ebenfalls den Parameter 1 besitzt, also den beiden anderen gleich ist. In einem solchen sind also drei Bissektrissenebenen vorhanden BB', welche Symmetrieebene sind und sich unter gleichen Winkeln in dem Strahle B schneiden. Folglich ist B sechszählige Symmetrieachse.

Der Komplex [3 · 3] ist mit dem Komplex [1 · 3] identisch, da der dritte Hauptstrahl denselben Parameter 1 besitzt.

Nun ist aber zu beweisen, daß wirklich Komplexe vorhanden sind, welchen die Teilkomplexe 1 respektive 3 fehlen, welche also weder tetragonaloide noch hexagonaloide sind.

Betrachten wir zum Beispiel den Komplex [3 · 5], welcher augenscheinlich ein hexagonaloider ist. Wir haben einen solchen ausgewählt, da derselbe sicher von den Komplexen [1 · 1] resp. [1 · 3] verschieden ist, weil weder in dem ersten, noch in dem zweiten der Strahl 5 (das heißt mit dem Parameter 5) in der Zone des Strahles 3 auftritt.

Gemäß der Formel 4) haben wir für diesen Komplex:

$$Pp^2 = 3p_1^2 + 5p_2^2 + 15p_3^2.$$

Wäre ein Komplex ein tetragonaloider (wobei also $P = 1$ als möglicher Wert erscheinen würde), so hätten wir gehabt:

$$p^2 = 3p_1^2 + 5p_2^2 + 15p_3^2 \text{ respektive } p^2 + 2p_1^2 = 5(p_1^2 + p_2^2 + 3p_3^2).$$

Die Zahl $p^2 + 2p_1^2$ muß also durch 5 teilbar sein können; mit anderen Worten, unter den Parametern des ebenen Komplexes {12} muß auch 5 vorhanden sein.

Wie in dem I. Teile (S. 35) bewiesen ist, ist dies nicht der Fall. Also es gibt isotrope Komplexe, welche keine tetragonaloide sind. Dieser Komplex ist in der oberen Hälfte der beigegebenen Tabelle reproduziert worden.

Betrachten wir weiter den Komplex [1 · 7].

Derselbe ist offenbar ein tetragonaloider. Für denselben haben wir:

$$Pp^2 = p_1^2 + 7p_2^2 + 7p_3^2.$$

Soll in demselben der Parameter 3 auftreten, so hätten wir:

$$3p^2 + 6p_1^2 = 7(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \text{ respektive } 3(p^2 + 2p_1^2) = 7(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

Diese Gleichheit ist aber eine unmögliche, da der Komplex {1 · 2} den Parameter 7 nicht besitzt. Es gibt somit isotrope Komplexe, welche keine hexagonaloiden sind.

Dieser Komplex ist in der unteren Hälfte der beigegebenen Tabelle reproduziert.

Überhaupt können wir über jeden gegebenen isotropen Komplex entscheiden, ob in demselben ein Teilkomplex mit bestimmten Parameter P auftritt oder nicht.

In der Tat können wir die Gleichung 4) stets in der Form

$$Pp^2 + (P_2 - P_1)p_1^2 = P_2(p_1^2 + p_2^2 + P_1 p_3^2)$$

darstellen, und in dieser Form reduziert sich die aufgestellte Aufgabe auf die Auflösung der Aufgabe, ob in dem Zahlenkomplexe $\{P \cdot (P_2 - P_1)\}$ die Zahl P_2 auftritt oder nicht.

Betrachten wir den Komplex [2 · 6].

Derselbe erhält als seinen Ausdruck die Gleichung:

$$Pp^2 = 2p_1^2 + 6p_2^2 + 12p_3^2.$$

Zur Prüfung des Parameters 1 haben wir die Gleichung:

$$p^2 + 4p_1^2 = p^2 + p_1'^2 = 6(p_1^2 + p_2^2 + 2p_3^2).$$

Da dem Komplex {1 · 1} der Parameter 6 nicht zukommt, so kommt dem Komplex [2 · 6] der Parameter 1 nicht zu.

Zur Prüfung des Parameters 3 haben wir die Gleichung:

$$3p^2 + 4p_1^2 = 3p^2 + p_1'^2 = 6(p_1^2 + p_2^2 + 2p_3^2).$$

Da dem Komplex {3 · 1} der Parameter 6 nicht zukommt, so kommt dem Komplex [2 · 6] der Parameter 3 nicht zu.

Daraus hätte man den Schluß ziehen können, daß dem Komplex weder 1 noch 3 zukommt; aber dieser Schluß ist unrichtig, weil der dritte Hauptparameter nicht eigentlich $12 = 3 \cdot 2^2$, sondern 3 ist. Also [2 · 6] = [2 · 3] = [1 · 1] (wie dies übrigens schon oben angeführt wurde), und der Komplex besitzt somit die beiden Parameter 1 und 3.

Schreiben wir die Gleichung richtig

$$Pp^2 = 2p_1^2 + 6p_2^2 + 3p_3^2,$$

so haben wir zur Prüfung die Gleichungen

$$p^2 + p_3^2 = 2(p_1^2 + 3p_2^2 + 2p_3^2)$$

und

$$3p^2 + p_1^2 = 3(p_1^2 + 2p_2^2 + p_3^2),$$

welche das schon bekannte Resultat bestätigen.

Schreiben wir aber die erste Gleichung in der Form

$$p^2 + p_1^2 = 3(p_1^2 + 2p_2^2 + p_3^2),$$

so hätte man leicht einen falschen Schluß ziehen können, ob dem Komplexe nicht der Parameter 1 zukommt. Diese Bemerkungen sollen dazu beitragen, die Vorsichtsmaßregeln hervortreten zu lassen, welche nötig sind, damit die angeführte Operation nicht zu einem falschen Schluß angeregt hätte.

Auf den ersten Blick kann es den Anschein haben, als ob auf räumliche Komplexe der Multiplikationssatz anwendbar wäre. Daraus würde folgen, daß, wenn in dem Komplexe zwei Parameter P_1 und P_2 vertreten sind, notwendig auch der Parameter $P_1 P_2$ vorhanden sein muß, welcher nach der Multiplikationsregel der Vektoren gefunden wird.

Dies ist aber nicht der Fall, da, wie im I. Teile hervorgehoben wurde, dieser Satz nur dann zur Anwendung kommt, wenn in der Zone der Strahlen P_1 und P_2 auch der Strahl 1 vorhanden ist. Und es wurde oben bewiesen, daß es sogar Komplexe gibt, in welchen der Parameter 1 vollständig fehlt.

Dieser Satz ist also ausschließlich auf solche Zonen anwendbar. Zum Beispiel im kubischen Komplex auf Zonen $\{1 \cdot A\}$, wo A eine Zahl der Reihe ist, welche die einfachen Zahlen 1, 2, 5, (9), 13, 17, (21), (25), 29 ... allein als Faktoren vertreten. Im hypohexagonalen Komplex auf Zonen $\{1 \cdot B\}$, wo B dieselben Zahlen sind, mit 3 multipliziert u. s. w.

In der Zone 3 ist also die Zahlenreihe $\{1 \cdot 3\}$ nur in dem hexagonalen Komplex repräsentiert und nicht in dem kubischen, wo dieselbe durch $\{2 \cdot 6\} = 2\,\{1 \cdot 3\}$ repräsentiert ist, auch nicht in sämtlichen anderen Komplexen, wo die betreffende Reihe $k\,\{1 \cdot 3\}$, wo k für den betreffenden hexagonaloiden Komplex charakteristisch ist; würde in zwei Komplexen dieser Faktor gemeinschaftlich, so wären die Komplexe selbst identisch.

Ebenso ist im kubischen Komplex die Zone 1 durch den Zahlenkomplex $\{1 \cdot 1\}$ repräsentiert, während es in dem hexagonalen die Zahlenreihe $3\,\{1 \cdot 1\}$ ist.

Wenn wir aber für einen Parameter eine Zahl, welche keine Primzahl ist, auswählen, zum Beispiel 6, so kann ebenfalls für jeden gegebenen Komplex entschieden werden, ob die betreffende Zone durch den Zahlenkomplex $\{1 \cdot 6\}$ oder $\{2 \cdot 3\}$ oder endlich durch dieselben Zahlen mit bestimmten Faktoren vertreten sind. Die erste Zahlenreihe gehört dem hexagonalen Komplex an. Zum Beispiel der Zone [2121] gehören die Fläche $(010\bar{1})$ (Parameter 1) und die senkrechte Fläche $2\overline{121}$ (Parameter 6) an, während im kubischen Komplex der Zone [211] die Fläche $1\bar{1}0$ (Parameter 2) und die senkrechte Fläche $(\overline{11}1)$ (Parameter 3), oder der Zone [552] (ebenfalls Parameter 6) die Fläche $(1\bar{1}0)$ (Parameter 2) und die senkrechte Fläche $(\overline{11}5)$ (Parameter 3) angehören.

Man kann sogar sagen, daß in den Zonen, welche den Parameter 1 besitzen, die Anwendung des Satzes unbestimmt ist, da es jedenfalls solche Parameter in derselben Zone eine unendliche Anzahl gibt.

Trotzdem kann der Satz in Anwendung gebracht werden. Es sei ein Komplex gegeben mit den senkrechten Vektoren P_1, P_2, $P_1 P_2$. Durch diese drei Vektoren werden drei Zonen bestimmt, und eine beliebige andere Zone schneidet sich mit denselben in drei Vektoren. Es seien dieselben a, b, c. Nun nehmen wir den Vektor a als den Einheitsvektor 1; dann werden die beiden anderen $a\,b$ und $a\,c$ und das Produkt der beiden $a^2\,b\,c$ respektive $b\,c$. Es bleibt noch übrig, diesen Vektor mit a zu multiplizieren, und wir erhalten als Produkt von b und c den Vektor $a\,b\,c$; derselbe bildet mit c denselben Winkel, wie a mit b.

Wenn überhaupt in einer Zone drei Vektoren a, b und c bekannt sind, so muß sich in derselben als Produktvektor $a\,b\,c$ befinden. Der Satz läßt sich in Produkte von 5, 7 ... und überhaupt von einer ungeraden Anzahl Vektoren verallgemeinern.

Andererseits lassen sich in jeder Zone Vektoren entwickeln aus der Zahlenreihe $k\,\{1 \cdot P\}$, wenn P der Parameter der Zone und k die charakteristische Zahl ist. Diese Zahl ist aber keine streng bestimmte. Für eine solche kann eine beliebige Zahl der Vektorenzone angenommen werden.

Da die Zone P die drei Grundzonen $\{a \cdot b\}$, $\{b \cdot c\}$, $\{c \cdot a\}$ in bestimmten Vektoren schneidet, so kann ein beliebiger Parameter dieser drei Schnittebenen für k angenommen werden. Das Resultat der Entwicklung der Zone bleibt davon unabhängig, da der Zahlenkomplex $\{k \cdot k\,P\}$ durch Multiplikation mit einer beliebigen ihm zugehörigen Zahl stets einen und denselben Zahlenkomplex $\{1 \cdot P\}$ gibt.

Was aber den Additionssatz der Vektoren anbetrifft, so ist derselbe in vollem Grade anwendbar, da derselbe eigentlich mit demjenigen elementaren Satze übereinstimmt, welcher als der Satz der drei Perpendikeln bekannt ist.

Die drei ganzen Zahlen $p_1\,p_2\,p_3$ in der Formel 4) werden als Indizes eines Strahles bezeichnet, und die Größen $p_1 \sqrt{P_1}$, $p_2 \sqrt{P_2}$, $p_3 \sqrt{P_3}$ sind die Komponenten des Vektors. Jede dieser Komponenten kann als die Summe $p_1 \sqrt{P_1} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_1} + \cdots$ betrachtet werden;

der Summierung kommen dabei nur die Indizes zu; der Faktor $\sqrt{P_1}$ bleibt dabei gemeinschaftlich. Wenn wir drei Vektoren a, b, c (Fig. 19) mit den respektiven Indizes $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$ so auswählen, daß ein Strahl in der Ebene $b c$ zwischen b und c die Indizes $(b_1 + c_1\ b_2 + c_2\ b_3 + c_3)$ und ein Strahl in der Ebene $c a$ zwischen c und a die Indizes $(c_1 + a_1\ c_2 + a_2\ c_3 + a_3)$ erhält[1]), so ist leicht der Beweis zu erbringen, daß der Schnittstrahl von a und $(b + c)$ einerseits und b und $(c + a)$ andererseits die Indizes $(a + b + c)$, ebenso wie der Schnittstrahl $a b$ und $c \cdot (a + b + c)$ die Indizes $(a + b)$ erhält.

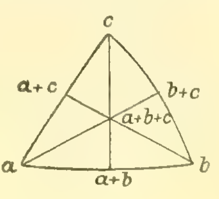


Fig. 19.

Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist; jedenfalls muß aber derselbe die Form $(a + c)m + kb$ und zugleich die Form $(b + c)n + la$ haben, also $(a + c)m + kb = (b + c)n + la$ respektive $a(m - l) + b(k - n) + c(m - n) = 0$. Diese Formel enthält in sich das System von sich selbst widersprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1(m - l) + b_1(k - n) + c_1(m - n) &= 0 \\ a_2(m - l) + b_2(k - n) + c_2(m - n) &= 0 \\ a_3(m - l) + b_3(k - n) + c_3(m - n) &= 0 \end{aligned}$$

respektive

$$(m - l):(k - n):(m - n) = (b c)_3 : (c a)_3 : (a b)_3 = (b c)_1 : (c a)_1 : (a b)_1 = (b c)_2 : (c a)_2 : (a b)_2.$$

Diesen Gleichungen werden nur die Bedingungen $(m - l) = 0$, $(k - n) = 0$, $(m - n) = 0$ genüge leisten, also $k = l = m = n$. In den Indizes werden aber die gemeinschaftlichen Faktoren beseitigt, woraus folgt, daß $k = l = m = n = 1$ ist, was zu beweisen war.

Aus diesem Satz folgt aber weiter, daß wir alle beliebigen Indizes eines Strahles durch sukzessives Addieren reproduzieren können, indem jedes aus drei Strahlen bestimmte sphärische Dreieck sich in sechs weitere zerlegt, welche durch die neu erhaltenen Zwischenstrahlen bedingt werden.

Daß dabei die Dreiecke stets die für die Anwendung der Additionsregel nötige Bedingung erfüllen, ist aus den Identitäten

$$1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + c_1 & a_1 + b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 + c_2 & a_2 + b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 + c_3 & a_3 + b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \ldots .$$

ersichtlich, indem die erste als die von vornherein für das Dreieck $(a b c)$ geltende angenommen wird, während die zweite auf Dreieck $(a + b + c\ b + c\ c)$, die dritte auf Dreieck $(a + c\ a + b + c\ c) \ldots$ Bezug hat.

Jedesmal aber, wenn wir von den Zahlen, welche die Indizes derjenigen Strahlen sind, welche die Scheitelpunkte eines Dreiecks bestimmen, zu neuen übergehen, welche die Zerlegung dieses Dreiecks in sechs weitere bedingen, wird die Periode der Komplexentwicklung um eins gesteigert. Dementsprechend können wir jede besondere Gruppe der Indizes einer

[1]) Wie in der zonalen Kristallographie bewiesen wird, ist dazu nötig, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

gleich 1 gewesen wäre.

bestimmten Periode zuordnen; und nun kann der Satz bewiesen werden, daß durch Ersetzung der Indizes $(p_1 p_2 p_3)$, wo $p_1 > p_2 > p_3$, durch $(p_1 - p_2, p_2 - p_3, p_3)$ die Periode um eins erniedrigt und durch Ersetzung durch $(p_1 + p_2 + p_3, p_2 + p_3, p_3)$ um eins gesteigert wird.

Aus den im I. Teile entwickelten Gründen kann man schließen, daß jeder gegebene Strahl $(p_1 p_2 p_3)$ als ein Resultat bestimmter Additionsoperationen vorkommt. Dieses Resultat respektive diese Operationsfolge wird durch den Ausdruck $(p_1 p_2 p_3) = p_1(100) + p_2(010) + p_3(001)$ eindeutig bedingt und kann sogar durch ein bestimmtes spezielles Symbol ersetzt werden, wie dies wirklich in der zonalen Kristallographie durch die zonalen Symbole geschehen ist. Das Dreieck (100), (010), (001) (Fig. 20) läßt sich aber in sechs Teildreiecke zerlegen, welche respektive durch $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ bezeichnet werden. Genau dieselbe Operationsfolge kann in jedem dieser Teildreiecke geschehen, und das Resultat wird davon abhängen, in welchem davon es geschehen wird.

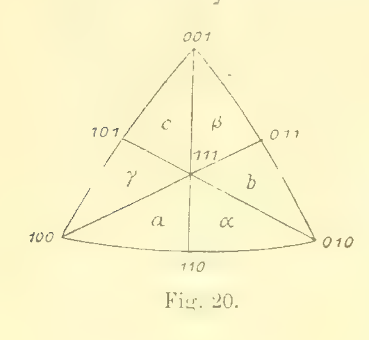


Fig. 20.

Wir erhalten:

in dem Dreiecke a $p_1(100)+p_2(110)+p_3(111)=(p_1+p_2+p_3)(100)+(p_2+p_3)(010)+p_3(001)$

„ „ „ α $p_1(010)+p_2(110)+p_3(111)=(p_2+p_3)(100)+(p_1+p_2+p_3)(010)+p_3(001)$

„ „ „ b $p_1(010)+p_2(011)+p_3(111)=p_3(100)+(p_1+p_2+p_3)(010)+(p_2+p_3)(001)$

„ „ „ β $p_1(001)+p_2(011)+p_3(111)=p_3(100)+(p_2+p_3)(010)+(p_1+p_2+p_3)(001)$

„ „ „ c $p_1(001)+p_2(101)+p_3(111)=(p_2+p_3)(100)+p_3(010)+(p_1+p_2+p_3)(001)$

„ „ „ γ $p_1(100)+p_2(101)+p_3(111)=(p_1+p_2+p_3)(100)+p_3(010)+(p_2+p_3)(001)$.

Man kann sagen, daß in allen Fällen die Indizes dieselben sind, aber in verschiedenartiger Permutation und zwar:

in dem Dreiecke a gilt $(q_1 q_2 q_3)$ und dabei ist $q_1 > q_2 > q_3$
„ „ „ α „ $(q_2 q_1 q_3)$
„ „ „ b „ $(q_3 q_1 q_2)$
„ „ „ β „ $(q_3 q_2 q_1)$
„ „ „ c „ $(q_2 q_3 q_1)$
„ „ „ γ „ $(q_1 q_3 q_2)$.

Natürlich ergibt auch bei weiterer Entwicklung des Komplexes im Bereiche eines jeden von diesen Teildreiecken die Anwendung derselben Operationsfolge dasselbe Resultat, das heißt gleiche Indizes mit verschiedener Permutation.

Die Permutationen spielen also in Fragen dieser Art keine Rolle; sie weisen nur auf den Dreiecksbereich hin, in welchem die betreffenden Operationen geschehen. Wir können gegebene Indizes in derjenigen Permutation annehmen, für welche die Bedingung $p_1 > p_2 > p_3$ gültig ist. Dies würde nur bedeuten, daß wir uns die betreffende Operation innerhalb des Dreiecks a vorstellen.

Wie wir gesehen haben, hat dieselbe Operation $p_1(100) + p_2(010) + p_3(001)$, in dem Bereiche des Dreiecks a ausgeführt, zu einer anderen Operation geführt, da

$$p_1(100) + p_2(110) + p_3(111) = (p_1 + p_2 + p_3)(100) + (p_2 + p_3)(010) + p_3(001).$$

Diese Operation ist also in Bezug auf (100), (010), (001) als eine kompliziertere zu betrachten, als in Bezug auf (100), (110), (111). Man kann dieselbe also auf eine um eins höhere Periode beziehen. Und in der Tat haben wir (110) = 1 (100) + 1 (010) + 0 (001) und (111) = 1 (100) + 1 (010) + 1 (001), das heißt (110) und (111) sind mit einer komplementären Additionsoperation verbunden.

Falls man also für irgendwelche $(k-1)^{te}$ Periode annimmt, daß der Strahl dieser Periode $[(p_1 - p_2)(p_2 - p_3) p_3]$ einer um eins niedrigeren Periode angehört, als der Strahl $[p_1 p_2 p_3]$ k^{ter} Periode, so gilt derselbe Ausdruck für die nächstfolgende Periode, da

$$\begin{array}{r} (p_1 - p_2)(100) \\ (p_2 - p_3)(110) \\ p_3\,(111) \\ \hline p_1 p_2 p_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{r} p_1(100) \\ p_2(110) \\ p_3(111) \\ \hline (p_1 + p_2 + p_3)(p_2 + p_3) p_3 \end{array},$$

das heißt:

$$p_1(100) + p_2(110) + p_3(111) = (p_1 + p_2 + p_3)(100) + (p_2 + p_3)(010) + p_3(001).$$

Auf diese Weise läßt sich für jede gegebenen Indizes in rekursivem Wege entscheiden, zu welcher Periode dieselben Bezug haben. Zum Beispiel (752) muß der IV. Periode angehören, da

$$(7 - 5,\ 5 - 2,\ 2) = (2,\ 3,\ 2)$$
$$(3 - 2,\ 2 - 2,\ 2) = (1,\ 0,\ 2)$$
$$(2 - 1,\ 1 - 0,\ 0) = (1,\ 1,\ 0)$$

und diese Indizes beziehen sich auf die I. Periode.

Wie erwähnt, pflegt man in dem Gebiete der zonalen Kristallographie sämtliche Operationen dieser Art durch spezielle zonale Symbole zu bezeichnen und zwar aus folgendem Grunde. In jedem Teildreieck $k\,l\,m$ höherer Perioden läßt sich die Reihenordnung der Indizes unterscheiden, indem man als den ersten k denjenigen annimmt, welcher der Strahl einer niedrigeren Periode ist, und als den zweiten l denjenigen, welcher mit k einer Strahlenebene niedrigerer Periode angehört.

Nach genügender Zerlegung der Sphäre in Teildreiecke höherer Perioden gelangt man endlich dazu, daß der gegebene Strahl entweder die Lage $k + l$. oder $l + m$, oder $m + k$, oder endlich $k + l + m$ annimmt. Diese Fälle werden respektive durch A, B, C und $\mathfrak{A}$ bezeichnet.

Wenn der Strahl $(p_1 p_2 p_3)$ der k^{ten} Periode angehört, so befindet sich derselbe innerhalb eines bestimmten Teildreiecks der $k - 1^{ten}$ Periode, und dieses Teildreieck nimmt innerhalb des Teildreiecks der $k - 2^{ten}$ Periode eine der Lagen a, α, b, β, c, γ ein. Dieses Teildreieck seinerseits nimmt innerhalb des bestimmten Teildreiecks der $k - 3^{ten}$ Periode ebenfalls eine durch diese Buchstaben charakterisierte Lage ein und so fort, bis wir endlich zum Teildreieck der II. Periode gelangen. Der Strahl kann aber nicht nur innerhalb dieses Dreiecks liegen, sondern sich auch auf einer seiner Seiten befinden.

Wenn der Strahl auf einer Seite mit A sich befindet, so wird die Frage über die Zugehörigkeit zu einem Dreieck a, α, b, β, c, γ unzweideutig beantwortet; wenn aber der Strahl auf den mit B oder C enthaltenden Seiten desselben liegt, so gehört derselbe zugleich entweder $a\,\alpha$, $a\,\gamma$, oder $b\,\beta$, $b\,\alpha$, oder endlich $c\,\gamma$, $c\,\beta$. Dementsprechend wird

entweder A oder B, oder endlich C gesetzt. Die Zusammenstellung dieser Buchstaben bildet das zonale Symbol, welches zugleich das Symbol der sukzessiven Additionsoperationen ist. Demgemäß ersieht man aus dem Symbol direkt die Zugehörigkeit des Strahles zu einer bestimmten Periode, welche eine um eins größere Zahl ist, als die Anzahl der Buchstaben des Symbols. Natürlich bilden hiervon die Strahlen der I. Periode eine Ausnahme, indem für sie besondere Buchstaben zur Anwendung gebracht sind, und zwar H für (100), D für (110) und O für (111).

Aus dem eben Gesagten ersieht man, daß der auf voriger Seite erwähnte Strahl (752) durch das zonale Symbol $A\,c\,B$ ausgedrückt wird. Der letzte Buchstabe weist darauf hin, daß sich der Strahl in der Ebene $b\,a$ befindet.

Wie gesagt, drückt A die Indizes (210) aus; der Buchstabe c weist darauf hin, daß für den Übergang zur folgenden, d. i. III. Periode, die Permutation (102) anzuwenden ist, folglich $A\,c$ die Indizes $[(1+0+2)(0+2)\,2] = (322)$ ausdrückt. Der folgende Buchstabe B weist auf Unbestimmtheit der Lösung der Frage, ob zum folgenden Übergang die Permutation b $(p_3\,p_1\,p_2)$ oder α $(p_2\,p_1\,p_3)$ zur Anwendung zu bringen ist. Nun sieht man wirklich, daß die beiden das gleiche Resultat (232) ergeben. Deswegen ist weder b noch α, sondern B gesetzt. Also ist $A\,c\,B$ $[(2+3+2)\;(3+2)\;2] = (752)$. In Summa haben wir

$$(752) = 7(100) + 5(010) + 2(001) = 2(100) + 3(110) + 2(111) = 1(110) + 0(221) + 2(321).$$

Man begreift leicht, daß direkt nach den Buchstaben B, C oder nach einer Buchstabenfolge $A\,k\,b$ oder $A\,k\,c$, wo k die Buchstaben a und α in beliebiger Anzahl und beliebiger Permutation enthält, nur die Buchstaben A, B oder C und nicht a, α, b, β, c, γ folgen können.

Zum Beispiel $B\,A = (531)$, da $B = (221)$; $C\,B = (431)$, da $C = (211)$; $C^2 = C\,C = (432)$, da $C = (211)$; $A\,b\,C = (743)$, da $A\,b = (331)$; $A\,a^2\,\alpha^2\,a\,c\,C = (47 \cdot 33 \cdot 19)$, da $A\,a^2\,\alpha^2\,a\,c = (19 \cdot 14 \cdot 14)$.

Und umgekehrt, nach dem Buchstaben $\mathfrak{A}$ können nur Buchstaben $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ und nicht A, B, C (noch $\mathfrak{A}$) folgen. Zum Beispiel $\mathfrak{A}\gamma = (632)$, $\mathfrak{A}\,\alpha\,c = (10 \cdot 4 \cdot 3)$, da $\mathfrak{A}\,\alpha = (631)$ und so fort. Dies ist schon daraus ersichtlich, daß das Erscheinen des Buchstaben $\mathfrak{A}$ jede Zweideutigkeit in der Schätzung der Lage des betreffenden Teildreiecks ausschließt.

Zwischen dem Komplex der Strahlen und der zu ihnen senkrechten Ebenen existiert eine eindeutige und vollständige Zuordnung, indem jeder Strahl mit der ihm zugeordneten Ebene in Bezug auf die Sphäre koordiniert ist.

Da alle vorangehenden Sätze auf den Winkelgrößen zwischen den Strahlen beruhen, und da diese Winkelgrößen dieselben sind für die koordinierten Ebenen, so haben alle diese Sätze gleiche Geltung auch für den Ebenenkomplex.

Aber es ist noch ein Satz von sehr allgemeiner Bedeutung aufzustellen, welcher nicht auf die Winkelgrößen, sondern auf die Streckengrößen Bezug hat.

Dieser Satz lautet:

Jedem Strahl des Komplexes gehört ein bestimmter Parameter zu, und diese Zahl kann als dessen Streckengröße betrachtet werden. Zieht man durch den Endpunkt einer solchen Strecke die zum Strahle senkrechte Ebene, so bedingt dieselbe auf sämtlichen anderen Strahlen Strecken, deren Größen den betreffenden Strahlenstrecken parametrisch gleiche Zahlen sind.

Betrachten wir zwei Strahlen p mit den Indizes $(p_1\,p_2\,p_3)$ und q mit den Indizes $(q_1\,q_2\,q_3)$; ziehen wir die zum ersten senkrechte Ebene, welche durch den Endpunkt der demselben zugehörenden Strecke $(P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + P_1 P_2 p_3^2)$ hindurchgeht. Dann bleibt nur die Streckengröße auf dem Strahle q aufzufinden, welche durch diese Ebene bedingt wird.

Die Gleichung der betreffenden Ebene ist

$$x_1 \sqrt{P_1}\, p_1 + x_2 \sqrt{P_2}\, p_2 + x_3 \sqrt{P_1 P_2}\, p_3 = 1$$

des Strahles p

$$\frac{x_1}{\sqrt{P_1}\, p_1} = \frac{x_2}{\sqrt{P_2}\, p_1} = \frac{x_3}{\sqrt{P_1 P_2}\, p_3}$$

und des Strahles q

$$\frac{x_1}{\sqrt{P_1}\, q_1} = \frac{x_2}{\sqrt{P_2}\, q_2} = \frac{x_3}{\sqrt{P_1 P_2}\, q_3}.$$

Daraus die Koordinaten des Endpunktes von p

$$x_1 = \frac{\sqrt{P_1}\, p_1}{P} \quad x_2 = \frac{\sqrt{P_2}\, p_2}{P} \quad x_3 = \frac{\sqrt{P_1 P_2}\, p_3}{P}, \quad \text{wo } P = P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + P_1 P_2 p_3^2$$

und des von q

$$x_1 = \frac{\sqrt{P_1}\, q_1}{Q_p} \quad x_2 = \frac{\sqrt{P_2}\, q_2}{Q_p} \quad x_3 = \frac{\sqrt{P_1 P_2}\, q_3}{Q_q}, \quad \text{wo } Q_p = P_1 p_1 q_1 + P_2 p_2 q_2 + P_1 P_2 p_3 q_3.$$

Also

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)_p = \frac{P}{P^2} = \frac{1}{P}$$

und

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)_q = \frac{P_1 q_1^2 + P_2 q_2^2 + P_1 P_2 q_3^2)}{Q_p^2} = \frac{Q}{Q_p^2}, \tag{10}$$

was zu beweisen war, da die letzte Zahl parametrisch gleich ist mit Q.

Aus allem Vorhergehenden ergibt sich, daß eine unendlich große Anzahl isotroper Komplexe existiert, aber im Allgemeinen ihre vollständigen Indizes irrational sind, und zwar quadratische Wurzeln von ganzen Zahlen enthalten. Unter vollständigen Indizes werden hier die Produkte $p_1\sqrt{P_1}$, $p_2\sqrt{P_2}$, $p_3\sqrt{P_1 P_2}$ verstanden.[1])

Wesentlich erscheint also die Frage, ob auch solche isotrope Komplexe vorhanden sind, deren vollständige Indizes rational sind.

Ist dies der Fall, so müssen drei Strahlen des Dreiecks der I. Periode (Grundstrahlen) gleichen Parameter besitzen, welcher als gemeinschaftlicher Faktor von selbst verschwindet. Diese Verschwindung findet aber für sämtliche höhere Perioden der Komplexentwicklung statt, da dieselbe stets zu Strahlen führt, deren Indizes durch einfache Summierung der Indizes der dadurch bestimmten Strahlen sich erhalten lassen; also in sämtlichen Strahlen

---

[1]) Von einem gewissen Standpunkte aus kann dieser Satz als selbstverständlich gelten. In der Tat ist $Q k^2 = \frac{P}{\cos^2 \alpha}$ (α — Winkel zwischen p und q) $= P(1 + t^2 \alpha) = P\left(1 + \frac{R p_2^2}{p_1^2}\right)$, wenn durch R der Parameter des zur Ebene $p\,q$ senkrechten Strahles bezeichnet wird. Also $Q k'^2 = P(p_1^2 + R p_2^2)$. Dieser Satz behauptet also, daß der Parameter Q zur Zone $P\{1 \cdot R\}$ gehört, und dies ist selbstverständlich.

des Komplexes verschwinden die irrationalen Faktoren der vollständigen Indizes als die gemeinschaftlichen.

Es braucht nicht erwähnt zu werden, daß hierzu der kubische Komplex gehört, da demselben als Grundparameter die Zahlen $\sqrt{1}$ eigen sind, welche von selbst rational sind. Überhaupt können solche Komplexe nur unter denjenigen trigonalen mesosphärischen Isoëdern sein, welchen die gleichen Parameter sämtlicher den Mittelpunkt (der ein- und umgeschriebenen Sphäre) mit den Eckpunkten verbindenden Strahlen zukommen.

Die Frage läßt sich somit durch einfache Zusammenstellung sämtlicher hierzu gehöriger Figuren lösen. Von vornherein sind aber alle diejenigen ausgeschlossen, welchen fünf-, sieben- und mehrzählige Symmetrieachsen eigen sind. Mit diesem Ausschluß bleiben nur folgende zur Berücksichtigung:[1])

1. Mesosphärisches Hexakisoktaëder. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da den betreffenden Strahlen die Parameter 1, 2 und 3 zukommen.
2. Die pyramidalen Würfel. Dieser Fall ist ausgeschlossen, da den betreffenden Strahlen die Parameter 1, 3 und 3 zukommen.
3. Oktaëder. Den Strahlen kommen die Parameter 1, 1 und 1 zu. Diese Figur ist aber die Grundfigur für den kubischen Komplex.
4. Tetraëder. Den Strahlen kommen die Parameter 3, 3 und 3 zu. Der betreffende Komplex ist aber mit dem kubischen identisch.
5. Trigonale Bipyramide. Den Strahlen dieses mesosphärischen Isoëders kommen die Parameter 3, 3 und 1 zu. Dieser Komplex $[3 \cdot 3] = [1 \cdot 3]$ ist also derjenige, welcher als hexagonal-isotrop bezeichnet wird.
6. Tetragonale Bipyramide. Der mesosphärische Vertreter dieser Reihe ist aber das reguläre Oktaëder, welcher, wie erwähnt, den kubischen Komplex bedingt.
7. Hexagonale Bipyramide. Den Strahlen dieses mesosphärischen Isoëders kommen die Parameter 3, 3 und 1 zu. Der Komplex ist also mit demjenigen der trigonalen Bipyramide identisch, das heißt hexagonal-isotrop.

In anderen mesosphärischen Isoëdern, wie in Skalenoëdern, Sphenoëdern, sind nicht alle zentralen durch die Flächenteile hindurchgehenden Ebenen Symmetrieebenen und die von zwei solchen Ebenen gebildeten Winkeln keine rationalen.

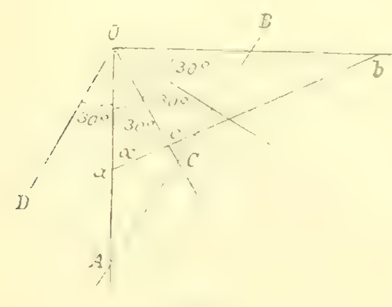


Fig. 21.

Nun wollen wir zeigen, wie sich die vollständigen Indizes des hexagonal-isotropen Komplexes rational gestalten lassen. Auf drei senkrechten Strahlen dieses Komplexes hat man die Parameter 1, 3, 3 anzunehmen. Es seien diese Strahlen OA, OB und der zu beiden senkrechte Strahl (Fig. 21). Nachdem der Komplex mit irrationalen vollständigen Indizes entwickelt worden ist, soll der erste Index durch einen anderen ersetzt werden, welcher sich auf einen Strahl mit dem Parameter 3 bezieht. Dieser Strahl ist aber der Strahl OC, welcher mit OA

[1]) Bei dieser Zusammenstellung folgen wir dem Werke des Verfassers „Über die mesosphärischen Polyëder“, wo die vollständige Ableitung derselben ausgeführt wurde (in Mémoires de l'Akad. J. des Sciences de St. Petersbourg, XIV, Nr. 1).

den Winkel 30° bildet. Es ist ganz augenscheinlich, daß nur der auf diesen Strahl sich beziehende Index zu berechnen ist, während die beiden anderen unverändert bleiben.

Wenn wir also eine beliebige Ebene des Komplexes ziehen würden, welche die Ebene des Strahles OA und OB in der Geraden acb schneidet, so bleibt nur die Strecke Oc in der Streckengröße Oa auszudrücken, da diese Größen den betreffenden Indizes umgekehrt proportional sind. Während $OA = 1$, $OB = OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nehmen wir $Oa = \frac{1}{m}$ und $Ob = \frac{1}{n\sqrt{3}}$.

Die Strecke Oc läßt sich aus dem Dreieck Oac berechnen, wo Oa und zwei anliegende Winkel bekannt sind, da $\operatorname{tang} \alpha = \frac{m}{\sqrt{3} \cdot n}$. Nun ist aus der elementaren Trigonometrie bekannt, daß:

$$Oc = x = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (Oca)} = m \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin (150 - \alpha)}.$$

Daraus läßt sich berechnen $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{m+n}$.

Schreiben wir als ersten Index denjenigen, welcher sich auf den senkrechten, als zweiten denjenigen, welcher sich auf den Strahl Ob und als dritten denjenigen, welcher sich auf den Strahl Oa bezieht, so erhalten wir eine Ebene, für welche die bezüglichen Achsenschnittstrecken $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$, die früheren irrationalen Indizes $l\sqrt{3}$, $m\sqrt{3}$, n und die neueren rationalen respektive $l\sqrt{3}$, $m\sqrt{3}$, $\frac{m+n}{2}\sqrt{3}$ oder $l, m, \frac{m+n}{2}$ sind.

Man ersieht daraus, daß die alten und neuen Indizes allein in derjenigen Zone unverändert bleiben, für welche $m = n$.

Berücksichtigt man noch, daß den beiden Strahlen OB und OC noch ein dritter OD gleich ist, welcher mit den beiden durch eine sechszählige vertikale Symmetrieachse verbunden ist, und daß für denselben die von derselben Ebene bedingte Strecke gleich $\frac{2}{\sqrt{3}(n-m)}$ ist, so erhält man als vollständiges Symbol ein viergliedriges $\left(l, m, \frac{m+n}{2}, \frac{n-m}{2}\right)$.

In der Figur 22 sind die unvollständigen irrationalen Indizes mit den respektiven vollständigen rationalen zusammengestellt. Die irrationale Komplexentwicklung ist durch punktierte Linien und die neue, rationale, durch ununterbrochene Linien angedeutet.

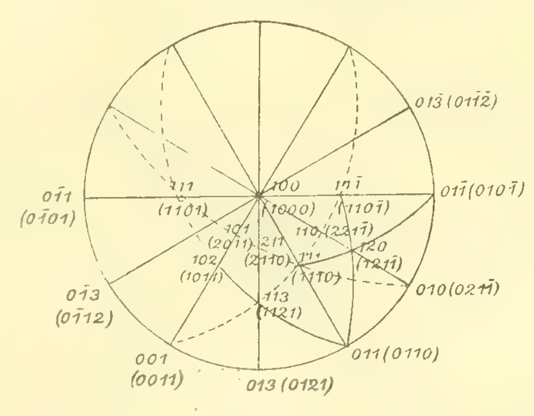


Fig. 22.

Obgleich für sämtliche Strahlen die beiden ersten Indizes unverändert (proportional) bleiben, so ändert sich doch der Entwicklungsgang vom

Grunde aus. Anstatt vier Grunddreiecke auf der Hemisphäre erhält man jetzt sechs solcher, welche vom Strahl (100) einerseits und von den Strahlen (001), (011), ($01\bar{1}$), ($00\bar{1}$), ($0\bar{1}\bar{1}$), ($0\bar{1}1$) andererseits bestimmt werden.

Bezeichnet man die alten unvollständigen Indizes durch $(p_1\, p_2\, p_3)$ und die drei ersten neuen vollständigen durch $(q_1\, q_2\, q_3)$, so hat man also die Beziehung

$$q_1 : q_2 : q_3 = 2\,p_1 : 2\,p_2 : p_2 + p_3$$

und umgekehrt:

$$p_1 : p_2 : p_3 = q_1 : q_2 : -q_2 + 2\,q_3 .$$

Für zwei zueinander senkrechte Strahlen existiert bekannterweise die Relation (Zonengleichung):

$$p_1 \sqrt{3} \cdot r_1 \sqrt{3} + p_2 \sqrt{3} \cdot r_2 \sqrt{3} + p_3 r_3 = 0 \text{ respektive } 3\,p_1 r_1 + 3\,p_2 r_2 + p_3 r_3 = 0 .$$

Für die neuen Indizes nimmt die Gleichung die folgende Form an:

$$3\,q_1 s_1 + 3\,q_2 s_2 + (2\,q_3 - q_2)(2\,s_3 - s_2) = 0 \text{ resp. } 3\,q_1 s_1 + 4\,q_2 s_2 + 4\,q_3 s_3 - 2\,(q_2 s_3 + q_3 s_2) = 0 .$$

Diese Gleichung kann man schreiben

$$q_1\,(3\,s_1) + q_2\,(4\,s_2 - 2\,s_3) + q_3\,(-2\,s_2 + 4\,s_3) = 0$$

oder

$$s_1\,(3\,q_1) + s_2\,(4\,q_2 - 2\,q_3) + s_3\,(-2\,q_2 + 4\,q_3) = 0 .$$

Die in Klammern gestellten Faktoren bezeichnet man als die Subindizes. Ersetzt man diese Faktoren einfach durch Indizes mit unten gestelltem Strich, so erhält diese Zonengleichung die Form:

$$q_1 \underline{s_1} + q_2 \underline{s_2} + q_3 \underline{s_3} = 0 \text{ respektive } \underline{q_1}\, s_1 + \underline{q_2}\, s_2 + \underline{q_3}\, s_3 = 0 .$$

Denken wir, daß die beiden Strahlen q und q' zum Strahl s senkrecht sind, so erhalten wir

$$q_1 \underline{s_1} + q_2 \underline{s_2} + q_3 \underline{s_3} = 0$$

und

$$q_1' \underline{s_1} + q_2' \underline{s_2} + q_3' \underline{s_3} = 0 ;$$

folglich:

$$s_1 : \underline{s_2} : s_3 = \begin{vmatrix} q_2 & q_3 \\ q_2' & q_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_3 & q_1 \\ q_3' & q_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1' & q_2' \end{vmatrix} .$$

Die Subindizes lassen sich also direkt durch diese Operation berechnen, und dann mit Anwendung von

$$s_1 : s_2 : s_3 = 2\,\underline{s_1} : 2\,s_2 + s_3 : s_2 + 2\,\underline{s_3} ,$$

welche sich als umgekehrte aus der oben angedeuteten Gleichung

$$\underline{s_1} : \underline{s_2} : \underline{s_3} = 3\,s_1 : 4\,s_2 - 2\,s_3 : -2\,s_2 + 4\,s_3$$

ergibt, lassen sich die Indizes der Zone berechnen.

Zum Beispiel für die Subindizes der Zone von zwei Strahlen ($121\bar{1}$) und (2121) erhält man:

$$\underline{s_1} : \underline{s_2} : \underline{s_3} = \begin{vmatrix} 121 \\ 212 \end{vmatrix} = 3\,(10\bar{1}) .$$

Folglich $\qquad s_1 : s_2 : s_3 = 2 \cdot 1 : 2 \cdot 0 + \bar{1} : 0 + 2 \cdot \bar{1} = 2 : \bar{1} : \bar{2} .$

Also die Zonenachse ist ($2\bar{1}\bar{2}1$) und so fort.

Unter allen isotropen Komplexen zeichnen sich also zwei besonders, der kubische und der hexagonale, dadurch aus, daß ihnen trigonale mesosphärische Isoëder — das Oktaëder und die hexagonale Bipyramide — zu Grunde liegen, deren Achsen wirkliche Symmetrieachsen sind und zugleich gleiche Parameter besitzen — 1 für den kubischen und 3 für den hexagonalen Komplex — und daß infolgedessen ihre sämtliche Strahlen durch vollständige rationale Indizes sich ausdrücken lassen.

Die übrigen trigonalen mesosphärischen Isoëder mit den Achsen, welche gleiche Parameter besitzen, können nur Polyëder von unendlich hohem Grade sein.

Man hätte sagen können, daß nur diesen beiden Komplexen reale Bedeutung zukommen kann, weil reale Objekte von unendlich hohem Grade nicht gut denkbar sind. Und in der Tat hat die zonale Kristallographie den erfahrungsmäßigen Beweis erbracht, daß in der Natur, in dem Reiche der Kristalle, nur diese beiden isotropen Komplexe vertreten sind und zugleich als typische Vertreter der unendlich veränderlichen Objekte vorkommen, so daß jeder natürliche Kristall entweder als nach bestimmten Gesetzen deformierter kubischer oder hexagonaler betrachtet werden kann. Demgemäß wurde in der zonalen Kristallographie die Einteilung sämtlicher Kristalle in zwei Typen — den kubischen und den hypohexagonalen — konstatiert.

Jetzt können wir die Gesamtheit derjenigen Parameter auffinden, welche diesen beiden Komplexen zukommen.

Es läßt sich der Beweis erbringen, daß in dem kubischen Komplex die Zahlen der Form $8n - 1$ und in dem hexagonalen Komplex die Zahlen von der Form $2 + 3n$ als Parameter nicht vorkommen.

Zuerst ist der Hilfssatz zu beweisen, daß die Zahl $a^2 + 1$ nicht durch 3 teilbar sein kann.

Wäre dies der Fall gewesen, so hätte a nicht durch 3 teilbar sein können, also entweder nur die Zahl $3c + 1$ oder $3c - 1$. Bei der ersten Annahme hätten wir gehabt, daß die Zahl $(3c + 1)^2 + 1 = 3(3c^2 + 2c) + 2$, bei der zweiten Annahme, daß die Zahl $(3c - 1)^2 + 1 = 3(3c^2 - 2c) + 2$ durch 3 teilbare Zahlen sind, was aber unmöglich ist.

Wie wir im I. Teile (S. 34) gesehen haben, sind sämtliche Zahlen des Komplexes $\{1, 1\}$ Produkte von der Form $(4a_1 + 1)(4a_2 + 1)(4a_3 + 1)\ldots$ oder noch mit dem Faktor 2 versehen. Diese Produkte sind aber selbst von der Form $(4c + 1)$. Wäre also in dem Komplexe [11] eine Zahl von der Form $8n - 1$ vertreten gewesen, so hätten wir die Gleichungen

entweder $$a^2 + (4c + 1) = 8n - 1,$$

oder $$a^2 + 2(4c + 1) = 8n - 1$$

gehabt.

Daraus können die Gleichungen gefolgert werden

entweder $$a^2 = 2(4n - 2c - 1),$$

oder $$a^2 = 4(2n - 2c - 1) + 1 \text{ respektive } (a + 1)(a - 1) = 4(2k - 1).$$

Die erste Gleichung ist von vornherein als unmögliche ausgeschlossen. Aber auch die letzte Gleichung ist unmöglich. In der Tat ist für dieselbe die Annahme, es sei a eine gerade Zahl, ausgeschlossen. Wäre aber a eine ungerade Zahl, so ist eine von den

Zahlen $(a+1)$ und $(a-1)$ nur mit 2, und die andere durch 4 (in partikularen Fällen sogar mit 8, 16 u. s. w., das heißt überhaupt durch 2^k, wo $k>1$) teilbar. Daraus ersieht man, daß die Zahlen der beiden Teile der geschriebenen Gleichung nicht die gleichen sein können[1]).

Der Komplex $[1 \cdot 3] = [1 \cdot 3\,(1,1)]$ enthält als Parameter die Zahlen von der Form $a^2 + 3\,(1+4c)$ respektive $a^2 + 6\,(1+4c)$. Soll unter diesen Zahlen auch die Zahl $2+3n$ vorkommen, so hätten wir die Gleichheiten

$$a^2 + 1 = 3k \quad \text{respektive} \quad a^2 + 4 = 3k$$

gehabt.

Nun sieht man, daß die letzte Gleichheit nur eine spezielle Form der ersteren ist; ist die erste unmöglich, so gilt dasselbe auch für die zweite. Die Unmöglichkeit der ersten wurde aber durch den oben aufgestellten Satz festgestellt.

Derselbe Beweis läßt sich aber auf direktem Wege erhalten. Wäre die Gleichheit

$$p_1^2 + 3p_2^2 + 3p_3^2 = 2 + 3n$$

eine mögliche, so wäre dasselbe auch für die Gleichheit

$$3\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 2\,(p_1^2 + 1) + 3k$$

der Fall. Die letzte Gleichheit ist aber unmöglich, da $p_1^2 + 1$ nicht durch 3 teilbar ist.

Wir haben im Vorhergehenden die quadratischen Faktoren unberücksichtigt gelassen. Der Beweisgang ändert sich aber nicht wesentlich, wenn auch diese Faktoren mit in Betracht gezogen werden.

Für den kubischen Komplex erhalten wir anstatt der zweiten obigen Gleichheit die Gleichheit

$$a^2 + 2\,(4c+1) = (8n-1)\,d^2$$

und daraus

$$a^2 + d^2 = 2\,[4\,(n\,d^2 - c) - 1].$$

Der erste Teil der Gleichheit ist der Zahlenkomplex $\{1 \cdot 1\}$. Derselbe enthält aber ausschließlich die Faktoren 2 und $(4c+1)$, kann also den Faktor $4\,(n\,d^2 - c) - 1$ nicht enthalten.

Für den hexagonalen Komplex erhalten wir die Gleichheit

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 = (2+3n)\,d^2$$

respektive

$$3\,(a^2 + b^2 + c^2) = 3\,n\,d^2 + 2\,(c^2 + d^2).$$

Nun aber enthält der Zahlenkomplex $(c^2 + d^2)$ respektive $\{1, 1\}$ den Faktor 3 nicht, und die Gleichheit ist somit eine unmögliche.

Jetzt wollen wir die beiden Zahlenkomplexe entwickeln.

Diese Entwicklung kann, analog dem, was im ersten Teile ausgeführt, durch sukzessive Addition der Indizes nach Perioden geschehen. Aber der kürzere Weg ist direkt die Reihe $\{1, 1\}$ anzugeben, und derselben die Reihe a^2 hinzuzufügen.

---

[1]) In der Zeitschrift für Kristallographie 40, 340 wurde der Beweis auf anderem Wege erbracht.

Dann erhalten wir folgende Tabelle.

Dritter Index	00	01	11	02	12	22	03	13	23	04	14	33	24	34	15	25	44	35	06	16	26	45	36	07	17 55	46
	Zwei erste Indizes																									
0	0	1	2	4	5	8	9	10	13	16	17	18	20	25	26	29	32	34	36	37	40	41	45	49	50	52
1	1	2	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	4	5	6	8	9	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	9	10	11	13	14	17	18	19	22	—	—	27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	16	17	18	20	21	24	25	26	29	32	33	34	36	—	—	—	48	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	25	26	27	29	30	33	34	35	38	41	42	43	45	50	51	54	57	59	—	—	—	66	—	—	75	—
6	36	37	38	40	41	44	45	46	49	52	53	54	56	61	62	65	68	70	72	73	76	77	81	—	86	88
7	49	50	51	53	54	57	58	59	62	65	66	67	69	74	75	78	81	83	85	86	89	90	94	98	99	
8	64	65	66	68	69	72	73	74	77	80	81	82	84	89	90	93	96	98								
9	81	82	83	85	86	89	90	91	94	97	98	99														

Um Wiederholungen zu vermeiden, wurden hier nur solche dritte Indizes berücksichtigt, welchen kleinere bis gleiche und keineswegs größere Zahlen unter den beiden ersten Indizes entsprechen.

Vergleichen wir die auf diese Weise erhaltene Zahlenreihe mit der vollständigen Reihe der Parameterzahlen bis 100:

1, 2, 3, 5, 6, **7**, 10, 11, 13, 14, **15**, 17, 19, 21, 22, **23**, 26, 27, 29, 30, **31**, 33, 34, 35, 37, 38, **39**, 41, 42, 43, 46, **47**, 51, 53, **55**, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 66, 67, 69, 70, **71**, 73, 74, 77, 78, **79**, 82, 83, 85, 86, **87**, 89, 91, 93, 94, **95**, 97,

so finden wir, daß unter den Parameterzahlen des kubischen Komplexes ausschließlich und allein die Zahlen der Form $8n - 1$ nicht vorkommen. Diese Zahlen sind in dieser Reihe fett gedruckt.[1])

Ermitteln wir auf analoge Weise die vollständige Zahlenreihe für den hexagonalen Komplex $[1 \cdot 3] = [1 \cdot 3 \{1, 1\}]$.

Dazu läßt sich folgende Tabelle zusammenfassen:

[1]) Für den Komplex $[[1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1]]$ des vierdimensionalen Raumes, welcher sich natürlich auch in der Form $\{1 [11]\}$ darstellen läßt, kann man also sagen, daß in demselben alle möglichen Parameterzahlen vertreten sind, was auch aus dem längst bekannten Satze der Zahlentheorie folgt, nach welchem aus vier ganzen Quadraten jede ganze Zahl zusammengesetzt werden kann.

Zwei erste Indizes

Dritter Index	00	01	11	02	12	22	03	13	23	04	14	33	24	34	15	25	44	35	06	16	26	45	36	07	17 55
0	0	3	6	12	15	24	27	30	39	48	51	54	60	75	78	87	96	102	108	111	120	123	135	147	150
1	1	4	7	13	16	25	28	31	40	49	52	55	61	76	79	88	97	103	109	112	121	124	136	148	
2	4	7	10	16	19	28	31	34	43	52	55	58	64	79	82	91	100	106	112	115	124	127	139		
3	9	12	15	21	24	33	36	39	48	57	60	63	69	84	87	96	105	111	117	120	129	132	144		
4	16	19	22	28	31	40	43	46	55	64	67	70	76	91	94	103	112	118	124	127	136	139			
5	25	28	31	37	40	49	52	55	64	73	76	79	85	100	103	112	121	127	133	136	145	148			
6	36	39	42	48	51	60	63	66	75	84	87	90	96	111	114	123	132	138	144	147					
7	49	52	55	61	64	73	76	79	88	99	100	103	109	124	127	136	145								
8	64	67	70	76	79	88	91	94	103	112	115	118	124	139	142										
9	81	84	87	93	96	105	108	111	120	129	132	135	141												
10	100	103	106	112	115	124	127	130	139	148															
11	121	124	127	133	136	145	148																		

Vergleichen wir die auf diese Weise erhaltene Zahlenreihe mit der vollständigen Reihe der Parameterzahlen bis 150

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, **11**, 13, **14**, 15, **17**, 19, 21, 22, **23**, **26**, 27, **29**, 30, 31, 33, 34, **35**, 37, **38**, 39, **41**, 42, 43, 46, **47**, 51, **53**, 55, 57, 58, **59**, 61, **62**, **65**, 66, 67, 69, 70, **71**, 73, **74**, **77**, 78, 79, 82, **83**, 85, **86**, 87, **89**, 91, 93, 94, **95**, 97, **101**, 102, 103, 105, 106, **107**, 109, **110**, 111, **113**, 114, 115, 118, **119**, **122**, 123, 127, 129, 130, **131**, 133, **134**, **137**, 138, 139, **140**, 141, 142, **143**, 145, **146**, 147, **149**,

so finden wir, daß unter den Parameterzahlen des hexagonalen Komplexes ausschließlich und allein die Zahlen der Form $2 + 3n$ nicht vorkommen. Diese Zahlen sind in dieser Reihe fett gedruckt.

Der letzten Tabelle können wir uns bedienen, um die Parameter für jede gegebenen Indizes direkt abzulesen. In derselben sind die unvollständigen (S. 71), welche wir von den richtigen Symbolen mit Klammern und Parenthesen unterscheiden wollen.

Also aus der zweiten Kolonne ersehen wir, daß den Indizes

{100} = (1000) und {010} = (0211) der Parameter 3,
{101} = (2011) „ {011} = (0110) „ „ 1,
{102} = (1011) „ {012} = (0231) „ „ 7,
{103} = (2033) „ {013} = (0121) „ „ 3,
{104} = (1022) „ {014} = (0253) „ „ 19,
{105} = (2055) „ {015} = (0132) „ „ 7 u. s. w.

entspricht.

Die ternäre quadratische Form

$$Pc^2 = P_1 p_1^2 + P_2 p_2^2 + P_1 P_2 p_3^2,$$

welche den vollständigen Zahlenkomplex ausdrückt, drückt zugleich die Gesamtheit der Punkte eines Raumgitters, dessen parallelepipedische Maschen rechteckige Parallelepipede mit den Kantenlängen $\sqrt{P_1}$, $\sqrt{P_2}$, $\sqrt{P_1 P_2}$ sind, aus.

Nun wird in der Lehre von den regulären Punktsystemen (zuerst von Frankenheim und Bravais) der Beweis erbracht, daß, wenn zu dem gegebenen Raumgitter noch die ihm parallelen Raumgitter hinzugefügt werden, deren Punkte entweder a) die Mittelpunkte eines Systems von rechtwinkligen Flächen oder b) die Mittelpunkte aller drei Systeme dieser Flächen der parallelepipedischen Maschen, oder c) die Mittelpunkte der parallelepipedischen Maschen selbst ohne oder endlich d) mit den Mittelpunkten der Kanten desselben einnehmen, neue Raumgitter entstehen. Der Beweis wurde eigentlich aus allen isotropen Komplexen allein für den kubischen erbracht; der Beweisgang zeichnet sich aber durch solche Einfachheit aus, daß es hinreichend ist zu erwähnen, daß derselbe ebenfalls für alle isotropen Komplexe gültig ist.

In der Lehre von der regulären Raumteilung[1]) wird der Beweis erbracht, daß diesen verschiedenen Raumgittern verschiedene reguläre parallele Raumteilungen resp. Paralleloëder entsprechen, und zwar jedem solchen Punktsystem ohne hinzugefügte Raumgitter — die Triparalleloëder, den Raumgittern a) die Tetraparalleloëder, den Raumgittern b) die Heptaparalleloëder und endlich den Raumgittern c) die Hexaparalleloëder.

Beschränken wir jetzt unsere Betrachtungen auf die zwei besonderen Komplexe, den kubischen und den hexagonalen.

Die Symmetrieverhältnisse des ersten sind nur mit den Raumgittern 1) der einfachen, 2) der dem Falle b) und 3) der dem Falle c) entsprechenden kompatibel, und die Symmetrieverhältnisse des zweiten nur mit dem Raumgitter a) kompatibel. Also dem kubischen Komplex sind die Tri-, Hexa- und Heptaparalleloëder zugeordnet, welche sich durch dieselben wirklichen Symmetrieelemente auszeichnen, die für diesen Komplex charakteristisch sind, und dem hexagonal-isotropen System sind allein die Tetraparalleloëder zugeordnet mit den für diesen Komplex charakteristischen wirklichen Symmetrieelementen.

Alle übrigen Paralleloëder, für welche diese Übereinstimmung in wirklichen Symmetrieelementen derselben mit denen der Komplexe nicht besteht, bezeichnet man als die anomalen.

Nun führt die Anwendung der Syngonielehre auf die Lehre über die Raumgitter die folgenden neuen Definitionen und Sätze ein.

Ein rechtwinkliges Raumgitter, dessen parallelepipedische Maschen durch rechteckige Flächen begrenzt sind, und in deren Flächen die Seiten sich wie die Quadratwurzeln von ganzen Zahlen verhalten, wird das isotrope genannt.

Es gibt unendlich viele isotrope Raumgitter.

Wenn wir ein isotropes Raumgitter, dessen Seitenkanten die Parameter P_1, P_2, $P_1 P_2$ sind, in demselben Punktsystem durch ein anderes ersetzen, dessen Seitenkanten wieder drei zueinander senkrechte Strahlen sind mit denselben Parameter P_1, P_2 und $P_1 P_2$ (deren zugeordnete Strecken aber von anderer absoluter Größe sind), so erhalten wir ein anderes Raumgitter, welches dem ersteren wesentlich gleich ist, indem seine Kantenstrecken durch proportionale Strecken ersetzt sind, und dabei bildet dieses Raumgitter nur einen integrierenden Teil des ersten.

---

[1]) Am umständlichsten in den Abhandlungen der K. Bayer. Akademie der Wiss., II. Kl., XX. Bd., II. Abteil., 1900. S. 32 ff.

Dieser Ersatz ist aber auf unendlich viele Weise auszuführen.

Bezeichnen wir die drei Hauptstrahlen des ersten Raumgitters durch r_1, r_2, r_3 respektive mit den Parametern P_1, P_2, $P_1 P_2$, so können wir zum Beispiel die Strahlen r_1 und r_2 in ihrer Ebene um r_3 drehen, bis r_1 mit einem Strahl r_1' sich deckt, welcher sich in derselben Ebene durch denselben Parameter P_1 auszeichnet (und wir wissen, daß in jeder Strahlenebene unendlich viele solcher gleichen Strahlen vorhanden sind); dann muß notwendig auch der Strahl r_2 mit einem ihm gleichen Strahl r_2' mit dem Parameter P_2 zur Deckung kommen. Jetzt führen wir noch eine solche Drehung der Strahlen r_2' und r_3 in ihrer Ebene um den Strahl r_1' aus, und erhalten eine neue Kombination zueinander senkrechten Strahlen r_1', r_2'', r_3' mit denselben respektiven Parametern P_1, P_2 und $P_1 P_2$, und diese drei Strahlen können wir also als Hauptstrahlen des neuen, aber gleichen Raumgitters annehmen.

Überhaupt können wir den Strahl r_1 durch einen beliebigen ihm gleichen Strahl r_1' des Komplexes ersetzen und als r_2' einen sonst beliebigen, aber zu r_1' senkrechten Strahl auswählen, dessen Parameter gleich P_2 ist; dann muß als r_3' derjenige Strahl angenommen werden, welcher zu beiden Strahlen r_1' und r_2' senkrecht steht. Da der Komplex derselbe ist, so muß r_3' den Parameter $P_1 P_2$ besitzen.

Also jedes isotrope Raumgitter enthält in sich unendlich viele ihm gleiche aber nicht parallele isotrope Raumgitter.

Im Gegensatz zu ebenen Netzen enthält jedes Raumgitter auch unendlich viele Systeme ihm ungleicher isotroper Raumgitter in sich.

Denken wir uns nun, daß um jeden Punkt eines isotropen Raumgitters gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit eine Sphäre wächst, deren Mittelpunkt dieser Punkt ist, bis endlich unendlich viele Sphären zugleich zur Berührung kommen, aber in dem frei gebliebenen Raume mit derselben Geschwindigkeit fortwachsen; dann entsteht zuletzt in dem unbegrenzt gedachten Raume ein unendliches System von Polyëdern, welche als Paralleloëder bezeichnet wurden, da in denselben notwendigerweise die Flächen in die gleichen und parallelen Paare sich teilen lassen.

Daß diese Polyëder wirklich Polyëder und dabei Paarflächner[1]) sind, folgt daraus, daß bei diesem Sphärenwachstum sich die ebenen Flächen ausbilden, welche zu den die nächstliegenden Punkte verbindenden Geraden senkrecht stehen und durch deren Mittelpunkte hindurchgehen.

Daß dieselben wirklich Paralleloëder sind, folgt daraus, daß durch sie der unbegrenzt gedachte Raum in gleiche und parallele Bereiche regulär geteilt wird. Zugleich sind diese Paralleloëder konvexe Polyëder.

Nun wird in der Lehre von der regulären Raumteilung wirklich der Beweis erbracht, daß solche Paralleloëder nur Tri-, Tetra-, Hepta- und Hexaparalleloëder sein können. Wie wir gesehen haben, gehören dazu vier verschiedene Arten von Raumgittern, welche wir als solche I., II., III. und IV. Art bezeichnen können.

Es sei noch erwähnt, daß hier von den primitiven und einfachen Parallelogonen die Rede ist.[2])

[1]) Unter Paarflächner wird ein Polyëder verstanden, dessen Flächen paarweise gleich und parallel sind (gleichgültig gerade oder umgekehrt parallel). Elemente der Gestaltenlehre § 69.

[2]) Das primitive, das heißt das Inversionszentrum besitzende Paralleloëder (Elemente der Gestaltenlehre § 76). Das primitive Paralleloëder wird als das einfache bezeichnet, wenn in demselben parallele Flächen nur paarweise auftreten; sonst heißt es ein zusammengesetztes (ebenda § 76).

Alles zusammengefaßt, ergibt sich, daß jedem isotropen Raumgitter I. Art die Triparalleloëder zukommen, welche mit den parallelepipedischen Maschen desselben identisch sind.

Jedem isotropen Raumgitter II. Art kommen bestimmte Tetraparalleloëder zu.

Jedem isotropen Raumgitter III. Art kommen bestimmte Hepta- und demjenigen IV. Art bestimmte Hexaparalleloëder zu.

Bekanntlich gehören die Paralleloëder zu derjenigen Abteilung der Polyëder, welche als die Zonoëder abgegliedert werden.[1])

Nun läßt sich der Satz aufstellen, nach welchem sämtliche zentrale, zu primitiven Zonenachsen senkrechte Schnittfiguren der einfachen isotropen Paralleloëder einfache isotrope Parallelogone sind.

Daß diese Schnittfiguren Parallelogone sind, wurde schon früher erkannt[2]). Daß aber diese Schnittfiguren isotrope sind, folgt daraus, daß die respektiven Schnitte des Raumkomplexes isotrope ebene Komplexe sind.

Aber durchaus nicht alle diese Schnittfiguren stellen normale Parallelogone dar.

Dies ist für das normale Triparalleloëder des kubischen und für das normale Tetraparalleloëder des hexagonal-isotropen Komplexes, ebenso wie für sämtliche Schnittfiguren des normalen Hexaparalleloëders des kubischen Komplexes der Fall. Die Schnittfiguren aber des normalen Heptaparalleloëders des kubischen Komplexes sind die anomalen Triparallelogone.

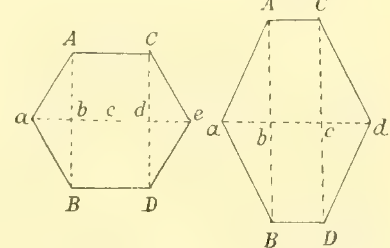


Fig. 23.

Dies ist schon daraus ersichtlich, daß der ebene Schnittkomplex des Heptaparalleloëders den Parameter 2 und nicht 3 besitzt. Übrigens ist dies direkt daraus zu schließen, daß in der zentralen Schnittfigur des Heptaparalleloëders die Diagonale ad des Triparallelogons durch zwei vertikale AB und CD in drei gleiche Strecken ab, bc, cd geteilt wird, während im regulären Sechsecke dieselbe Diagonale durch AB und CD in ungleiche Strecken $ab = de$, und $bd = bc + cd = ab + de$ geteilt wird. Folglich kann das erste Sechseck durch keine homogene Deformation in das reguläre Sechseck verwandelt werden.

Die ebenen Schnittkomplexe des normalen Triparalleloëders besitzen sämtlich den Parameter 1.

Der ebene, zur Achse [1000] senkrechte ebene Schnittkomplex des normalen Tetraparalleloëders besitzt den Parameter 3, während drei zu derselben Achse parallele ebene Schnittkomplexe derselben Figur durch die senkrechten Strahlen $\{3 \cdot 3\}$ bestimmt sind, folglich den Parameter 1 besitzen.

[1]) Die primitive Zone eines Polyëders heißt eine ununterbrochene Flächenreihe, deren jede zwei nächste Flächen sich in parallelen Kanten schneiden (Kantenrichtung = Zonenachse). Das Zonoëder ist ein Polyëder, deren sämtliche Flächen sich in primitiven Zonen verbinden (Elemente der Gestaltenlehre § 65).

[2]) Elemente der Gestaltenlehre § 82.

Endlich besitzen alle sechs ebenen Schnittkomplexe des normalen Hexaparalleloëders den Parameter 3.

Die übrigen Schnitte der normalen Paralleloëder, außer den erwähnten zentralen, sind die Parallelogone höherer Ordnung und können wieder als die isotropen von anderen unterschieden werden.

Jetzt kehren wir uns den nicht isotropen rationalen Komplexen zu. Da jeder rationale ebene Schnitt eines solchen, wie in dem I. Teile bewiesen wurde, in der Verteilung der Komplexstrahlen seinen Ausdruck in einer bestimmten Ellipse findet, so folgt daraus, daß die Verteilung der Strahlen im Raumkomplexe durch ein bestimmtes Ellipsoid, Syngonie-ellipsoid, ausgedrückt wird.

Die zonalen Verhältnisse für die isotropen und nicht isotropen Komplexe bleiben dieselben. Dies folgt daraus, daß die Strahlen aller Komplexe durch eindeutige Projektivität verbunden sind, was in gleichen (unvollständigen) Indizes seinen Ausdruck erhält; die zugeordneten Strahlen, welche im isotropen Komplex tautozonal sind, verbleiben tautozonal auch in nicht isotropen, so daß der Gang der Entwicklung des Komplexes durch sukzessives Addieren der Indizes derselbe verbleibt für alle Komplexe und durch ganz analoge geometrische Operation zu Stande kommt, und gerade diese Operation bestimmt die zonalen Verhältnisse des Komplexes.

Nun ist diese kristallographische Projektivität, welche mit der Affinität übereinstimmt, gleichbedeutend mit dem System der homogenen Deformationen, für welche die Bedingungen gelten, daß die Ebenen und Geraden vor der Deformation als solche auch nach der Deformation verbleiben; die parallelen Geraden und Ebenen verbleiben auch nach der Deformation parallel; jede Punktreihe in beliebiger Richtung auch nach der Deformation in allen ihren Teilen proportional (ähnlich).

Wenn also vor der Deformation als Ausdruck der Verteilung der Strahlen eine Sphäre galt, welche wir als in einem Würfel oder mesosphärischen hexagonalen Prisma eingeschrieben denken, so verwandelt sich nach der Deformation der Würfel in ein beliebiges Parallelepipedon, aus dem so spezifizierten Prisma in eines von allgemeineren Charakter, und die in ihnen eingeschriebenen Sphären in Ellipsoide, welche aber in dem betreffenden Parallelepipedon und Prisma eingeschrieben verbleiben.

Alle Kombinationen von drei zueinander senkrechten Vektoren werden jetzt zu Kombinationen der konjugierten Vektoren. Der Begriff des Parameters verliert jetzt seine Bedeutung, und anstatt dessen verbleibt nur von Bedeutung der Begriff des Vektors mit der jedem Strahle zugeordneten Strecke (Modulus). Alle kongruenten Punktreihen der isotropen Raumgitter verbleiben als kongruente Punktreihen, und dabei wird die Punktdistanz dieser Reihe durch die Strahlenstrecken bestimmt. Das Produkt der Strecken dieser koordinierten Vektoren wird jetzt veränderlich, aber dasselbe, multipliziert mit der Sinusfunktion des von den koordinierten Vektoren gebildeten Trigonoëders bildet eine konstante Größe, welche der Größe des Volums des von den Vektoren bedingten Parallelepipedon gleich ist. Wenn wir als homogene Deformationen allein das System von Verschiebungen zur Anwendung bringen, so kann man sagen, daß diese Größe derjenigen des Volumens des rechtwinkligen Parallelepipedon der isotropen Komplexe gleich ist, weil die Verschiebungen die Volumenelemente unveränderlich lassen.

Die Gleichungen dieses Syngonieellipsoides lassen sich direkt aufstellen auf Grund derjenigen Eigenschaft desselben, daß seine Hauptachsen die einzigen konjugierten senkrechten Geraden sind. Dazu sind die Projektivitätsgleichungen anzuwenden, welche nach dem Berechnungssystem des Verfassers zur Bestimmung der projektiven Indizes dienen[1]).

In einfachster Form sind diese Gleichungen für die Berechnung der Flächenindizes:

$$\frac{p_1'}{\dfrac{p_2'}{p_3'}} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{\dfrac{a_4 p_2 + a_5 p_2}{p_3}}$$

und für die Berechnung der Kantenindizes:

$$\frac{r_1'}{\dfrac{r_2'}{r_3'}} = \frac{a_4 r_1}{\dfrac{- a_2 r_1 + a_1 r_2}{(a_2 a_5 - a_3 a_4) r_1 - a_1 a_5 r_2 + a_1 a_4 r_3}}.$$

Für die senkrechten Flächen und Kanten haben wir die Gleichung:

$$p_1' : p_2' : p_3' = r_1' : r_2' : r_3'.$$

Speziell für die konjugierten haben wir außerdem:

$$p_1 : p_2 : p_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

Folglich bestehen für die Achsen (d_1, d_2, d_3) der Syngonieellipsoide die Gleichungen

$$\frac{a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3}{\dfrac{a_4 d_2 + a_5 d_3}{d_3}} = \frac{a_4 d_1}{\dfrac{- a_2 d_1 + a_1 d_2}{(a_2 a_5 - a_3 a_4) d_1 - a_1 a_5 d_2 + a_1 a_4 d_3}}$$

und gerade diese Gleichuug ist die gesuchte charakteristische Gleichung für das Syngonieellipsoid.

Da in diesen Gleichungen die Koeffizienten der Projektivitätsgleichungen a_i im Allgemeinen irrationale Zahlen sind, so ergibt die Auflösung dieser Gleichungen irrationale Werte für d. Also im Allgemeinen, das heißt für die trikline Syngonie, sind die Strahlen, welche die Ellipsoidachsen darstellen, nur durch irrationale Indizes ausdrückbar.

Diese Schlußfolgerung ist mit derjenigen identisch, nach welcher in triklinen Komplexen drei senkrechte rationale, das heißt dem Komplexe zugehörige Strahlen unmöglich sind. Und in der Tat, wären solche vorhanden gewesen, so hätten wir in den drei senkrechten Schnittebenen des Komplexes orthogonale Zonen (rhombische ebene Strahlenkomplexe) gehabt, und dies wäre keineswegs als allgemeiner Fall zu bezeichnen.

Noch zweckmäßiger wäre es die Komplexe als veränderliche zu betrachten, insofern diese Veränderlichkeit mit dem Vorhandensein der bestimmten wirklichen Symmetrieelemente kompatibel ist. In dieser Auffassung wäre aber das Vorhandensein der Symmetrieelemente als eines speziellen Falles abzusondern. Dann hätten wir sagen können, daß von Belang nicht die zufällig erscheinenden rechten Winkel, sondern solche sind, welche als die notwendigen Folgerungen der Annahme der Symmetrieelemente auftreten.

---

[1]) IV. Analytisch-kristallographische Studie. Einleitung.

Dann würden wir folgende spezielle Fälle unterscheiden können:

1. Es gibt keine wirklichen Symmetrieelemente. Natürlich ist im Komplexe selbst stets ein Inversionszentrum vorhanden. In diesem Falle sind keine notwendigen Bedingungen dafür vorhanden, daß die Ellipsoidachsen rational sind. Sie sind also alle als irrationale Strahlen anzunehmen. Zugleich gibt es keine gleiche Strahlen, das heißt solche, welche notwendigerweise zur Deckung kommen, wenn wir den Strahlenkomplex in anderer Orientierung mit sich selbst zur Deckung bringen, da jetzt überhaupt eine solche Deckung ausgeschlossen ist. Alle Komplexstrahlen sind somit singuläre.

Diese Syngonieart wird als die trikline bezeichnet.

In diesen Strahlenkomplexen sind sämtliche Zonen schiefe.

2. Es gibt eine zweizählige Symmetrieaxe. Da zugleich das Inversionszentrum notwendig vorhanden ist, so folgt daraus, daß auch die resultierende, zur Symmetrieachse senkrechte, Symmetrieebene notwendig vorhanden ist.

In diesem Falle muß notwendigerweise eine der Ellipsoidachsen diese Symmetrieachse sein, und die senkrechte Symmetrieebene ist die Ebene der beiden anderen Ellipsoidachsen.

Diese Ebene ist zugleich diejenige besondere Ebene, in welcher sämtliche Strahlen singuläre sind. Außerdem ist natürlich die Symmetrieachse, welche allein vorhanden ist und zu dieser Ebene senkrecht steht, ebenfalls singulär. Sämtliche andere Strahlen sind paarweise einander gleich, da sie zur Deckung kommen, wenn man den Komplex selbst durch die diesem zukommende symmetrische Operation zur Deckung bringt.

Diese Syngonieart wird als die monokline bezeichnet.

Da in diesem Falle eine Ellipsoidachse notwendigerweise rational ist, so können wir derselben rationale Indizes zuschreiben. Nehmen wir für dieselbe die Indizes [010] an, so erhalten wir für die Koeffizienten der Projektivitätsgleichungen die Bedingungen $a_2 = 0$ und $a_5 = 0$, und dann reduziert sich die Gleichung der Ellipsoidachsen zu:

$$\frac{a_1 d_1 + a_3 d_3}{a_4 d_1} = \frac{a_4 d_2}{a_1 d_2} = \frac{d_3}{-a_3 a_4 d_1 + a_1 a_4 d_3}.$$

Da für die Indizes $(d_1 d_2 d_3)$ nur ihr Zahlenverhältnis in Rücksicht kommt, so ist es erlaubt, eine dieser Zahlen, z. B. d_3, als Einheit anzunehmen, falls dieselbe nicht gleich Null ist.

Dann erhalten wir zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden anderen Indizes

$$(a_1 d_1 + a_3)(-a_3 a_4 d_1 + a_1 a_4) = a_4 d_1$$

und

$$a_4^2 d_1 d_2 = a_1 (a_1 d_1 + a_3) d_2 = (a_1^2 d_1 + a_1 a_3) d_2.$$

Die Auflösung der ersten Gleichung als quadratische in Bezug auf d_1 gibt zwei Werte d_1' und d_1'', und dabei stets reelle, da:

$$d_1 = \frac{a_1^2 - a_3^2 + 1 \pm \sqrt{(a_1^2 - a_3^2 + 1)^2 + 4}}{2 a_1 a_3}.$$

Setzen wir diese Werte in die zweite Gleichung, so erhalten wir, daß die Summe $(a_4^2 - a_1^2) d_1 - a_1 a_3$ nicht verschwindet, also d_2 gleich Null sein muß.

Wenn umgekehrt in der zweiten Gleichung d_2 nicht gleich Null angenommen wird, so erhält man $d_1 = \frac{a_1 a_3}{a_4^2 - a_1^2}$, und setzt man diesen Wert in die erste Gleichung, so erhält man den Widerspruch. Also bei der Annahme, daß d_2 der Zahl 0 nicht gleich ist, ist die Annahme $d_3 = 1$ unmöglich, also $d_3 = 0$ und zugleich $d_1 = 0$, da $\frac{d_1}{d_3} = \frac{a_1 a_3}{a_4^2 - a_1^2}$.

Somit erhalten wir die Werte für drei Ellipsoidachsen d_1' 01, d_1'' 01 und 010. Die Kenntnis der Indizes d_1' und d_1'' lassen uns die Lage der betreffenden Strahlen berechnen durch die Winkelgrößen, welche diese Achsen mit der Vertikalachse [001] bilden. Diese Indizes selbst sind aber irrational, und die Achsen selbst können nicht die Komplexstrahlen sein.

In diesem Falle sind alle ebenen Strahlenkomplexe, welche den besonderen Strahl (Symmetrieachse respektive Normale zur Symmetrieebene) enthalten, orthogonale (rhombische).

Wählen wir als diesen besonderen Strahl den Strahl A (Fig. 16, S. 53) aus, und als Strahlen A' und A'' die Strahlen in der besonderen Ebene, so erhalten wir aus der Formel 2), daß das rationale Doppelverhältnis

$$\frac{\operatorname{Sin}(A'PA'')}{\operatorname{Sin}(A'QA'')} : \frac{\operatorname{Sin}(A''PA)}{\operatorname{Sin}(A''QA)},$$

falls P und Q in der Ebene AA' liegende Strahlen sind, sich auf das folgende

$$\frac{\cos AP}{\cos AQ} : \frac{\sin AP}{\sin AQ} \quad \text{respektive} \quad \frac{\operatorname{tang} AQ}{\operatorname{tang} AP}$$

reduziert, was gemäß dem I. Teil für die orthogonalen Zonen charakteristisch ist.

Auf Grund des Gesetzes des Dualismus folgt weiter, daß auch jeder in der besonderen Ebene liegende Strahl die Achse der orthogonalen Flächenzone ist.

Das sind die einzigen Fälle, in welchen nicht sämtliche drei Ellipsoidachsen die rationalen Strahlen und zugleich die Achsen der orthogonalen Zonen sind.

Von den isotropen Komplexen vertritt allein der kubische eine besondere Syngonieart, da hier allein die Gesamtheit der Symmetrieelemente zulässig ist, welche den Komplex unveränderlich machen. Dazu sind vier dreizählige Symmetrieachsen hinreichend, welche die Lage der Würfeldiagonalen besitzen. Für die übrigen isotropen Komplexe ist dies nicht der Fall. Allein der hexagonal-isotrope Komplex zeichnet sich durch Zulässigkeit der sechszähligen Symmetrieachse aus. Aber das Vorhandensein dieser Achse bedingt noch keineswegs die genannte Unveränderlichkeit, da dabei stets die Dilatation in der Richtung dieser Achse möglich ist unter der Bedingung der Beibehaltung der vorhandenen Symmetrieelemente.

Diesem Komplex entspricht als Syngonieellipsoid nicht notwendig die Sphäre, welche lediglich als ein Grenzfall bei diesen Veränderungen erscheint, sondern ein Rotationsellipsoid, in welchem die Rotationsachse mit dieser Symmetrieachse koinzidiert.

Das Rotationsellipsoid kommt aber auch zu Stande, wenn man die Dilatation des kubischen Komplexes in der Richtung der vierzähligen Symmetrieachse ausführt. Diese Syngonieart ist aber von der vorigen dadurch verschieden, daß eine einzige isotrope Zone hier die tetragonale (mit Parameter 1), dort die hexagonale (mit Parameter 3) ist.

Somit erlaubt uns das Syngonieellipsoidgesetz folgende Syngoniearten zu unterscheiden.

1. Kubische Syngonie. Dieselbe ist allein durch den tetragonal-isotropen Komplex vertreten, durch die Sphäre als Syngonieellipsoid charakterisiert, unveränderlich in ihren singulären Elementen. Sie ist durch spezielle Symmetrieelemente fixiert, unter welchen notwendig vier dreizählige Symmetrieachsen vertreten sind. Natürlich sind sämtliche Zonen isotrop. Es gibt keine singulären Richtungen. Die minimale Anzahl gleicher Richtungen ist drei: das sind die Hauptachsen mit dem Parameter 1.

2. Tetragonale Syngonie. Dieselbe ist durch den Komplex vertreten, welcher aus dem vorigen durch Dilatation in der Richtung einer Hauptachse zu Stande kommt. Für sie ist das Vorhandensein einer einzigen isotropen und zwar tetragonal-isotropen Zone charakteristisch, deren Achse mit der Richtung der Dilatation koinzidiert. Sie ist durch ein Rotationsellipsoid als Syngonieellipsoid charakterisiert, wo der Rotationsachse als Strahl der Parameter 1 zukommt. Diese Richtung ist zugleich die singuläre. Alle übrigen Strahlen sind Achsen orthogonaler Zonen. Die minimale Anzahl gleicher Richtungen ist zwei.

3. Hexagonale Syngonie. Ihr Komplex entsteht gleichgültig aus dem kubischen oder aus dem hexagonal-isotropen Komplex durch Dilatation in der Richtung der drei- respektive sechszähligen Achse mit dem Parameter 3. Sie ist ebenfalls durch ein Rotationsellipsoid als Syngonieellipsoid charakterisiert, aber mit anderem Parameterwerte als für die vorige Syngonieart. Auch jetzt ist diese Achse die einzige singuläre Richtung, aber die minimale Anzahl der gleichen Richtungen ist drei und zwar in der zur Rotationsachse senkrechten Ebene.

Da der hierzu gehörige Komplex sich aus dem kubischen, wie aus dem hexagonal-isotropen durch Dilatation in der Richtung der dreizähligen Symmetrieachse ableiten läßt, so folgt, daß die beiden isotropen Komplexe sich auseinander auf demselben Wege ableiten lassen.

4. Rhombische Syngonie. Ihr Komplex entsteht ebenfalls aus dem kubischen, wie aus dem hexagonal-isotropen durch Dilatation in der Richtung der drei rationalen senkrechten Richtungen. Diese Richtungen sind zugleich die singulären, und können als die Achsen der orthogonalen Zonen betrachtet werden. Das charakteristische Syngonieellipsoid ist schon ein dreiachsiges, und dessen Achsen sind die genannten singulären Richtungen. Die Strahlen überhaupt, welche in drei singulären (durch singuläre Richtungen bestimmten) Ebenen liegen, sind die Achsen der orthogonalen Zonen. Sonstige Strahlen sind schon die Achsen von schiefen Zonen.

Von der 5. monoklinen und 6. triklinen Syngonie war oben die Rede. Es ist nur hinzuzufügen, daß auch die hierzu gehörigen Komplexe sich ebenfalls aus dem kubischen, wie aus den hexagonal-isotropen Komplexen ableiten lassen.

Diese Verhältnisse treten noch deutlicher hervor, wenn wir anstatt der Strahlenkomplexe die Raumgitter in näheren Betracht ziehen.

Für die letzteren erscheint es noch möglich die respektiven Trägheitsellipsoide zu bestimmen und den Beweis zu liefern, daß dieselben mit den Syngonieellipsoiden zusammenfallen.

Es ist von vornherein klar, daß für die Raumgitter der kubischen Syngonie, gleichgültig von welcher Strukturart, hexaëdrischer, oktaëdrischer oder dodekaëdrischer, sich das

Trägheitsellipsoid zur Sphäre reduziert, wie dies für das Syngonieellipsoid der Fall ist. Dies ist aber nicht der Fall für die Raumgitter der übrigen isotropen Komplexe, da dieselben sich aus dem kubischen durch bestimmte Dilatation in der Richtung der Hauptachsen ableiten lassen, wie dies auch für die Komplexe der rhombischen Syngonie der Fall ist.

Aber speziell für den hexagonal-isotropen Komplex, wenn wir das Raumgitter II. Art annehmen, erscheint die sechszählige Symmetrieachse; in Schnittebenen aber, welche dieser Achse parallel sind, erhalten wir das gewöhnliche quadratische Netz. Daraus folgt, daß speziell für dieses Raumgitter das Trägheitsellipsoid zur Sphäre wird.

Wir können also alle diese vier Raumgitter den respektiven Dilatationen unterwerfen, und dabei verwandelt sich die Sphäre als Syngonieellipsoid und als Trägheitsellipsoid in die gleichen Ellipsoide.

Berücksichtigen wir nun, daß eine solche Dilatation die Trägheitsmomente in den der Dilatationsachse parallelen Schnitten unverändert läßt, während in dem zu dieser Achse senkrechten Schnitte sich zugleich die Trägheitsmomente sämtlicher Systempunkte um einen und denselben Faktor ändern, so ändert sich folglich auch die Summe dieser Momente. In dieser Hinsicht spielt der Umstand keine Rolle, ob die Dilatationsachse rational oder irrational ist.

Das Syngonieellipsoid ist ein vollkommener Ausdruck für die rationalen Komplexe, und das Syngonieellipsoidgesetz muß als Grundgesetz der Syngonielehre betrachtet werden.

Was die komplexialen Symmetrieverhältnisse und die Verteilung der Parameter anbetrifft, wurde schon oben mit genügender Ausführlichkeit dargetan. Nur muß bemerkt werden, daß in den isotropen Komplexen die Parameterverhältnisse nicht durch eine einzige, sondern durch eine unendliche Gesamtheit der konzentrischen Kugeln zum Ausdruck gebracht wird. Für die anderen Syngoniearten verliert aber die absolute Größe der Parameter ihre Bedeutung, und es bleibt nur die relative übrig. Anstatt einer Schaar konzentrischer ähnlicher Ellipsoide brauchen wir jetzt nur ein einziges, welches von allen den isotropen Komplexen zukommenden Sphären nur diejenige mit dem Radius gleich der Einheit berücksichtigt.

Jetzt wollen wir zeigen, wie dieses Gesetz uns die Verteilung der rationalen und irrationalen Strahlen zur Anschaulichkeit bringt. Wir wollen nämlich die Frage untersuchen, in welchen ebenen Schnitten des Syngonieellipsoides die beiden Ellipsenachsen die rationalen sind.

Denken wir uns einen Schnitt durch die Ebene $(p_1 p_2 p_3)$.

Wählen wir als Ausgangskanten dieser ebenen Zone die Kanten $|01| = \begin{vmatrix} 100 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix}$ $= [0 \bar{p}_3 p_2]$ und $|10| = \begin{vmatrix} p_1 p_2 p_3 \\ 010 \end{vmatrix} = [\bar{p}_3 0 p_1]$. Dann wird eine beliebige Zonenkante $|m n|$ durch die Indizes

$$[- n p_3;\ - m p_3;\ m p_2 + n p_1]$$

ausgedrückt. Für die konjugierte Kante derselben Zone haben wir den Ausdruck:

$$\begin{vmatrix} - n p_3 & - m p_3 & m p_2 + n p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}.$$

Wenn also diese konjugierte Kante zur Kante $|mn|$ senkrecht steht, so muß die Gleichheit bestehen[1])

$$\begin{vmatrix} -n r_3' & -m r_3' & m r_2' + n r_1' \\ -n p_3' & -m p_3' & m p_2' + n p_1' \\ p_1' & p_2' & p_3' \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Apostrophe die zugehörenden projektiven Indizes bedeuten und der Kante $[r_1' r_2' r_3']$ die eigentlichen Indizes $[p_1 p_2 p_3]$ zukommen.

Führen wir also die eigentlichen Werte ein, so erhalten wir die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} -n\{(a_2 a_5 - a_3 a_4) p_1 - a_1 a_5 p_2 + a_1 a_4 p_3\} & -m\{(a_2 a_5 - a_3 a_4) p_1 - a_1 a_5 p_2 + a_1 a_4 p_3\} & \{m(-a_2 p_1 + a_1 p_2) + n a_4 p_1\} \\ -n p_3 & -m p_3 & m(a_4 p_2 + a_5 p_3) + n(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3) \\ a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 & a_4 p_2 + a_5 p_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Für die trikline Syngonie ergibt diese Gleichung für m und n lauter irrationale Werte, da keine senkrechten rationalen Strahlen vorkommen.

Für die monokline Syngonie vereinfacht sich diese Gleichung, da $a_2 = 0$ und $a_5 = 0$. Also nimmt sie die Form an:

$$\begin{vmatrix} -n(-a_3 a_4 p_1 + a_1 a_4 p_3) & -m(-a_3 a_4 p_1 + a_1 a_4 p_3) & (m a_1 p_2 + n a_4 p_1) \\ -n p_3 & -m p_3 & m a_4 p_2 + n(a_1 p_1 + a_3 p_3) \\ a_1 p_1 + a_3 p_3 & a_4 p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung genügt für alle Flächen $(p_1\, 0\, p_3)$, also $p_2 = 0$, wenn dabei $m = 0$, und n bleibt unbestimmt. Also sind zueinander senkrecht die Kanten

$$0\,[0\,\bar{p}_3\,0] + n\,[\bar{p}_3\,0\,p_1] \equiv -n\,[p_3\,0\,\bar{p}_1].$$

Die dieser Kante koordinierte ist $\begin{vmatrix} p_3 & 0 & p_1 \\ p_1 & 0 & p_3 \end{vmatrix} = [010]$.

Für die rhombischen Komplexe haben wir noch $a_3 = 0$, und die Gleichung reduziert sich auf

$$\begin{vmatrix} -n a_1 a_4 p_3 & -m a_1 a_4 p_3 & m a_1 p_2 + n a_4 p_1 \\ -n p_3 & -m p_3 & m a_4 p_2 + n a_1 p_1 \\ a_1 p_1 & a_4 p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Gleichung wird nicht nur die Bedingung $p_2 = 0$ und $m = 0$, sondern auch $p_1 = 0$ und $n = 0$, und noch $p_3 = 0$ und $n = 0$ zugeordnet. Wenn z. B. $p_1 = 0$, so haben wir:

$$|01| = [0\,\bar{p}_3\,p_2], \quad |10| = [\bar{1}00], \quad \text{also} \quad |mn| \equiv m\,[0\,\bar{p}_3\,p_2] + 0\,[\bar{1}00] \equiv [0\,\bar{p}_3\,p_2].$$

---

[1]) Diese Gleichheit wurde zuerst in der Zeitschrift für Kristallographie **33**, 588 aufgestellt.

Die dieser Kante koordinierte ist $\begin{vmatrix} 0 & \bar{p}_3 & p_2 \\ 0 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = [100]$ u. s. f.

Für die tetragonalen Komplexe haben wir noch $a_1 = a_4$. In diesem Fall reduziert sich die Gleichung auf:

$$\begin{vmatrix} -n\,a_1\,p_3 & -m\,a_1\,p_3 & m\,p_2 + n\,p_1 \\ -n\,p_3 & -m\,p_3 & m\,a_1\,p_2 + n\,a_1\,p_1 \\ a_1\,p_1 & a_1\,p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun sieht man, daß der Gleichung durch ganz beliebige Indizes genügt wird, wenn man $m:n$ gleich $p_2:p_1$ setzt. Dann haben wir:

$$|m\,n| \equiv p_2\,[0\,\bar{p}_3\,p_2] + p_1\,[\bar{p}_3\,0\,p_1] \equiv [-p_1\,p_3;\ -p_2\,p_3;\ p_1^2 + p_2^2].$$

Die dieser Kante koordinierte ist $\begin{vmatrix} -p_1\,p_3 & -p_2\,p_3 & p_1^2 + p_2^2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = [\bar{p}_2\,p_1\,0]$.

Wenn wir aber $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ annehmen, so wird die Gleichung zur Identität:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In diesem Falle sind also m und n völlig unbestimmt, das heißt: es läßt sich in dieser Zone (als einer isotropen) ein beliebiger Strahl auswählen, und stets wird der ihm koordinierte Strahl der dazu senkrechte.

Endlich reduziert sich für die kubische Syngonie die Gleichung von selbst auf die Identität

$$\begin{vmatrix} -n\,p_3 & -m\,p_3 & m\,p_2 + n\,p_1 \\ -n\,p_3 & -m\,p_3 & m\,p_2 + n\,p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

was selbstverständlich ist, da in diesem Fall die Werte m und n wesentlich unbestimmt sind für sämtliche rationale Schnitte des isotropen Komplexes.[1])

Auf Grund dieser Verteilung der orthogonalen und isotropen Zonen kann die Frage über die Syngonieart beantwortet werden, wenn z. B. allein vier Strahlen (resp. Ebenen) gegeben sind, von welchen keine drei tautozonal sind.

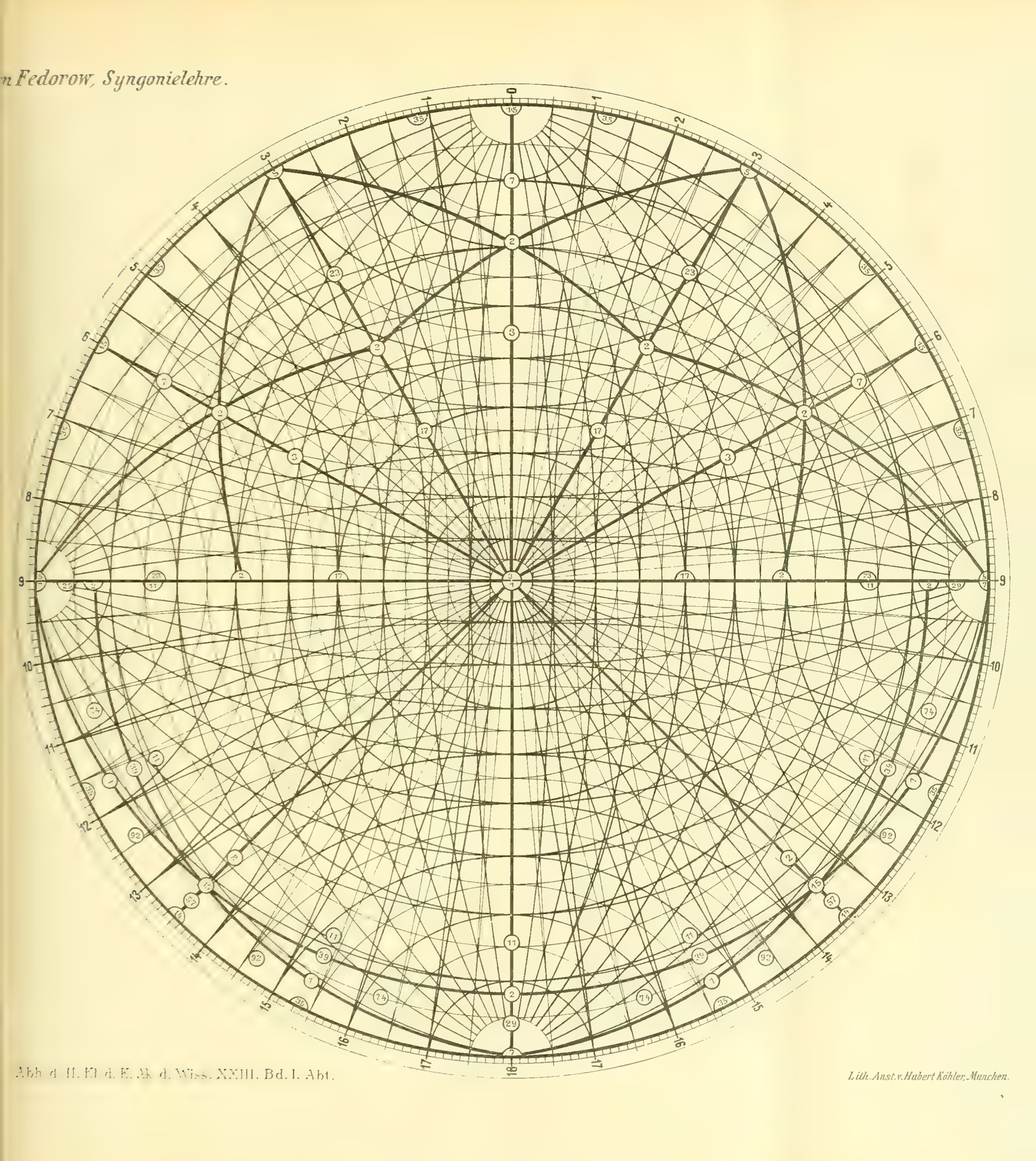
Ist der Komplex isotrop, so sind die Tangentenquadrate rational. Man entwickle den Komplex. Wenn derselbe tetragonal oder hexagonal ist, so sind sämtliche Zonen orthogonal. Von zwei konjugierten senkrechten Ebenen geht eine notwendig durch die Hauptsymmetrieachse. Der Schnittwinkel zweier solcher Ebenen bedingt, ob die einzige isotrope Zone tetragonal oder hexagonal ist. Ist der Komplex rhombisch, so steht bevor, die Ebene aufzusuchen, deren Strahlen die Achsen der orthogonalen Zonen sind, und dann bestimme man die senkrechten konjugierten Ebenen, welche den zur vorigen Ebene senkrechten Strahl gemein haben. Ist aber dieser Strahl die Achse der schiefen Zone, so ist der Komplex monoklin. Im triklinen fehlen die orthogonalen Zonen vollständig.

[1]) Was speziell die hexagonale Syngonie anbetrifft, so ist die analoge Operation in der Zeitschrift für Kristallographie 33, 588 angeführt.

Das Entstehen sämtlicher Komplexe aus den isotropen, was als Gesetz der Projektivität der Komplexe bezeichnet wird, bewirkt die Eigenschaften, welche von Herrn Goldschmidt und Viola als harmonische bezeichnet wurden. Harmonieachse mit bestimmter Zähligkeit bleibt jede Achse, welche vor der Deformation, das heißt im isotropen Komplexe als Symmetrieachse mit derselben Zähligkeit auftrat; dasselbe gilt auch für Harmonieebenen.

Wie schon im I. Teile erklärt (S. 51), bringen die neuen Fachwörter „Harmonie“, „Harmonieelemente“ keinen neuen Inhalt mit; hier ist also nur nötig, am Schlusse dieses I. Teiles auf sie Bezug zu nehmen.

Inhalt.



Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München.



Aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacherschen Tian-Schan-Expedition.

Ein Profil durch den nördlichen Teil des zentralen Tian-Schan.

Von

H. Keidel und ***P.* St. Richarz.**

(Mit 5 Tafeln.)



I. Geologische Übersicht über den Bau des zentralen Tian-Schan

von

H. Keidel.

Noch vor kurzem haben wir nur wenig von dem zentralen Tian-Schan gewußt. Namentlich von den höchsten, nahe am Khan-Tengri sich erstreckenden Gebirgsteilen, wo es sehr große Gletscher gibt, zeigen alle Karten ein falsches Bild. Der hauptsächliche Zweck der Forschungsreise, die Herr Dr. Merzbacher[1]) in den Jahren 1902 und 1903 im Tian-Schan ausgeführt hat, war die geographische und geologische Erforschung dieses Gebiets. An dieser Forschungsreise habe ich als Geologe teilgenommen und bin an viele Stellen der inneren, höchsten Teile des Gebirges gekommen, wo vor mir noch kein Forscher gewesen war.

Diese Arbeit ist nun ein Versuch, die wichtigsten geologischen Verhältnisse des nördlichen zentralen Tian-Schan in großen Umrissen zu schildern; sie besteht aus zwei Teilen: der eine davon enthält die Ergebnisse der petrographischen Untersuchung von Gesteinen, die ich in dem sehr hohen, nahe am Khan-Tengri liegenden Gebirge gesammelt habe, der andere die wichtigsten Beobachtungen, die sich auf die stratigraphischen und tektonischen Verhältnisse beziehen. Die petrographische Untersuchung hat Herr *P.* Stephan Richarz ausgeführt, wofür ich ihm aufrichtig danke.

I.

Als nördlichen zentralen Tian-Schan bezeichne ich denjenigen Teil des Tian-Schan, der von dem östlichen Ufer des Issyk-kul im Westen bis zu dem Großen Musart-Tal nach Osten reicht. Als südliche Grenze nehme ich die, wie wir sehen werden, in tektonischer Beziehung wichtige Linie des Inyltschek-Tals an, die ungefähr die Mittellinie des Gebirges in der Längsrichtung ist und nach Ostnordost auf den Khan-Tengri trifft. Die nördliche Grenze ist ziemlich deutlich gekennzeichnet durch eine Zone hochgelegener Steppen, die sich vom Issyk-kul nach Ostnordost erstrecken. Diese Steppen sind alte Seeböden und werden heute vom Kegen und vom Tekes durchflossen.

[1]) Merzbacher, Vorläufiger Bericht über eine in den Jahren 1902 und 1903 ausgeführte Forschungsreise in den zentralen Tian-Schan, Ergänzungsheft 149 zu Peterm. Mitteil., 1904, mit Karte.

Merzbacher, Forschungsreise im Tian-Schan, Sitz.-Ber. der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akad. der Wissensch., Bd. XXXIV, 1904, Heft III.

Merzbacher, The Central Tian-Schan Mountains, London, 1905, mit Karte.

In dem so begrenzten Gebirgsstück kann man leicht einen nördlichen und einen südlichen Teil unterscheiden, beide durch die Wasserscheide der Stromgebiete des Ili und des Jarkent-daria getrennt. Das östliche Ende des Terskei- oder Kirgisin-Ala-Tau bildet diese Wasserscheide vom Issyk-kul her bis in die Gegend des oberen Sary-dschass-Tals. In der Nähe des Aschu-tòr-Passes biegt die Wasserscheide fast unter einem rechten Winkel nach Süden um, verläuft dann längs des vereisten Kammes,[1]) der die Firnbecken des Semonow-Gletschers und des westlichen Bayum-kol-Gletschers trennt und folgt weiter nach Osten der fast 6000 m hohen Kette, die nördlich vor dem Khan-Tengri liegt, und die ich hier weiterhin die „zentrale Kette" nenne. Von dem Gebiet des östlichen Terskei-Ala-Tau, ungefähr von 79° ö. L. an, bis in die Gegend des obersten Sary-dschass-Tals ist diese Wasserscheide eine natürliche Grenze zwischen den inneren, sehr hohen, auffallend langen und fast parallelen Ketten im Süden und den viel niedrigeren äußeren Gebirgszügen im Norden. Östlich vom Aschu-tòr-Paß, wo die Wasserscheide nach Süden umbiegt, ist diese Grenze nicht mehr deutlich; und die inneren Ketten gehen, indem das Gebirge gleichmäßig nach Norden niedriger wird, allmählich in die äußeren Gebirgszüge über. Wir unterscheiden also zwei Gebiete: nämlich die hohen inneren Ketten im Süden und die niedrigeren äußeren Gebirgszüge im Norden. Bei beiden ist die Richtung der Ketten oder das Streichen der Sedimente und die Längsrichtung der granitischen Massive in den abgetragenen Gebirgsteilen im allgemeinen O.N.O., wobei aber eine deutliche Drehung des Streichens von N.O. im Westen nach O.S.O. im Osten sichtbar ist. Ein Blick auf eine Übersichtskarte des Tian-Schan zeigt, daß die orographisch deutlich sichtbaren Teile des zentralen Gebietes sich in südwestlicher Richtung ausbreiten, wodurch die Ausdehnung des Tian-Schan in der meridionalen Richtung schon im Meridian des Bedel-Passes bedeutend größer wird, als im Meridian des Khan-Tengri. Die verschiedenen Gebirgsstücke des zentralen Tian-Schan, wovon wir einige kennen lernen werden, sind nur als die östlichen Enden der im Westen liegenden großen Ketten aufzufassen; die granitischen Massive, woraus zum großen Teil die äußeren Gebirgszüge des nördlichen zentralen Tian-Schan bestehen, sind z. B. nur die östliche Fortsetzung der viel größeren granitischen Massen des Terskei-Ala-Tau. Daraus ergibt sich, daß der zentrale Tian-Schan nach Westen nicht natürlich begrenzt werden kann. Ähnlich ist es mit der Begrenzung im Osten. Die granitischen Massive und die Sedimente der äußeren Gebirgszüge streichen von W.S.W. heran und endigen nach einer leichten Beugung der Strichrichtung nach Osten, spitzwinkelig an den großen von Westen nach Osten verlaufenden Brüchen, an den südlichen Rändern der alten Seebecken, worin der Tekes und der Kegen fließen. Die zentrale Kette aber schwenkt deutlich aus der O.N.O.-O.W.-Richtung nach O.S.O. ab. In der Fortsetzung dieser Richtung kommen wir zum Musart-Paß. Es kann kaum ein Zweifel darüber bestehen, daß der kristallinische Kalk, woraus das Gebirge in der Umgebung dieses Passes besteht, von Westen her, aus dem Gebiet der nahe am Khan-Tengri sich erstreckenden zentralen Kette, heranstreicht und noch über den Paß hinaus nach Osten reicht. In den tief in das Gebirge eingeschnittenen Musart-Tälern bestehen die sich gegenüberliegenden Stücke der Talseiten aus den gleichen

[1]) Merzbacher, Ergänz.-Heft, Peterm. Mitteil., S. 18 und 29. In dem vergletscherten Kamme, der die Firnbecken des Semonow- und des westlichen Bayum-kol-Gletschers trennt, liegen zwei Einsattelungen, von denen Merzbacher die eine als Bayum-kol- und die andere als Semonow-Paß bezeichnet.

Gesteinen; sie haben auch dasselbe Streichen und denselben Bau. Die sehr deutlichen, tiefen Furchen der beiden Musart-Täler sind also keine Grenze des zentralen Tian-Schan nach Osten, wenn man für die Einteilung des Gebirges die geologischen Verhältnisse benutzt.

II.

Die ersten Nachrichten über die geologischen Verhältnisse einiger Teile des nördlichen zentralen Tian-Schan hat Semonow[1]) gegeben; er ist im Jahre 1857 von der Gegend des Santasch-Passes, östlich vom Issyk-kul, durch einige Quertäler des östlichen Terskei-Ala-Tau bis zum oberen Sary-dschass-Tal gekommen. Auf diesem Wege hat er gefunden, daß granitische Gesteine in großer Masse den Terskei-Ala-Tau zusammensetzen, und daß darauf Kohlenkalk lagert. Am Issyk-kul beständen alle Vorsprünge des Gebirges aus kristallinischen Felsarten, nämlich aus Granit und Syenit, die mit einem zerreiblichen Konglomerat bedeckt seien. Dies leicht nach N.W. geneigte Konglomerat hält Semonow für eine sehr junge Seebildung.

Sewerzow,[2]) der einige der Beobachtungen Semonows, zum Beispiel über die Verbreitung der kristallinischen Gesteine im Terskei-Ala-Tau bestätigt hat, ist auf seiner großen Reise in den Jahren 1867 und 1868 nicht im zentralsten Tian-Schan gewesen.

Der nächste geologisch geschulte Forscher, der den zentralen Tian-Schan bereist hat, ist Ignatiew[3]) gewesen. Er hat im Jahre 1886 das östliche Ende des Terskei-Ala-Tau im Turgen-Aksu-Tal und im Berkut-Paß überschritten und die unteren Teile der großen Gletscher im Sary-dschass-Tal, im Adùr-tòr-Tal und im Inyltschek-Tal gesehen. Leider hat er seinen im Jahre 1887 veröffentlichten vorläufigen Bericht später nicht mehr durch genauere Mitteilungen über die geologischen Verhältnisse, die er beobachtet hat, ergänzt. Die erwähnten vorläufigen Mitteilungen geben ein nur lückenhaftes Bild von der Verbreitung der paläozoischen Sedimente und der granitischen Gesteine, jedoch fast gar keine Auskunft über die tektonischen Verhältnisse.

Ignatiews Beobachtungen lassen aber erkennen, daß in der Umgebung des Sary-dschass-Tals ähnliche Sedimente und kristallinische Gesteine vorkommen, wie sie Semonow und Sewerzow in den Gebirgszügen des Transilenischen-Ala-Tau, des Kungeu-Ala-Tau und des mittleren Terskei-Ala-Tau festgestellt haben, nämlich: paläozoische Tonschiefer, unterkarbonischer Kalk und von Eruptivgesteinen hauptsächlich Granit. Ignatiew erwähnt den großen Granitzug des Turgen-Aksu-Tals, die Tonschiefer auf der rechten Seite des Sary-dschass, den unterkarbonischen Kalk des Itsch-kele-tasch, der Productus giganteus und Productus striatus führt. Auch die bunten Mergel und Sandsteine im Kok-dschar-Tal hat er gesehen und nahe dabei in grauem Kalk Granitgerölle gefunden.

Die ausführlichsten Nachrichten über die Verbreitung der Sedimente und der granitischen Gesteine in einigen Teilen des zentralen Tian-Schan hat Friederichsen[4]) erst

---

[1]) Semonow, s. u. a. Peterm. Mitteil., 1858, S. 35 f.

[2]) Sewerzow, u. a. in Peterm. Mitteil., Ergänzungshefte Nr. 42 und 43, 1875.

[3]) Ignatiew, Vorläufiger Bericht über die Expedition zur Erforschung der Berggruppe Khan-Tengri, Iswestiya der K. Russ. Geogr. Gesellschaft, 1887, XXIII (russ.).

[4]) Friederichsen, Forschungsreise in den zentralen Tian-Schan und Dsungarischen Ala-tau, Mitteil. der Geogr. Gesellschaft zu Hamburg, Bd. XX, 1894.

vor kurzem gegeben; seine Beobachtungen hierüber erhalten besonderen Wert dadurch, daß er die verschiedenen Sedimente und die granitischen Gesteine auf seiner Karte genau verzeichnet hat, und daß die Gesteinsproben, die er gesammelt hat, namentlich die Eruptivgesteine, petrographisch untersucht worden sind. Die Untersuchung hat ergeben, daß unter den Eruptivgesteinen granitische Gesteine, namentlich Amphibolbiotitgranit, vorherrschen; und Petersen, der die Untersuchung ausgeführt hat, spricht[1]) die Ansicht aus, daß das von Friederichsen bereiste Gebiet des zentralen Tian-Schan in petrographischer Beziehung so einförmig zusammengesetzt sei, wie kaum ein anderes Gebiet von annähernd ähnlicher Ausdehnung. Wenn wir aber den Weg verfolgen, den Friederichsen gegangen ist, so sehen wir, daß die hohen inneren Ketten noch südlich hievon liegen; die meisten Gesteinsproben, die Friederichsen im nördlichen zentralen Tian-Schan gesammelt hat stammen aus dem Gebiete der äußeren Gebirgszüge, einige davon, z. B. die Proben aus dem Sary-dschass-Tale, aus dem Grenzgebiet zwischen den inneren hohen Ketten und den äußeren Gebirgszügen, das nördlich von der Wasserscheide liegt. Die granitischen Gesteine zeigen fast alle mehr oder weniger deutlich Druckerscheinungen.

Friederichsen hat auch in demselben Kalk, worin Ignatiew Productus giganteus gefunden hat, am Itsch-kele-tasch, Fossilien gesammelt und er hat nachgewiesen, daß dieser Kalk sich auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals weiter nach Osten ausdehnt, zum Kapkak-Paß, wo er ebenfalls Fossilien führt.

In dem vorläufigen Bericht, den Merzbacher über unsere Forschungsreise veröffentlicht hat, finden wir Mitteilungen über die geologischen Verhältnisse der sehr hohen inneren Ketten; es sind die ersten Nachrichten hierüber, abgesehen von einigen spärlichen Angaben Ignatiews. Die großen granitischen Massen des Bayum-kol-Tals und der Umgebung des Semonow-Gletschers, die ausgedehnten Züge von kristallinischen Schiefern, welche diese Massen umgeben, der paläozoische Schiefer des Inyltschek-Tals werden erwähnt; fast alle Verhältnisse, die in dieser Arbeit ausführlicher beschrieben werden, sind dort schon kurz angeführt, und es wird besonders die Tatsache hervorgehoben, daß der höchste Teil des Tian-Schan und auch sein höchster Gipfel, der Khan-Tengri, aus Sedimenten und nicht aus Eruptivgesteinen bestehen.

Diese Nachrichten geben zusammen schon ein ungefähr zutreffendes Bild von der Zusammensetzung des nördlichen zentralen Tian-Schan. Wir sehen, daß namentlich granitische Gesteine weit verbreitet sind; sie setzen den Terskei-Ala-Tau zusammen und sie treten auch in großen Massen in den hohen inneren Ketten auf. In beiden Gebieten werden sie von kristallinischen Schiefern, von Tonschiefern und von unterkarbonischem Kalk begleitet. Die höchsten Teile des Tian-Schan bestehen aus stark veränderten Sedimenten. Ächter Gneiß kommt selten vor, und mesozoische Bildungen hat man bis heute nicht gefunden, wohl aber sehr junge Ablagerungen in den alten Seebecken auf der nördlichen und südlichen Seite des zentralen Tian-Schan und zum Teil auch in den Talbecken im Inneren des Gebirges. Bei allen Mitteilungen, die wir vor unserer Expedition über die Zusammensetzung des Gebirges erhielten, fällt besonders der Mangel an Nachrichten über die tektonischen Verhältnisse auf; und wo wir sie in den erwähnten Berichten finden, beruhen sie weniger auf sicherer Beobachtung, als vielmehr auf Speku-

[1]) Friederichsen, l. c., Petrographischer Anhang.

lation. Es ist dies sehr begreiflich. Denn auf Forschungsreisen in einem sehr ausgedehnten Gebiet, namentlich wenn es ein Hochgebirge ist, gibt es auf dem schmalen Streifen des Reiseweges, wenn man nicht längeren Aufenthalt nimmt und Vorstöße ins Herz des Gebirges ausführt, selten eine Gelegenheit, sichere Beobachtungen über den Bau des betreffenden Gebietes zu machen. Wenn dies aber nur hie und da dennoch der Fall ist, dann bleiben die Beobachtungen meist ohne Zusammenhang.

Die allgemeinsten Tatsachen vom Bau des zentralen Tian-Schan sind freilich schon bekannt. Das Streichen der Sedimente, das sehr beständig N.O. oder O.N.O. ist, wird von allen Beobachtern übereinstimmend angegeben. Aber über die Fallrichtungen, die irgendwelche Gesetzmäßigkeiten viel schwerer erkennen lassen, sind die Nachrichten schon unsicher, denn hier tritt schon an die Stelle der fehlenden Beobachtungen, die Spekulation.

Die außerordentlichen Schwierigkeiten, die sich der Erforschung der höchsten Teile des Tian-Schan entgegenstellen, können nicht in kurzer Zeit bezwungen werden. Die Expeditionen, die nur flüchtig in diesen Teilen des Gebirges gewesen sind, wie die Ignatiews und Saposchnikows,[1]) haben unsere Kenntnisse von den geologischen Verhältnissen in der Umgebung der großen Gletscher nur um ein Geringes vermehren können. Gerade diese Teile des zentralen Tian-Schan waren aber, wie ich schon gesagt habe, unser besonderes Ziel; und wir haben, um sie erforschen zu können, unser Hauptlager längere Zeit an den Enden der großen Gletscher aufschlagen müssen. Dadurch habe ich viele schwer zugängliche Stellen in den vergletscherten Teilen des Gebirges gesehen, und die Beobachtungen haben Zusammenhang erhalten, so daß mir die hauptsächlichen Verhältnisse soweit bekannt geworden sind, daß ich sie auf einer geologischen Übersichtskarte habe darstellen können.

Auf dieser Karte[2]) sind die Teile des Gebirges deutlich sichtbar, die in geologischer Beziehung noch wenig oder fast gar nicht bekannt sind. Einige dieser Lücken werden sobald nicht ausgefüllt werden, weil das betreffende Gebiet entweder sehr schwer zugänglich ist, wie zum Beispiel die Ketten am oberen Inyltschek-Gletscher nahe am Khan-Tengri, oder weil sich ein großer zusammenhängender Mantel von Firn und Eis darüber ausbreitet, wie dorten und namentlich auch über das Gebirge zwischen dem Semonow-Gletscher und dem Adür-tör-Tal. Andere, wenig bekannte Stellen allerdings, liegen zwischen den großen Quer- und Längstälern in Gebieten des Gebirges, die nicht gerade schwer zugänglich und zum Teil auch nicht mit Firn und Eis bedeckt sind; sie sind aber bisher nicht besucht worden. Dies gilt z. B. für manche Stellen nördlich von der Wasserscheide in den östlichen Teilen des Terskei-Ala-Tau. Die besten Aufschlüsse haben die tiefen Furchen der Quertäler auf der nördlichen Seite des Gebirges: das Turgen-Aksu-Tal, das Kok-dschar-Tal, das Kapkak-Tal, das Bayum-kol-Tal und noch weiter nach Osten das Kleine und das Große Musart-Tal und die Mukur-Mutu-Täler geliefert. Alle diese Täler münden nach Norden in große ehemalige Seebecken, die an dem nördlichen Rande des Gebirges sich dehnen. Die Quertäler, die in dem westlichen und dem mittleren Teile des nördlichen zentralen Tian-Schan liegen, sind nur in die nördlichen Abhänge des Gebirges eingeschnitten, und man sieht

---

[1]) Friederichsen, l. c., Einleitung.

[2]) Als orographische Übersichtskarte empfehle ich die dem Merzbacherschen Bericht in Petermanns Mitteilungen (l. c.) angefügte, mit unseren Reiserouten versehene Karte.

deshalb in ihren Furchen nur den geologischen Bestand der östlichen Ausläufer des Terskei-Ala-Tau. Die großen Quertäler im Osten reichen dagegen, weil die Wasserscheide nahe am Aschu-tòr-Paß nach Süden umbiegt und auf die zentrale Kette übergeht, bis in das Herz des Gebirges, wo ihre Flüsse aus großen Gletschern entspringen. In ihren Furchen ist ein sehr großer Teil des ganzen nördlichen zentralen Tian-Schan aufgeschlossen. Weiter im Westen können wir dagegen die geologischen Verhältnisse der hohen inneren Ketten nur in den oberen Abschnitten der großen Längstäler und in deren Nebentälern erkennen; hiezu gehören namentlich das Sary-dschass-Tal und das Inyltschek-Tal.

III.

Die granitischen Massive. — Ein Blick auf die geologische Übersichtskarte zu dieser Arbeit zeigt, daß granitische Gesteine sowohl in den inneren hohen Ketten, als auch in den äußeren Gebirgszügen des zentralen Tian-Schan weit verbreitet und in einem hohen Grade an der Zusammensetzung des Gebirges beteiligt sind.

In den hohen inneren Ketten können wir deutlich zwei große granitische Massive unterscheiden, die durch die hohe, aus Sedimenten bestehende zentrale Kette und deren westliche Fortsetzung, den Sary-dschass-Tau getrennt werden, doch ist es von beiden Massiven nicht genau bekannt, wo sie im Osten beginnen und wo sie im Westen endigen mögen. Das nördliche Massiv ist hauptsächlich in dem östlichen Teile der inneren Ketten gut aufgeschlossen. Schon in den Zweigtälern des Kleinen Musart-Tals und auch noch weiter im Osten, im Großen Musart-Tal, ist es sichtbar; im oberen Teile des Bayum-kol-Tals beträgt seine Breite ungefähr 5 km (siehe Profil I auf Taf. III), erstreckt sich von dort nach Westen, setzt fast die ganze Umgebung des Semonow-Gletschers und das Stück des Gebirges zusammen, das vom Semonow-Gletscher und dem obersten Teile des Sary-dschass-Tals im Nordosten und Norden und vom Muschketow-Gletscher und dem Adür-tör-Tal im Süden und Südwesten eingeschlossen wird. Die hohe mit Firn und Eis bedeckte Kette, die sich in diesem Gebirgsstück erhebt, endigt plötzlich mit steilem Abfall am Eingang des Adür-tör-Tales, an großen quer zum Streichen gerichteten Verschiebungen; die Fortsetzung des Massivs und die begleitenden Sedimente liegen weiter im Westen unter den jungen Bildungen und Aufschüttungen des zu einem Talbecken erweiterten Sary-dschass-Tals.

Letzteres gilt jedenfalls für den größeren, nördlichen Teil des Massivs; es ist aber zweifelhaft, ob es auch für den südlichsten Teil zutrifft; es scheint allerdings so, als ob die granitischen Gesteine, die man auf der nördlichen Seite des Tues-aschu-Passes findet (s. Profil XII auf Taf. IV), dessen westliche Fortsetzung seien. Dies ist aber bei den geringen Kenntnissen, die wir von dieser Gegend des Gebirges bisher gewonnen haben, heute noch nicht mit Sicherheit zu entscheiden.

Die südliche Grenze des Massivs ist sehr deutlich; sie wird auf der ganzen eben beschriebenen Strecke von der zentralen Kette gebildet und zwar liegt sie im Osten an dem südlichen Rande der Bayum-kol-Gletscher, in der Mitte an dem südlichen Rande des großen Firnbeckens, woraus der Semonow- und der Muschketow-Gletscher entspringen und im Westen auf der nördlichen Seite des Muschketow-Gletschers.

Auch die nördliche Grenze ist ziemlich deutlich; sie liegt im Osten in dem oberen Teile des Bayum-kol-Tals (s. Profil I), und erstreckt sich von dort fast in gerader Linie nach Westen. Zwischen dem Bayum-kol-Tal und dem Semonow-Gletscher ist sie eine Strecke weit unbekannt; dann sieht man sie unmittelbar neben der Endzunge des Semonow-Gletschers und im Westen endigt sie an den Verschiebungen auf der rechten Seite des Adür-tör-Tals.

Das südliche Massiv ist im Verhältnis zu seiner Länge sehr schmal. Es liegt auf der rechten Seite des Inyltschek-Tals (s. Profil XIII auf Taf. IV) und ist nur aus diesem Tal genauer bekannt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß es nach Westen noch eine Strecke weit über die tief eingeschnittene Furche des Sary-dschass-Flusses hinausreicht, und nach Osten noch eine Strecke weit den südlichen Abhang der zentralen Kette, die dort fast unzugänglich ist, zusammensetzt. Dieses Massiv trennt, wie wir noch sehen werden, als ein schmaler Streifen, zwei durch ihre Zusammensetzung und ihren Bau ganz verschiedene Teile des Gebirges.

Es ist bemerkenswert, daß die granitischen Gesteine der hohen inneren Ketten, obgleich sie die Sedimente an Masse übertreffen, dennoch nicht die höchsten Teile dieser Ketten zusammensetzen. Abgesehen vom Khan-Tengri, der aus veränderten Sedimenten aufgebaut ist und außerhalb der hohen zentralen Wasserscheide liegt,[1]) besteht auch die höchste zentrale Kette ganz aus kristallinischem Kalk; ihre Gipfel, die im Durchschnitt über 6000 m hoch sind, überragen die Gipfel des granitischen Massivs im Bayum-kol-Tal und am Semonow-Gletscher um 1000 bis 1500 m an Höhe; und im Westen besteht der Kamm des Sary-dschass-Tau, der genau die Fortsetzung der zentralen Kette ist, fast ganz aus unterkarbonischem Kalk.

Die Untersuchung der granitischen Gesteine aus dem Massiv des oberen Bayum-kol-Tals hat ergeben, daß diese Gesteine ganz frisch sind und keine Kataklase zeigen; und die granitischen Gesteine auf der rechten Seite des Inyltschek-Tals haben den unterkarbonischen Kalk des Sary-dschass-Tau im Kontakt verändert.

Wir wenden uns nun zu dem Granitmassive der äußeren Gebirgszüge, worin vom Terskei-Ala-Tau her bis zum Aschu-tòr-Paß die Wasserscheide zwischen den Stromgebieten des Ili und des Jarkent-daria liegt.

Wenn man die Stellen der äußeren Gebirgszüge, wo Granit bekannt ist, miteinander verbindet, so treten hier deutlich zwei große Granitzüge hervor, nämlich ein nördlicher und ein südlicher. Der nördliche Zug, wovon nur die kleinen Stücke im Turgen-Aksu-Tal und am Sart-dschol-Paß in die Karte eingezeichnet sind, ist die östliche Fortsetzung der granitischen Achse des Terskei-Ala-Tau; er ist seit langem weiter im Westen in mehreren Profilen auf der Südseite des Issyk-kul bekannt. Von dort streicht dieser mächtige Granitzug über das Souka-Tal, das Dschütü-oguss-Tal, das Turgen-Aksu-Tal und über den Sart-dschol-Paß bis in die Gegend der Tekesquellen, wo er am Rande der Steppe endigt. Der südliche Granitzug ist im Westen schon in der Gegend des Kulu-Passes bekannt; er setzt das Gebirge auf der südlichen Seite des Terskei-Ala-Tau, zum Beispiel südlich vom Karakür- und vom Turgen-Aksu-Paß zusammen und bildet eine kurze Strecke weit die Wasserscheide, streicht quer über das obere Kok-dschar-Tal,

[1]) Merzbacher, Peterm. Mitteil., l. c., S. 74.

das Kapkak-Tal, den unteren Abschnitt des Bayum-kol-Tals und erreicht den südlichen Rand der Tekessteppe, wo er in der Nähe der Mündung des Großen Musart-Tales durch Brüche abgeschnitten wird. Ein breiter nach O.N.O. streichender Streifen von Sedimenten, der an mehreren Stellen an Breite zu- oder abnimmt oder sich in Nebenstreifen spaltet, trennt diese beiden Granitzüge.

Von dem nördlichen Granitzug, der im Westen viel breiter ist als im Turgen-Aksu-Tal und am Sart-dschol-Paß, kennt man die granitischen Gesteine des Terskei-Ala-Tau in seiner ganzen Ausdehnung, von dem Gebiete an, wo er orographisch als geschlossener Gebirgszug deutlich hervortritt, das ist ungefähr im N.N.O. des Son-kul, bis zu den Vorbergen südlich vom Issyk-kul und zu den tiefen Quertälern, die bis in seine höchsten Teile eingeschnitten sind. Von dort reichen die granitischen Gesteine bis an den Issyk-kul, wo sie Semonow in den Vorsprüngen des Gebirges beobachtet hat. Im Westen, in der Umgebung der Poststation Kutemaldü sind die meisten Gerölle der jungen Seebildungen roter Granit. Friederichsen,[1]) der im Jahre 1902 die Vorberge und die Täler des Terskei-Ala-Tau, die südlich vom Issyk-kul liegen, bereist hat, berichtet, daß dort fast überall granitische Gesteine das Gebirge zusammensetzen. Amphibolbiotitgranit kommt hauptsächlich vor, dann Biotitgranit und an einigen Stellen Diorit. Zum Amphibolbiotitgranit gehört wahrscheinlich auch der größte Teil des Syenits, den die älteren Beobachter, z. B. Semonow und Muschketow, erwähnen. Friederichsen hat die Vorberge des Terskei-Ala-Tau in ihrer ganzen Breite gesehen; er ist am Korumdu-Paß in den westlichen Vorbergen mehr als 2800 m hoch gewesen, und hat dort und am Karatasch-Paß den südlichen Rand der Längstäler erreicht, welche den Hauptkamm des Terskei-Ala-Tau von den Vorbergen trennen. In den Tälern, die zu diesen Pässen führen, steht hauptsächlich roter Granit[2]) an. Schon Semonow ist im Souka-Tal über die Vorberge hinaus nach Süden bis zu dem Einschnitt des Souka-Passes gekommen, der in dem höchsten Kamm des Terskei-Ala-Tau, das ist in der Wasserscheide zwischen den Quellen des Naryn und dem Stromgebiet des Tschu liegt; er berichtet, daß hauptsächlich Syenit vorkommt, woraus die Vorberge ganz bestehen. Erst südlich von einem großen Längstal, das die Vorberge von dem Hauptkamm trennt und das ungefähr 10 km flußaufwärts von der Stelle, wo die Souka aus dem Gebirge tritt, in das Souka-Tal mündet, stehen steil fallende, metamorphe Sedimente an. Semonow meint deshalb, daß der Reisende schon in den Vorbergen die kristallinische Achse des Terskei-Ala-Tau, also die nördliche von den beiden großen Granit-Syenit-Achsen überschreite, woraus nach seiner Ansicht der Tian-Schan zusammengesetzt sei. Hieraus folgt jedenfalls, daß in der Linie des Souka-Tals die kristallinischen Gesteine von dem nördlichen Abhang des Hauptkamms bis zu der Niederung des Issyk-kul reichen, und daß die Vorberge ganz daraus bestehen. Ich kenne das Souka-Tal aus eigener Anschauung und habe von Süden kommend den Souka-Paß überschritten. Ich habe ein Profil entworfen, das auf der südlichen Seite des Terskei-Ala-Tau ungefähr in der Mitte zwischen dem Ak-bel und der Wasserscheide am Souka-Paß beginnt und das nach Norden über den Paß und das Souka-Tal bis zu dem breiten Uferstreifen auf der Südseite des Issyk-kul reicht; es ist aber nur ein

[1]) Friederichsen, l. c., S. 39 f.

[2]) Friederichsen, l. c., S. 47 und 51.

vorläufiges Profil, weil die Gesteinsproben, die ich dort gesammelt habe, noch nicht petrographisch untersucht worden sind. An diesem Profil (Figur XIV auf Taf. IV) ist aber jedenfalls zu sehen, daß die Masse der granitischen Gesteine sehr viel größer ist, als die der Sedimente. Granitische Gesteine findet man schon weit südlich vom Souka-Paß, wo das Gebirge stark abgetragen worden ist, dann am Passe selber. Hier enthält der helle, fast weiße Granit Einschlüsse von gebänderten metamorphen Sedimenten. Südlich vom Paß sieht man eine Zone von steil nach Norden einfallenden, stark veränderten Sedimenten. Dies sind die Grünschiefer, die Semonow erwähnt; es sind hauptsächlich Kalkphyllit, Phyllit und zum Teil amphibolitartige Gesteine. An einigen Stellen sieht man Aplit darin. Sodann folgt wieder derselbe Granit, wie er am Paß auftritt und hierauf ein schmaler Streifen von deutlich geschichtetem, steil nach Norden einfallendem, kristallinischem Kalk. Dieser Kalk setzt östlich vom Souka-Tal die südliche Seite des langen, aus Südost heranziehenden Längstales zusammen, das ich oben erwähnt habe. Weiter talabwärts sieht man auf fast 20 km nur granitische Gesteine; das ist in der Zone der Vorberge. In der südlichen Hälfte dieser Strecke enthält das Gestein sehr große Kristalle von Feldspat, sodaß es stellenweise porphyrische Struktur annimmt; in der nördlichen Hälfte findet man mittelkörniges Gestein. Hier ist das Gebirge auffallend niedriger als in der südlichen Hälfte der Vorberge; es hat viel weniger schroffe Formen als dort und erhebt sich kaum über die obere Baumgrenze. Nach Norden tauchen die granitischen Gesteine unter ein rotes, schwach nach Norden geneigtes junges Konglomerat und unter eine mächtige Decke von alter Moräne hinab. Man sieht bis zu der Stelle, wo der Granit verschwindet, in den Vorbergen keine Sedimente; und es scheint, daß die Ansicht Semonows richtig sei: daß nämlich die kristallinische, eigentliche Achse des Terskei-Ala-Tau in den Vorbergen liege.

Das eben erwähnte Profil ist bis zu der Stelle, wo der nördliche Teil der granitischen Vorberge des Terskei-Ala-Tau durch das junge Konglomerat und die alte Moräne begrenzt wird, in der Luftlinie ungefähr 35 km lang. Davon nehmen die Sedimente, die alle paläozoisches Alter haben, noch nicht den sechsten Teil ein. Dies zeigt sehr deutlich, daß in dem Meridian des Souka-Passes fast der ganze Terskei-Ala-Tau aus granitischen Gesteinen besteht.

Das nächste weiter östlich liegende große Quertal, über dessen geologische Verhältnisse wir einige Nachrichten haben, ist das Dschütü-oguss-Tal. Friederichsen ist dort gewesen und hat unter dem jungen Konglomerat am nördlichen Rande der Vorberge nicht Granit, sondern einen dünnplattigen bunten Mergel angetroffen, der Tongallen enthält und stärker disloziert worden ist als die darüber lagernden, gleichmäßig unter einem kleinen Winkel nach Norden einfallenden Schichten des Konglomerats. Weiter talaufwärts kommt unter den Geröllen des Dschütü-oguss ein roter Kalk vor, der viele Fossilien enthält. Schellwien,[1]) der die Fossilien untersucht hat, meint, daß der rote Kalk karbonisches oder permisches Alter habe, „daß aber die Zugehörigkeit zum unteren Karbon nicht gerade wahrscheinlich sei." Ich habe nun auch die Stücke gesehen, die Friederichsen gesammelt hat; sie stimmen vollständig mit denselben Gesteinen überein, die ich weiter im Osten in der Fortsetzung des Terskei-Ala-Tau, am Sart-dschol-Paß anstehend gefunden habe. Dort führen sie denselben breiten und flachen Spirifer und denselben kleinen Productus, der

[1]) Friederichsen, l. c., paläontol. Anhang.

in der Tat, wie Schellwien meint, dem Productus longispinus sehr ähnlich ist; außerdem aber kommt häufig Productus giganteus und Productus striatus darin vor. Es ist also kaum ein Zweifel darüber, daß der rötliche Kalk des Dschütü-oguss-Tals dasselbe Alter hat wie der rötliche Kalk am Sart-dschol-Paß, daß er also unterkarbonisch ist. Der bunte Mergel, der am Sart-dschol-Paß Gips enthält, liegt darüber. Friederichsen hat im Dschütü-oguss-Tal die granitische Zone der Vorberge nicht erreicht; daß sie dort aber nicht fern im Süden liegt, beweisen die von ihm beobachteten zahlreichen granitischen Gerölle des Flußbetts. Die Stelle, wo Friederichsen das Dschütü-oguss-Tal, von Westen kommend, gekreuzt und den nördlichen Rand der Vorberge berührt hat, liegt nördlicher als die Stelle, wo das Souka-Tal in das Becken des Issyk-kul mündet. Dies hat seinen Grund darin, daß östlich vom 78.⁰ ö. L., wo die Souka aus dem Gebirge tritt, der Terskei-Ala-Tau sich mehr und mehr der nördlichen Parallelkette, dem Kungeu-Ala-Tau nähert. Wir kennen hier die Struktur des Gebirges noch zu wenig, um die Frage zu entscheiden, wie weit die auf allen Karten so deutlich sichtbare orographische Schwenkung, die der Hauptkamm des Terskei-Ala-Tau östlich vom 78.⁰ ö. L. ausführt, mit den geologischen Verhältnissen zusammenhängt. Soviel ist aber schon bei dem Maß unserer heutigen Kenntnisse sicher, daß die paläozoischen Sedimente an den nördlichen Abhängen des Gebirges nach Osten zu an Breite zunehmen, die granitischen Massen dagegen abnehmen. Es war schon Semonow bekannt, daß die paläozoischen Sedimente in der Umgebung des Issyk-kul hauptsächlich auf dessen östlicher Seite vorkommen. Namentlich der unterkarbonische Kalk ist dort weit verbreitet, denn nördlich von Preobraschensk und weiter im Osten bestehen die östlichen Ausläufer des Kungeu-Ala-Tau hauptsächlich hieraus und aus Porphyr. Wir werden dem unterkarbonischen Kalk noch weiter im Osten, am Santasch-Paß begegnen und sehen, daß er dort wahrscheinlich mit dem unterkarbonischen Kalk auf der Südseite des Karkará-Beckens zusammenhängt. In der südwestlichen Forsetzung des unterkarbonischen Kalks vom Santasch-Paß liegt nun der rote Kalk des Dschütü-oguss-Tals und daraus ergibt sich, daß die Decke des unterkarbonischen Kalks, die südlich von Prschewalsk die granitische Zone der Vorberge des Terskei-Ala-Tau nach Norden begrenzt, schon auf der östlichen Seite des Souka-Tals sichtbar ist.

Semonow hat die granitischen Gesteine der Vorberge östlich von Prschewalsk in den Aksu-Tälern gefunden, wo heiße Quellen (Arasan) daraus entspringen; er gibt die Entfernung zwischen dem Rande des Gebirges und der Quelle in dem kleinen Aksu-Tal auf 10 km an. Friederichsen hat dort Amphibolbiotitgranit gesammelt, paläozoische Sedimente aber nicht anstehend getroffen, sondern nur als Gerölle in der alten Moräne am Ausgang des Tales gefunden.

Der Granitzug, der im Aksu-Tal zwischen den heißen Quellen und dem Rande des Gebirges sichtbar ist, erstreckt sich nach O.N.O., wo er in der Furche des Turgen-Aksu-Tals mehr als 18 km breit aufgeschlossen ist. Im Norden wird er am Gebirgsrande durch alte Moräne bedeckt und im Süden grenzt er an die Sedimente, die den Hauptkamm zusammensetzen, welcher die Wasserscheide zwischen dem Issyk-kul und dem Flußgebiet des Sary-dschass trägt. Wir befinden uns im Turgen-Aksu-Tal schon in dem Gebiet, das ich auf der geologischen Übersichtskarte darzustellen versucht habe. Die Karte zeigt, daß in O.N.O.-Richtung vom Turgen-Aksu-Tal granitische Gesteine in dem unteren Abschnitt des Kok-dschar-Tals und am Sart-dschol-Paß anstehen. Die granitischen

Gesteine des Turgen-Aksu-Tals und des Sart-dschol-Passes bilden also beiläufig das östliche Ende des großen Granitzugs, den ich als den nördlichen Granitzug der äußeren Gebirgszüge des nördlichen zentralen Tian-Schan bezeichnet habe.

Wir haben vorhin gesehen, daß dieser Granitzug weit nach S.W. reicht; er ist südöstlich von Prschewalsk am Ausgang des Aksu-Tals sichtbar, und es ist kaum zweifelhaft, daß er noch weiter westlich mit den granitischen Massen des Souka-Tals zusammenhängt. Es bleibt aber doch noch die Frage zu beantworten, ob er die östliche Fortsetzung der granitischen Achse der Vorberge des Terskei-Ala-Tau ist oder die Fortsetzung der höheren nördlichen Achse, also der granitischen Gesteine, woraus das Gebirge in der Umgebung des Souka-Passes besteht. Die Beantwortung dieser Frage hängt enge mit der Entscheidung zusammen, ob die Richtung der Ketten des Terskei-Ala-Tau nur eine orographische Erscheinung ist, oder ob sie von der Streichrichtung der Sedimente und von der Längsrichtung der granitischen Massive abhängt; sie soll daher erst bei der Besprechung der tektonischen Verhältnisse gegegeben werden.

Der südlichere der äußeren Granitzüge reicht, wie ein Blick auf die geologische Übersichtskarte lehrt, viel weiter nach Osten als der nördliche Granitzug. Der ziegelrote Biotitgranit am Ausgang des Großen Musart-Tals gehört noch dazu, und wahrscheinlich erstreckt er sich noch beträchtlich darüber hinaus nach Osten, denn in der Furche dieses Großen Quertals ist er noch mehrere Kilometer breit aufgeschlossen. Die nördliche Grenze

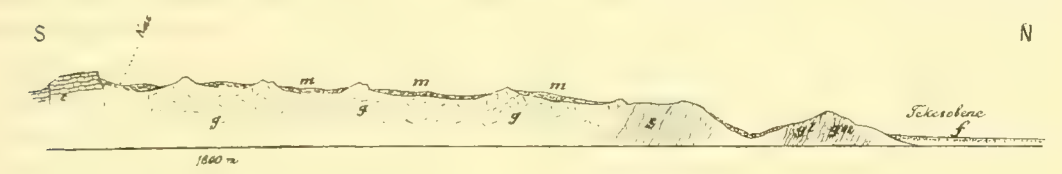


Fig. IV. Profil am nördl. Ende der Tekesebene (östliches Ende des südl. Granitzuges bei den Mukur-Mutu-Tälern).

Maßstab 1 : 62,000.

gl gn Gneis, Glimmerschiefer, s grünlicher Phyllit, Tonschiefer, g roter Granit, c transgressiv lagernder unterkarbonischer Kalk mit Productus giganteus, m alte Moräne, f Schotter der großen Schuttkegel.

dieses Zuges bildet hier im Osten der südliche Saum der Tekesebene, und in den Gebirgszügen, die diesen Saum begleiten, sind granitische Gesteine im ununterbrochenem Zusammenhang vom Großen Musart-Tal bis in die Nähe der Mündung des Bayum-kol-Tals entblößt. Das Profil des mittleren Mukur-Mutu-Tals (Fig. IV) zeigt die bedeutende Breite des südlichen Granitzugs westlich vom Großen Musart-Tal. Man sieht hier nur an wenigen Stellen Sedimente: nämlich Phyllit, Tonschiefer und unterkarbonischen Kalk. An dem Ausgang des Bayum-kol-Tals und westlich davon nehmen diese aber an Masse zu, und die nördliche Grenze der granitischen Gesteine wendet sich nun, indem sie, unregelmäßig und zuweilen unterbrochen, dem allgemeinen Streichen folgt, nach W.S.W. in das Innere des Gebirges. Westlich vom Bayum-kol-Tal erreicht nämlich der Streifen der Sedimente, der die beiden Granitzüge trennt, den südlichen Saum der Tekesebene.

Dieser Saum verläuft von der Gegend der Tekesquellen bis weit über das Große Musart-Tal hinaus fast genau von Westen nach Osten, also spitzwinklig zum Streichen

der Sedimente und zu der Längsrichtung des südlichen Granitzugs. Der trennende Streifen der Sedimente wird daher gleichsam plötzlich abgeschnitten. Dasselbe gilt für die granitischen Gesteine. Dies drückt sich deutlich in den orographischen Verhältnissen aus, indem der äußerste Rand der nördlichen Abhänge des Gebirges verhältnismäßig steil zur Tiefe geht.

Die granitischen Gesteine breiten sich von diesem Rande weit in das Innere des Gebirges aus. Dies zeigt sich namentlich in der Umgebung des unteren Bayum-kol-Tals deutlich. Und wo hier Sedimente vorkommen ist auch fast überall deren granitische Unterlage entblößt.

Wo die südliche Grenze der granitischen Gesteine östlich vom Bayum-kol-Tal liegt, wissen wir heute noch nicht. Wahrscheinlich wird der südliche Granitzug dort ebenso wie im Norden durch Sedimente in der Richtung des Streichens begrenzt.[1] Die Verhältnisse, die wir in dem mittleren Teile des Bayum-kol-Tals kennen lernen werden, lassen darauf schließen. Westlich vom Bayum-kol-Tal ist die südliche Grenze eine Strecke weit im Aschu-tör-Tal bekannt. Die Karte zeigt, daß sie in diesem Tale in der Tat dem Streichen folgt; ihre Fortsetzung nach Westen ist wieder unbekannt. Die breite Zone der granitischen Gesteine des unteren Bayum-kol-Tals aber dehnt sich weit in dieser Richtung aus. Die von Merzbacher entdeckten und beschriebenen, hochgelegenen Seen Ak-kul und Kara-kul liegen darin.[2] Man kommt westlich von diesen Seen in die Furche des Kapkak-Tals. Hier stellen sich vereinzelte Lappen von unterkarbonischem Kalk ein; aber fast an allen Stellen sieht man ihre granitische Unterlage. Die Breite des südlichen Granitzugs ist also im Kapkak-Tal kaum geringer als im Bayum-kol-Tal. Weiter westlich wird sie dagegen geringer und die Sedimente schwellen an. Wir kommen in das Gebiet der Wasserscheide in dem Bereich des Terskei-Ala-Tau. Der südliche Abfall gegen das Sary-dschass-Tal besteht aus Phyllit und unterkarbonischem Kalk. Im Norden aber streicht, tief durchschnitten vom Kok-dschar, der Sedimentstreifen vorüber, der die beiden großen Granitzüge trennt. Weiter westlich besteht die Wasserscheide beim Berkut-Paß ganz aus dem Granit, der in der westlichen Fortsetzung der großen Granitmassen des Kapkak-Tals liegt.

Sobald dieser Teil der Wasserscheide erreicht ist, sieht man die große Veränderung der morphologischen Verhältnisse des Gebirges in voller Deutlichkeit. Die Beständigkeit der Abdachung, welche die Umrandung der großen Quertäler im Osten auszeichnet, verschwindet hier. Der nördliche Abfall des Gebirges ist auf den Streifen des nördlichen Granitzugs beschränkt; in dem Gebiet des südlichen Granitzugs dehnen sich dagegen die in morphologischer Beziehung eigentümlichen, fast ebenen Hochflächen aus, die wir später näher betrachten wollen. Diese Hochflächen sind unabhängig von der Zusammensetzung und dem Bau des Gebirges; sie schneiden gleichmäßig die granitischen Gesteine und die

[1] Infolge der Abreise Keidels nach Südamerika, habe ich die Lesung der Korrekturen übernehmen müssen. Dies gibt mir Gelegenheit zu einigen ergänzenden Anmerkungen, welche Teile des Gebirges betreffen, die Herr Keidel nicht gesehen hat, von mir aber nach dessen Heimreise noch besucht wurden. Die oben ausgesprochene Vermutung, daß auch weiter im Osten die Gesteine der Granitzone von den Sedimenten in der Streichrichtung, südlich begrenzt werden, habe ich in den Tälern Saikal und Dondukol bestätigt gefunden. Siehe Peterm. Mitteil., l. c., S. 88 f. und 93. G. Merzbacher.

[2] Peterm. Mitteil., l. c., S. 89 f.

dislozierten Sedimente ab. Aber ihre Lage bezeichnet genau die Lage der verschiedenen Stücke des südlichen Granitzugs in dem Bereich der Wasserscheide. Ein solches Stück ist am Berkut-Paß, ein anderes weiter im Westen im Ottuk-Tal und am Törpu-Paß sichtbar.

Die großen Lücken in unserer Kenntnis von der Zusammensetzung des Gebirges in der Umgebung des Kulu- und des oberen Irtasch-Tals, des Kolpakowsky- und Petrow-Gletschers[1]) machen es sehr schwierig, nachzuweisen, ob die granitischen Massive auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals und in dem oberen Teile des Kok-dschar-Tals, welche die Hochflächen tragen, mit dem Granit zusammenhängen, woraus das gleichfalls ausgedehnte Hochflächen tragende Gebirge zwischen dem Ak-bel und dem Souka-Paß hauptsächlich besteht. Die Ähnlichkeit dieser Teile des Gebirges in morphologischer Beziehung ist aber erstaunlich groß; der Anblick der großen flach nach Süden geneigten Firn- und Eisfelder, die südwestlich vom Souka-Paß liegen und deren ebene Gesteinsunterlage deutlich sichtbar ist, überrascht den Reisenden ebenso sehr[2]) wie der Anblick der ebenen Hochflächen in der Umgebung des Sary-dschass-Tals. Darüber indes kann kaum ein Zweifel bestehen, daß das granitische Massiv des oberen Kok-dschar-Tals mit den granitischen Massen des Ottuk-Tals und Törpu-Passes zusammenhängt und wohl auch noch mit dem Granit in dem mittleren Teile des Kulu-Tals weiter westlich. Ich selbst bin nicht weiter westlich gewesen und Friederichsen, der den Kulu-Paß überschritten hat, führt aus dem oberen Teile des Kulu-Tals nur Sedimente an. Erst westlich von diesem Paß hat er wieder Granit und Gneisgranit in der Furche des Aschu-Kulu gefunden, der ein Nebenfluß des Irtasch ist. Von dort bis in die Nähe des Souka-Passes ist die Zusammensetzung des Gebirges unbekannt. Die granitischen Gesteine am Törpu-Paß und in dem unteren Teile des Kulu-Tals stehen mit dem Granit und dem Gneis des Arpatöktyr-Plateaus in Verbindung; auch der schluchtartige enge Teil des Sary-dschass-Tals, ein wenig nördlich von der Mündung des Kulu besteht aus granitischem Gestein. Noch weiter östlich hat Friederichsen Granit und Gneisgranit auf der nördlichen Seite des Sary-dschass-Tau gefunden. Diese wenigen Nachrichten genügen aber nicht, um sicher entscheiden zu können, wie weit die granitischen Gesteine des südlichen Zuges nach Süden reichen; ihre südliche Grenze läßt sich heute auch nicht einmal ungefähr angeben. Die granitischen Gesteine, welche den südlichen Abhang des Sary-dschass-Tau zusammensetzen, gehören aber, wie wir gesehen haben, nicht mehr dazu.

Der nördliche Granitzug tritt östlich vom Souka-Tal in dem Gebiet des nördlichen zentralen Tian-Schan deutlich hervor; auch seine westliche Fortsetzung liegt wahrscheinlich in den nördlichen Vorketten des Terskei-Ala-Tau; nach Osten wird er allmählich schmäler, indem seine Masse abnimmt und die Sedimente, namentlich der unterkarbonische Kalk, mehr und mehr zunehmen; er liegt in diesem Gebiet des zentralen Tian-Schan überall nördlich von der Wasserscheide, so daß der stark zerschnittene nördliche Abhang des Gebirges hauptsächlich daraus besteht.

Der südliche Granitzug, der im Osten besser als im Westen bekannt ist, ist an vielen Stellen seines westlichen Teils schlecht aufgeschlossen. Denn die Hochflächen, die sich dort

[1]) Siehe die Karten bei Merzbacher und Friederichsen.

[2]) Merzbacher, l. c., S. 64 f.

zum großen Teil über die Gesteine dieses Zuges ausbreiten, liegen an vielen Stellen in großer Höhe, und sind dann mit Firn und Eis oder mit alter Moräne und anderem Schutt bedeckt. Dieser Umstand erschwert es, die Grenzen oder die verbindenden Stücke des Zuges zu erkennen. Im Osten hingegen ist auch der südliche Granitzug, da dort die Quertäler tief darin eingeschnitten sind, gut aufgeschlossen. Vielleicht liegt hierin der Grund, daß es scheint, als habe er dort größere Ausdehnung als im Westen. Jedenfalls setzt der südliche Granitzug im Nordrandgebiet des zentralen Tian-Schan die Wasserscheide zusammen; nur östlich vom Kapkak-Paß, wo er sich der Tekesebene nähert, ist dies nicht der Fall; dort geht die Wasserscheide auf die zentrale Kette über.

IV.

Die Sedimente. — Nachdem wir nun gesehen haben, daß granitische Gesteine sowohl die hohen inneren Ketten als auch die äußeren Gebirgszüge, die sich als die östliche Fortsetzung des Terskei-Ala-Tau erweisen, zum großen Teil zusammensetzen, wollen wir sehen, welche Sedimente dort vorkommen und ob sie uns einen stratigraphischen Anhalt geben, das Alter der granitischen Gesteine und die Zeit der verschiedenen Phasen der gebirgsbildenden Bewegungen zu bestimmen. Dabei begegnen wir aber sogleich einer großen Schwierigkeit, die ihren Grund hauptsächlich darin hat, daß die Sedimentfolge in dem Gebiet des zentralen Tian-Schan sehr große Lücken aufweist, und daß sogar das Alter der paläozoischen Sedimente zum größten Teil nicht genau bestimmt werden kann. Außer den jung-tertiären Gobi-Sedimenten und den zum Teil pleistozänen Bildungen der alten Seebecken und der Talbecken, findet man im nördlichen zentralen Tian-Schan aber nur paläozoische Sedimente. Die jüngsten darunter sind die bunten, Gips führenden Mergel und roter Sandstein auf der südlichen Seite des Sart-dschol-Passes (siehe S. 100). Mesozoische Sedimente, die in anderen Gebieten des Tian-Schan als Landpflanzen und Kohle führende Schichten in großer Mächtigkeit und Ausdehnung vorkommen, sind dagegen bis heute im zentralen Tian-Schan nicht gefunden worden; und es gibt Anzeichen dafür, daß sie dort nicht abgetragen, sondern überhaupt nie vorhanden gewesen sind. Die Gebirgszüge des zentralen Tian-Schan gehören, wie wir noch sehen werden, in der Tat einem sehr alten Stück des Gebirges an, dessen ursprüngliche Anlage durch die späteren gebirgsbildenden Bewegungen mehrere Male verändert worden ist. Es ist natürlich sehr schwierig in einem solch alten, wiederholt abgetragenen und wieder aufgerichteten Gebirge die Zeit der Intrusionen der granitischen Massen zu bestimmen und die Spuren, welche die verschiedenen gebirgsbildenden Bewegungen zu verschiedenen Zeiten hinterlassen haben, zu erkennen, zu verfolgen und von einander zu unterscheiden, wenn die Sedimentfolge so große Lücken aufweist, wie im zentralen Tian-Schan.

Aber obwohl diese Schwierigkeiten sehr groß sind, so dürfte es uns dennoch gelingen, einige der hauptsächlichen Ereignisse in der Geschichte unseres Gebietes dadurch zu erkennen, daß wir die Verbreitung und die Lagerungsverhältnisse der beiden einzigen Glieder der Sedimentfolge, deren Alter genauer bekannt ist: nämlich des unterkarbonischen Kalks und der tertiären Gobi-Sedimente, verfolgen. Diese sollen deshalb hier ausführlicher besprochen, die übrigen Sedimente dagegen nur soweit betrachtet werden, als es notwendig ist, um die in dieser Arbeit geschilderten Verhältnisse zu verstehen.

1. Die paläozoischen Sedimente.

Da außer einigen undeutlichen Resten von Cambrium, die in graublauem Tonschiefer am Kaschka-tur-Paß gefunden wurden, Fossilien in älteren paläozoischen Sedimenten außer einigen noch nicht sicher bestimmten devonischen Formen vom Ischtyk-Paß hauptsächlich nur im unterkarbonischen Kalk gefunden worden sind, so fehlt es bis jetzt an genügendem Anhalt, die Reihenfolge der paläozoischen Bildungen sicher festzustellen. Dennoch können wir mit Hilfe derjenigen petrographischen Verschiedenheiten, die allgemeine Bedeutung haben und weit verbreitet sind, sowie in einigen Gebirgsteilen auch mit Hilfe der Lagerungsverhältnisse wenigstens zwei große Gruppen von Sedimenten unterscheiden: nämlich die Phyllitgruppe und die Tonschiefergruppe.

Diese Einteilung hat aber nur beschränkte stratigraphische Bedeutung, da sie uns nur ungefähr in großen Zügen vor Augen führt, was älter und was jünger ist. Es ist sehr oft nicht möglich, sie im einzelnen Falle sicher anzuwenden; denn wir finden z. B. Phyllit nicht nur unter den Bildungen der Phyllitgruppe, sondern auch in der Gruppe der Tonschiefer; und öfters sehen wir eine Zone von Phyllit zwischen Tonschiefern, ohne daß ein Merkmal zur Beurteilung der Lagerungsverhältnisse vorhanden wäre. Dies sind zwei Beispiele, woran wir die beiden hauptsächlichen Ursachen, die alle diese Unklarheiten hervorgerufen haben, erkennen können. Die großen Intrusionen der granitischen Gesteine, die zu verschiedenen Zeiten vor sich gegangen sind, haben nämlich an vielen Stellen und auf weite Entfernungen auch die Sedimente der Tonschiefergruppe so verändert, daß sie oft kristallinischer sind als die Bildungen der Phyllitgruppe, und die großen wiederholten Dislokationen haben die ursprünglichen Lagerungsverhältnisse und die natürliche Reihenfolge der paläozoischen Sedimente fast unkenntlich gemacht. Vieles von den ursprünglichen stratigraphischen Verhältnissen mag, weil das Gebirge zu verschiedenen Zeiten stark abgetragen worden ist, überhaupt nicht mehr festzustellen sein.

Wir müssen uns aus diesen Gründen einstweilen damit begnügen, die großen Gruppen, die Sedimente von sehr verschiedenem Alter vereinigen mögen, nach den wenigen wirklich vorhandenen Merkmalen zu unterscheiden, es im einzelnen Falle aber oft unentschieden lassen, zu welcher Gruppe die jeweils in Frage kommenden Bildungen gehören. Auch steht es keineswegs fest, daß die hier angegebene Reihenfolge völlig richtig ist; sie ist aus der Verbindung vieler einzelner Beobachtungen und deren Kombination hervorgegangen.

Die Phyllitgruppe. — Am meisten verbreitet und auch am mächtigsten ist grauschwarzer und grünlicher Phyllit; er ist besonders mächtig entfaltet in den Gebirgen südlich vom Inyltschek-Tal. Man findet ihn aber auch unter den Sedimenten der äußeren Gebirgszüge: er enthält an manchen Stellen Kalkphyllit, graugelben Quarzit und quarzitischen Schiefer. Häufig ist auch graugrüner Phyllit. Auch er enthält quarzitische Lagen und an manchen Stellen liegt darin ein amphibolitartiges Gestein, das aus einem basischen Eruptivgestein und den dazu gehörenden Tuffen durch Druck und Zersetzung entstanden ist. Die amphibolitartigen Gesteine begleiten dann Züge von weichen, feinblättrigen chloritischen Schiefern. Nur in den Phylliten allein kommen wahrscheinlich die echten Gneise vor, die aber nicht sehr mächtig auftreten. Ein Beispiel dafür ist u. a. der schmale Gneiszug in den Phyllitmassen auf der rechten Seite des oberen Sary-dschass-Tals.

Wenn auch alle diese Bildungen sehr alt sein mögen, so gehören sie nach meiner Auffassung doch nicht zum Grundgebirge, sondern sind wahrscheinlich jünger als Cambrium. Zusammen mit den Bildungen der Tonschiefergruppe stellen sie aber die ältesten noch sichtbaren Stücke des Gebirges dar, wovon wir eines in der mächtigen Schieferzone des Bayum-kol- und Sary-dschass-Tals kennen lernen werden. Wo die eigentliche stratigraphische Grenze zwischen diesen beiden Gruppen liegt, ist, wie schon hervorgehoben, nicht festzustellen. An den heute sichtbaren Grenzen zwischen Phyllit und Tonschiefer kommt an vielen Stellen des Gebirges ein ziemlich mächtiges Quarzitkonglomerat vor, dessen stark gepreßte und verdrückte Gerölle in einem dunklen, quarzreichen, kristallinischen Bindemittel liegen. Dieses Konglomerat ist weit verbreitet; man findet es im Bayum-kol-Tal, im Sary-dschass-Tal, im Inyltschek-Tal und auch am Rande der Tekesebene zwischen dem Kleinen Musart-Tal und den Mukur-Mutu-Tälern, aber immer zusammen mit Phyllit. Es ist anzunehmen, daß dieses gewiß sehr alte Konglomerat das Zeichen einer Diskordanz andeutet, zumal es so weit verbreitet ist; aber bei der Unklarheit der stratigraphischen Verhältnisse bleibt dies nur eine Vermutung. Auch über die Mächtigkeit der Bildungen der Phyllitgruppe läßt sich nur wenig Sicheres sagen, da in den Bruchstücken des von ihr zusammengesetzten sehr alten Gebirges, die Art der alten Dislokationen an den heute scheinbar konkordant liegenden Schichten nicht mehr zu erkennen ist; es ist daher zweifelhaft, ob in den Aufschlüssen nicht dieselben Schichten infolge von Faltung mehrmals wiederkehren. Aber ein gewisses Verhältnis zwischen der Mächtigkeit der verschiedenartigen Bildungen tritt dennoch hervor: der grauschwarze Phyllit ist am mächtigsten, der deutlich grüne Phyllit viel weniger entwickelt; Quarzit und Quarzitschiefer haben verhältnismäßig nur eine untergeordnete Bedeutung.

Die Tonschiefergruppe. — Der Übergang vom Phyllit zu den Bildungen dieser Gruppe scheint allmählich zu erfolgen. An manchen Stellen findet man den dunklen, plattigen Tonschiefer, den wir als den ältesten betrachten, schon so verändert, daß man ihn als Phyllit bezeichnen könnte. Dies wird aber an vielen Stellen dadurch verschleiert, daß oft die jüngeren granitischen Gesteine der inneren Ketten, die hauptsächlich von diesem Tonschiefer begrenzt werden, ihn schon auf eine beträchtliche Entfernung vom Kontakte stark verändert haben. Wo aber der Tonschiefer nicht durch die Kontaktmetamorphose verändert worden ist, ist er plattig oder blätterig und sehr ebenflächig; er ist fast schwarz, grauschwarz oder dunkelblaugrau gefärbt und zeigt sich, wenn er verwittert, an vielen Stellen mit einer braunen Rinde überzogen. Zuweilen enthält er Kalkschiefer, der an manchen Stellen in dünnbankigem Kalk übergeht. Aus solchem Tonschiefer besteht ein großer Teil der inneren Ketten nördlich vom Inyltsckek-Tal. Man findet ihn im Bayum-kol-Tal (s. Profil I, Taf. III), im Sary-dschass-Tal (s. Profil XII, Taf. IV) und in den äußeren Gebirgszügen. Was seine Mächtigkeit anbetrifft, so gilt davon dasselbe, was vom Phyllit gesagt worden ist.

Für jünger als den dunklen Tonschiefer halte ich weinroten und lebhaft grün gefärbten Tonschiefer, der zusammen mit rotem und grünem Radiolarit namentlich in der Umgebung des Kaündü-Tals vorkommt. Mit diesen Gesteinen wechsellagern Dolomit und dolomitischer, kristallinischer Kalk, die beide Crinoideenreste enthalten. Den bunten Schiefer und den Radiolarit, der reich an leider nicht mehr bestimmbaren Radiolarien ist, halte ich für devonisch. Auch der Dolomit hat sehr wahrscheinlich dasselbe Alter.

Außer diesen Bildungen kommen im zentralen Tian-Schan, namentlich in den äußeren Gebirgszügen, noch eine Reihe anderer Sedimente vor, die ohne jeden Zweifel jünger als die meisten der bisher erwähnten Bildungen sind, die aber wahrscheinlich auch einige von den jüngeren, für devonisch gehaltenen, faziell vertreten. Dies sind hauptsächlich graublauer und graugrüner, griffeliger und blätteriger Tonschiefer, worin z. B. am Kaschka-tur-Paß die schon erwähnten verdrückten Reste von Conularien vorkommen, sodann dunkler, fast schwarzer Kieselschiefer und grauwackenähnliche Gesteine. Ich kann aber über die Reihenfolge dieser Bildungen ebensowenig sagen wie über die stratigraphischen Verhältnisse der älteren paläozoischen Sedimente.

Man findet den blaugrauen Tonschiefer hauptsächlich auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals, im Kok-dschar-Tal, in der Umgebung des oberen Kapkak-Tals; er geht an manchen Stellen in Schieferton über und tritt auf ziemlich großen Strecken zusammen mit dem unterkarbonischen Kalk auf. Die Verhältnisse am Kaschka-tur-Paß, die so deutlich die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks auf den älteren paläozoischen Bildungen erkennen lassen (s. Profil VI), geben uns auch Auskunft über die Stellung des Tonschiefers gegenüber dem Kalk.

Wenn man nämlich vom Kaschka-tur-Paß nach Westen in das Kubergantü-Tal hinabsteigt, das ein Nebental des Kok-dschar-Tals ist, so sieht man auf beiden Seiten des Weges, der sich rasch nach Westen senkt, zunächst den gefalteten, blaugrauen Tonschiefer. Etwas weiter westlich verschwindet dieser Schiefer unter Schutt und Sumpfboden. Große Blöcke, die in dem Schutt umherliegen, bestehen nur aus Kalkkonglomerat. Steigt man nun nach Norden das Gehänge aufwärts, so sieht man, daß das Konglomerat scheinbar mit dem Tonschiefer wechsellagert; in Wirklichkeit ist dies aber nicht der Fall, sondern das Konglomerat fällt flach nach Norden ein, liegt diskordant auf dem gefalteten Tonschiefer, und die scheinbare Wechsellagerung wird dadurch hervorgerufen, daß eine große Anzahl von Längsverschiebungen Tonschiefer und Kalk zusammen in lange, schmale Schollen zerschnitten haben, die sich in Staffeln von Norden nach Süden senken. Es ist also kein Zweifel darüber, daß der Tonschiefer schon gefaltet war, als die unterkarbonische Transgression erfolgte; und dies Beispiel zeigt uns, daß zwischen Tonschiefer und dem Kalkkonglomerat eine stratigraphische Lücke vorhanden ist.

Konkordanz zwischen Tonschiefer und Kalk habe ich auch nur an wenigen anderen Stellen des Gebirges beobachtet, wo beide Bildungen zusammen stark disloziert worden sind. Es ist daher in der Tat sehr wahrscheinlich, daß diese Konkordanz nur vorgetäuscht wird und eine Folge der postkarbonischen Dislokationen ist.

Mit dem eben besprochenen Tonschiefer schließen die Bildungen der Tonschiefergruppe nach oben ab. Es ist dabei jedoch zu beachten, daß wir nach dem heutigen Stande unserer Kenntnisse die Frage nicht beantworten können, ob die erwähnten grauwackenähnlichen Gesteine und die fast schwarzen Kieselschiefer nicht vielleicht jünger sind als die Tonschiefer.

Der unterkarbonische Kalk. — Der unterkarbonische Kalk hat in unserem Gebiete eine größere Verbreitung als irgend ein Glied der älteren paläozoischen Bildungen; und obwohl diese Angabe im ganzen nur auf Schätzung beruht, so ist es doch nahezu sicher, daß sie richtig ist. Die große Verbreitung erklärt sich dadurch, daß der unterkarbonische Kalk nicht nur sehr große Teile des Gebirges fast allein zusammensetzt, sondern, daß er

auch aus den Gebieten der sedimentären Bildungen auf große Teile der granitischen Massive hinübergreift; er ist das Gebilde einer Transgression, und wir finden fast überall an seiner Basis, wo seine Unterlage aufgeschlossen ist, das Transgressionskonglomerat, das bald ein Kalkkonglomerat ist, wie über dem Tonschiefer am Kaschka-tur-Paß, bald ein polygenes Konglomerat, wie über den dislozierten Phylliten und Tonschiefern oder über den granitischen Massiven. Da der unterkarbonische Kalk fast überall bestimmbare Fossilien führt, so ist es verhältnismäßig leicht ihn zu erkennen. Schon Semonow hat die bezeichnenden Fossilien des Kohlenkalks darin gefunden und angegeben, daß er das obere Glied der paläozoischen Schichtenfolge sei. Ignatiew hat an der Stelle, wo der Itsch-kele-tasch von Norden in das Sary-dschass-Tal mündet, Productus giganteus und Pr. striatus gesammelt. An derselben Stelle oder doch nahe dabei und weiter im Osten am Kapkak-Paß hat vor kurzem auch Friederichsen unterkarbonische Fossilien gefunden.

Ich habe schon S. 100 erwähnt, daß der unterkarbonische Kalk östlich vom Issyk-kul in dem Maße unter den jungen Bildungen des Issyk-kul-Beckens hervortritt und an Ausdehnung zunimmt, wie sich der Terskei-Ala-Tau nach Norden dem Kungeu-Ala-Tau nähert, und daß der Kalk des Santasch-Passes wahrscheinlich unter den jungen Bildungen des Passes mit dem Kalk an dem südwestlichen Rande des Beckens von Karkará zusammenhängt. Auch noch weiter im Osten habe ich nur an wenigen Stellen ältere Bildungen gesehen, wohl aber den unterkarbonischen Kalk in großer Ausdehnung. Das Gebirge an den Rändern der alten Seebecken besteht hauptsächlich daraus, soweit es nicht von granitischen Gesteinen und von Porphyr zusammengesetzt wird. Man findet den Kalk, z. B. in den Bergen südlich und südöstlich von Karkará, in den Randketten des Gebirges an dem oberen Laufe des Tekes und weit und breit in den Gebirgszügen, die die Tekes-ebene im Süden begrenzen. In diesen Teilen des Gebirges, wo der nördliche Granitzug an Ausdehnung verliert, und wo sich, wie es scheint, die Achse des Terskei-Ala-Tau allmählich nach Osten senkt, greift der unterkarbonische Kalk von den Rändern des Sedimentstreifens, der die beiden großen Granitzüge des Terskei-Ala-Tau trennt, nach Süden und Norden auf die granitischen Massive hinüber. Wir finden ihn dort an vielen Stellen in transgressiver Lagerung über dem Granit. Wir beobachten ihn dagegen unter anderen Verhältnissen in den inneren hohen Ketten. Die geologische Übersichtskarte zeigt dort am Tüss-aschu-Paß Streifen des Kalks zwischen längsgestreckten Granitzügen. Es ist dunkelgrauer und heller Crinoideenkalk, der viele Fossilien, darunter Productus giganteus und Productus striatus, sowie Korallen führt. Der Kalk ist steil gestellt, gefaltet und im Kontakt mit dem Granit verändert worden. Auf eine beträchtliche Entfernung vom Passe nach Westen bestehen die höchsten Teile des Sary-dschass-Tau daraus; und es kann auch kein Zweifel darüber aufkommen, daß seine Fortsetzung nach Osten der kristallinische Kalk der hohen zentralen Kette ist, die wir bei der Besprechung des Bayum-kol-Tals noch näher kennen lernen werden. Diese wenigen Angaben genügen schon, die große Verbreitung des unterkarbonischen Kalks zu zeigen. Über seine Mächtigkeit vermag ich nichts Sicheres anzugeben. Die transgressiv liegenden, oft wenig gestörten Schollen in den granitischen Massiven sind zum Teil stark abgetragen worden, und außerhalb dieser Massive ist der Kalk, zusammen mit den älteren Sedimenten, so stark disloziert worden, daß es oft unmöglich ist, die Art der Lagerung zu erkennen oder nur zu entscheiden, ob der Kalk in seiner ganzen Mächtigkeit aufgeschlossen ist. Vor allem ist aber

zu beachten, daß er, da er ein Transgressionsgebilde ist, an den verschiedenen, zum Teil ziemlich weit voneinander entfernten Stellen des Gebirges, je nachdem diese von der Transgression früher oder später erreicht worden sind, auch verschieden mächtig sein muß.

Man kann beobachten, daß von dem unterkarbonischen Kalk hauptsächlich zwei Varietäten vorkommen: nämlich dichter dunkelgrauer, oft dolomitischer Kalk und hellerer Crinoideenkalk. Crinoideenreste findet man zwar fast überall, doch zeigt es sich, daß sie an einzelnen Orten das Gestein besonders dicht erfüllen. Da diese gewiß voneinander verschiedenen Bildungen auch getrennt vorkommen, so ist es wahrscheinlich, daß sie zueinander in einem bestimmten statigraphischen Verhältnis stehen; es ist auch möglich, daß sie sich an den verschiedenen Stellen des Gebirges vertreten. In der zentralen Kette, z. B. am Pik Nikolai Michailowitsch, der mehr als 6000 m hoch ist (s. Abbildung 2 auf Taf. I), ist der Gegensatz in der Färbung des dunklen und hellen Kalks durch die Metamorphose so lebhaft geworden, daß man deutlich erkennen kann, wie der helle, fast rein weiße Kalk durch immer häufigeres Auftreten von dünnen, dunklen Schichten in den fast schwarzen, körnigen Kalk übergeht. Dies ist aber Wechsellagerung und nicht Wiederholung derselben Schichten als eine Folge von Faltung.

Der dichte, dolomitische, dunkelgraue Kalk kommt, soweit meine Beobachtungen reichen, hauptsächlich an den nördlichen Abhängen des Gebirges vor, z. B. an dem südlichen Rande der Tekes-Ebene zwischen dem Großen Musart-Tal und dem Bayum-kol-Tal, zwischen diesem Tal und den Tekes-Quellen und noch weiter im Westen am südlichen Rande des Karkará-Beckens; er führt beinahe überall eine reiche Fauna, die fast nur bekannte und weltweit verbreitete Arten enthält. Namentlich ist er reich an Korallen und Brachiopoden, führt aber an den meisten Stellen auch Foraminiferen. Fast überall ist Productus giganteus häufig, daneben kommt auch Productus striatus vor; und von den Korallen sind außer großen Einzelkorallen besonders die stockbildenden Korallen der Gattungen Syringopora und Lithostrotion verbreitet.[1]) An manchen Stellen, z. B. südlich von Karkará und in der Umgebung des unteren Bayum-kol-Tals, besonders aber in der Umgebung der Mukur-Mutu-Täler, kann man deutlich beobachten, daß der dunkelgraue Kalk, der dicke Bänke zusammensetzt, nach oben in einen dunklen, dünnplattigen oder dünnbankigen Kalk übergeht, worin die Fossilien sehr häufig verkieselt sind.

Der Crinoideenkalk, der im ganzen heller gefärbt zu sein scheint als der eben besprochene dunkelgraue Kalk, kommt hauptsächlich an den südlichen Abhängen der äußeren Gebirgszüge und in den inneren Ketten vor; er geht an einigen Stellen in Crinoideenbreccie über, z. B. südlich vom Tüss-aschu-Paß und enthält dieselben Brachiopoden wie der dunkle Kalk, besonders häufig Productus giganteus und Productus striatus. Korallen lassen sich darin aber seltener beobachten. Ob aber diese Unterschiede eine stratigraphische Bedeutung haben, kann mit Hilfe der bisherigen Beobachtungen noch nicht sicher bestimmt werden; denn diese werden, außer durch die Dislokationen und die starke Abtragung auch durch die Metamorphose erschwert, die gegen die hohen zentralen Teile des Gebirges hin, mehr und mehr die unterkarbonischen Bildungen verändert hat.

[1]) Das gesamte auf den Reisen im zentralen Tian-Schan sowohl auf der Südseite als auf der Nordseite gesammelte sehr umfangreiche Faunenmaterial ist augenblicklich noch in Bearbeitung. Die Veröffentlichung der Ergebnisse der Bestimmung wird sich noch einige Zeit verzögern. G. Merzbacher.

Es fragt sich nun, ob alle bisher im zentralen Tian-Schan gefundenen karbonischen Bildungen, die in verschiedenen Teilen unseres Gebietes, wie wir gesehen haben, veränderliche Mächtigkeit sowie deutlichen Wechsel der petrographischen Beschaffenheit zeigen, zur unteren Abteilung des Karbons zu rechnen sind. Ich neige hiezu, da mehrere Gründe hiefür sprechen: Obwohl die Fossilien, die im Laufe der Expedition an verschiedenen, zum Teil weit voneinander entfernten Stellen in den karbonischen Bildungen des zentralen Tian-Schan gesammelt wurden, erst zum geringen Teil genauer untersucht worden sind, so hat sich doch schon jetzt soviel ergeben, daß die verschiedenen Faunen, sowohl die aus dem dunkelgrauen als auch die aus dem Crinoideenkalk eine auffallende Übereinstimmung zeigen. An den meisten Stellen ist zudem Productus giganteus das bezeichnende Leitfossil. Fusuliniden, die auf der südlichen Seite des Tian-Schan in den oberkarbonischen Bildungen so weit verbreitet sind, fehlen dagegen auf der Nordseite in dem zentralen Gebirgsstück vollständig. Gegen das Vorkommen von oberkarbonischen Bildungen spricht außerdem die Tatsache, daß Kalke mit Productus giganteus auf einer großen Strecke des nördlichen zentralen Tian-Schan nach oben in salinare Sedimente übergehen, deren Bildung, wie wir bald sehen werden, mit einer Regression des Meeres zusammengehängt hat. Es ist also wahrscheinlich, daß die karbonischen Bildungen des nördlichen zentralen Tian-Schan zu der oberen Abteilung des unteren Karbons, nämlich zu der Stufe des Productus giganteus, gehören.

Obgleich es aus den erwähnten Gründen nicht möglich ist anzugeben, wie groß die Mächtigkeit der unterkarbonischen Bildungen im Sary-dschass-Tau und in der zentralen Kette ist, so scheint es mir doch fast sicher zu sein, daß sie dort größer ist als in den äußeren Gebirgszügen und daß sie von Süden gegen Norden allmählich abnimmt. Die Aufschlüsse auf der südlichen Seite des Sart-dschol-Passes lassen z. B. erkennen, daß

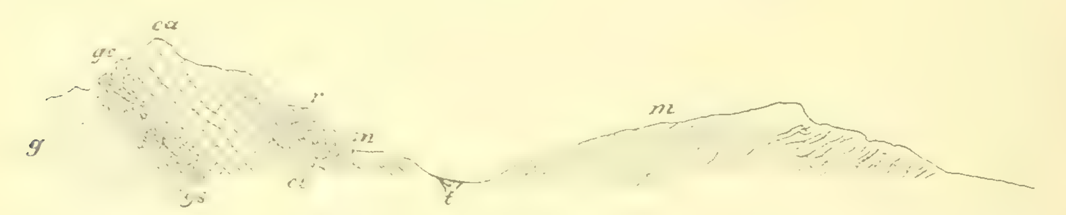


Fig. V. Profil durch die linke Seite dee Kok-dschar-Tals, ca. 3 km südöstlich vom Sart-dschol-Paß. Mafsstab 1 : 10,000.

g Granit, gs rote, sandig-kalkige Schotter aus Granitgrus mit Einzelkorallen, gc Kalk mit Granitgerölle, ca dichter, rauchgrauer und rötlicher Crinoideenkalk mit Productus giganteus und Productus striatus, cb dünnplattiger Kalk, r bunte plattige Mergel, m grauer und graugrüner Mergelton und Mergel mit Gips, t Erdtrichter.

dort der wenig mächtige graue Kalk mit Productus giganteus nach oben in rötlichen Kalk und darauf in bunte, Gips führende Mergel übergeht, daß also die Mächtigkeit dieses Kalkes auffallend gering ist gegenüber der des unterkarbonischen Kalks am Tüss-aschu-Paß und in der zentralen Kette.

Aber nicht nur die unterkarbonischen Bildungen, sondern auch die jüngeren Sedimente der karbonischen Schichtenfolge werden um so vollständiger und mächtiger, je mehr man sich von Norden dem südlichen Rande des Tian-Schan nähert. Ein vermittelndes Vor-

kommen ist mir vom Ischtyk-Paß bekannt, wo unterkarbonischer Kalk mit Productus giganteus mächtig entwickelt ist. Auch noch weiter südlich sind unterkarbonische Bildungen in außerordentlicher Mächtigkeit sehr weit verbreitet, hauptsächlich Dolomit, dolomitischer Kalk und Sandsteine. Die Gebirgszüge auf der rechten Seite des Kok-schaal-Flusses bestehen zum größten Teil hieraus. Bei Utsch-Turfan enthalten diese Bildungen bis zu zwei Meter mächtige Bänke aus Brachiopodenschalen, namentlich aus Schalen des Productus giganteus.[1])

Das untere Oberkarbon ist im Süden durch schwarze, an Gastropoden reiche Kalke, die Spirifer mosquensis als Leitfossil enthalten, vertreten, das mittlere Oberkarbon durch helle Fusulinenkalke. Am weitesten verbreitet sind die in petrographischer Beziehung sehr mannigfaltigen Bildungen des obersten Karbons. Die großen Faltenbögen, die zusammen bisher in der Literatur als Kokschaal-Tau bezeichnet wurden, bestehen zum größten Teil hieraus; diese Bildungen führen überall Schwagerina princeps, und enthalten eine Fauna, die ganz erstaunlich mit der des Uralischen Schwagerinenkalks übereinstimmt.

Aus dieser Verbreitung der verschiedenen Glieder des Karbons ergibt sich also, daß die karbonischen Bildungen auf der südlichen Seite des Tian-Schan vollständig entwickelt sind, daß dagegen in den nördlich daran grenzenden Teilen des Gebirges und im zentralen Tian-Schan nur die Kalke der Stufe des Productus giganteus vorhanden sind, und daß diese Kalke von Süden nach Norden an Mächtigkeit abnehmen.

Die intramittelkarbonischen gebirgsbildenden Bewegungen haben große Teile des Tian-Schan getroffen; wir können ihre Spuren auf der südlichen Seite des Gebirges deutlich in den stratigraphischen Diskordanzen der oberkarbonischen Sedimente erkennen. In dem nördlichen Teile des zentralen Tian-Schan, wo diese Bildungen fehlen, sehen wir die einzigen Spuren der beginnenden Bewegungen in den Bildungen der bunten, Gips führenden Mergel und roten Sandsteine südlich vom Sart-dschol-Paß, die eine Regression des karbonischen Meeres anzeigen. In der Gegend des Sart-dschol-Passes hat die Regression begonnen, nachdem die roten, plattigen Kalke, die Productus giganteus führen, gebildet worden waren.

Bunte Mergel, roter Sandstein und Konglomerat. — Dies sind die jüngsten paläozoischen Sedimente des nördlichen zentralen Tian-Schan; ich selbst habe sie hauptsächlich

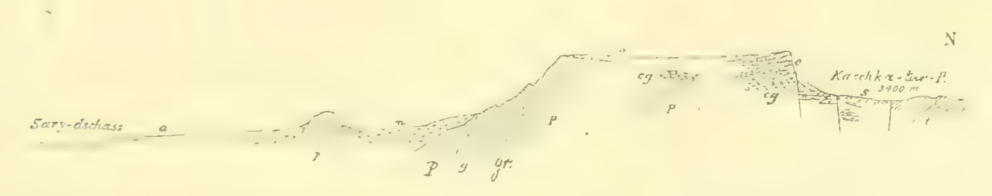


Fig. VI. Profil durch den rechten Talrand des Sary-dschass-Tals am Kaschka-tur-Paß.
g Gneis, p Phyllit, gr grauwackenähnliches Gestein, t graublauer Tonschiefer, cg Quarzitkonglomerat der Transgression, c Kalk mit Productus giganteus, m alte Moräne, s Schutt, a Sumpf und Moorböden.

---

[1]) Merzbacher, l. c., S. 45. Über den geologischen Bau des südlichen Tian-Schan habe ich soeben eine Arbeit vollendet, welche unter dem Titel: „Geologische Untersuchungen im südlichen Tian-Schan nebst Beschreibung einer unterkarbonischen Brachiopodenfauna aus dem Kukurtuk-Tal“ im Neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paläontologie in Stuttgart demnächst erscheinen wird.
Der Verfasser.

auf der südlichen Seite des Sart-dschol-Passes im Kok-dschar-Tal gefunden. Man trifft sie aber auch in den benachbarten, weiter westlich gelegenen Teilen des Gebirges; denn, wie wir schon bei der Besprechung des nördlichen Granitzugs (S. 99 f.) der äußeren Gebirgszüge gesehen haben, stimmen die bunten Mergel des Dschütü-oguss-Tals, die Friederichsen gefunden hat, mit dem bunten Mergel des Sart-dschol-Passes überein; sie sind aber noch weiter im Westen bekannt, wenn auch ihre stratigraphische Stellung nicht erkannt worden ist. Schon Semonow[1]) berichtet von dem Konglomerat der Buam-Schlucht, wo der Tschu, aus dem Issyk-kul-Becken kommend, die westlichen Ausläufer des Kungeu-Ala-Tau durchbricht. Die Seiten des Durchbruchtals bestehen dort zum großen Teil aus Bildungen, die denen des Sart-dschol-Passes und des Dschütü-oguss-Tals gleichen; es kommen aber außerdem noch mächtig entwickelte Konglomerate vor. Ganz dieselben Bildungen habe ich auch noch weiter westlich an den nördlichen Abhängen des Alexander-Gebirges südlich von Pischpek gesehen: es sind auch dort bunt gefärbte Mergel, rotviolette und rote Sandsteine sowie grobes Konglomerat.

In der Buam-Schlucht finden wir außerdem die folgenden Verhältnisse: An dem Ausgang der Schlucht sieht man etwas talaufwärts von der Poststation Dschil-aryk, wo Gneis und Gneisgranit anstehen, unter fluvioglazialem Schotter und Gehängeschutt auf der linken Seite des Tschu zuerst roten und violetten Tonsandstein und bunten Mergel, die höchst wahrscheinlich das Liegende der weiter talaufwärts sichtbaren Schichtenfolge bilden. Ein wenig weiter östlich steht dicht am Flusse stark zersetzter, violetter Porphyr an, der wahrscheinlich in den roten Sandsteinen und bunten Mergeln liegt. Noch weiter talaufwärts folgt darüber in mannigfacher Wechsellagerung roter Sandstein, blauer, grauer und grüner Mergel und grobes Konglomerat. Dies Konglomerat enthält sehr große Blöcke, die zum Teil aus Kalk, zum Teil aus kristallinischen Gesteinen bestehen.

Friederichsen[2]) hat dicht am Tschu einen Minettegang angetroffen, der feinkörniges Konglomerat durchbrochen hat. Da ich diesen Teil des Gebirges nur flüchtig gesehen habe, so kann ich über die Lagerungsverhältnisse der roten Sandsteine, bunten Mergel und groben Konglomerate und ihre Beziehungen zu den älteren Bildungen in der Umgebung des Tschu-Tals keine Angaben machen. Ich sah vom Flusse aus nur, daß die bunten Sedimente auf dessen linker Seite hauptsächlich nach Süden, auf der rechten Seite zum Teil nach Norden einfallen.

Südlich vom Sart-dschol-Paß, auf der rechten Seite des Kok-dschar-Tals, sind dagegen die Lagerungsverhältnisse klarer. Da sie sowohl über die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks auf Granit als auch über den allmählichen Übergang des unterkarbonischen Kalks in die bunten Mergel ausgezeichneten Aufschluß geben, so wollen wir sie hier genauer betrachten.

Von Karkará führt ein von den Kirgisen benutzter Weg durch das Gebirge über den ungefähr 3700 m hohen Sart-dschol-Paß nach Süden in den unteren Teil des Kok-dschar-Tals. Auf diesem Wege kommt man aus dem alten Seebecken von Karkará zunächst am Fuße des Gebirges in einen breiten von Osten nach Westen verlaufenden Gürtel niedriger waldreicher Hügel. An den wenigen Stellen, die von der Vegetation ent-

---

[1]) Semonow, Peterm. Mitteil., 1858, S. 358 und Zeitschr. Gesellsch. f. Erdkunde, Berlin, 1869.

[2]) Friederichsen, l. c., S. 33, petrograph. Anhang, S. 248.

blößt sind, sieht man, daß diese Hügel aus lebhaft rot gefärbten Sedimenten bestehen; es sind hauptsächlich weiche, rote, dann blaugraue und graue Mergel, Mergeltone, Tonsandsteine und Glimmer führender, dünnplattiger Sandstein: dieselben Bildungen, worin nordwestlich von Karkará[1]) eine jungtertiäre Fauna von Süßwassergastropoden vorkommt. Südlich von diesen Hügeln erheben sich zuerst vereinzelt, dann in geschlossenem, O.W. bis O.N.O. streichendem Zuge steil nach Süden einfallende Schollen von dolomitischem und plattigem, grauem Kalk. In dem plattigen Kalk findet sich ziemlich häufig Productus giganteus, in dem dolomitischen Kalk schlecht erhaltene Brachiopoden, Korallen und Bryozoen. Hoch an die Kalkschollen hinan, 300 bis 400 m über die Sohle des alten Seebeckens von Karkará reichen die verhüllenden tertiären Bildungen und umgeben stellenweise die Kalkschollen von allen Seiten. Zwischen unterkarbonischem Kalk und tertiären Bildungen führt nun der Weg zum Sart-dschol-Paß, zuerst nach Süden, dann nach Südosten zum Teil durch bewaldetes Gebirge. Dicht unterhalb der oberen Baumgrenze tritt an einigen Stellen Granit auf, dann noch einige große Schollen von hellem, unterkarbonischem Crinoideenkalk, deren granitische Unterlage aber nicht sichtbar ist. Oberhalb der Baumgrenze zeigt sich bis zum Paß, zwei bis drei Stunden weit nur Granit. Es ist dies das östlichste der auf der geologischen Übersichtskarte noch eingezeichneten Stücke des nördlichen Granitzuges.

Man steigt von Norden allmählich zum Paß hinauf, der in einer flachen Einsenkung des stark abgetragenen granitischen Hauptkammes liegt. Ganz in der Nähe des Passes findet man schon auf der Nordseite große Blöcke und kleinere Stücke von grauem unterkarbonischem Kalk. Daraus ergibt sich, daß einst der Mantel der unterkarbonischen Bildungen auf der nördlichen Seite des Hauptkammes bis in die Höhe des Passes gereicht haben muß. Westlich vom Paßeinschnitt erscheint in einiger Ferne in der Höhe des Hauptkammes, deutlich horizontal geschichtetes Gestein; es scheint also dort noch eine größere Scholle des unterkarbonischen Kalks erhalten zu sein.

Auf der steil geneigten Südseite des Hauptkammes fallen, nicht weit unterhalb der Paßhöhe, zahlreiche Konglomeratblöcke auf, die aus Kalk- und Granitgeröllen zusammengesetzt sind; in einzelnen Blöcken herrschen die Granitgerölle so vor, daß die Blöcke fast ganz daraus bestehen, in anderen verdrängen wieder die Kalkgerölle den Granit bis auf wenige kleine Stücke, die in der einschließenden Kalkmasse zerstreut liegen. Wenn man nun weiter nach Süden in das Kok-dschar-Tal hinabsteigt, so stößt man ungefähr 500 bis 600 m unterhalb der Paßhöhe in dem Bett des vom Paß herabfließenden Baches an einen Felsriegel, der vom Wasser durchschnitten worden ist. Dieser Riegel besteht aus O.N.O. streichendem, schwach nach Norden einfallendem, unterkarbonischem Kalk, den man auch noch eine Strecke weiter zu beiden Seiten des Weges in den vorspringenden Kanten des Gehänges beobachten kann. Es ist nun bemerkenswert, daß hier der Kalk auf allen Seiten vom Granit umgeben ist; die Grenze zwischen Kalk und Granit läßt sich allerdings an dieser Stelle nicht feststellen, weil sie von Moränen und Gehängeschutt verdeckt wird. Aber etwas weiter am Gehänge abwärts, finden wir Verhältnisse, die ich in der folgenden Skizze (Figur VII) darzustellen versucht habe: Im Hintergrunde erheben sich einige Gipfel, die aus Granit bestehen und zum Zuge des Hauptkammes gehören, im Vordergrunde am

[1]) Merzbacher, l. c., S. 4.

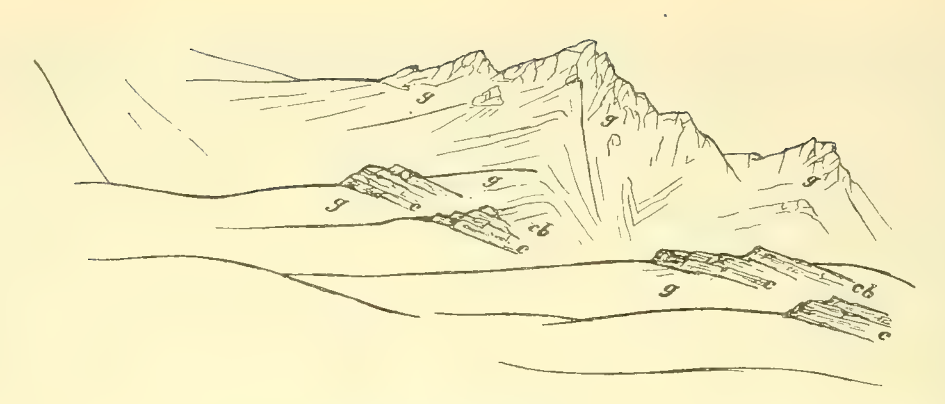


Fig. VII. Reste von ingressiv liegendem Schotter aus Konglomerat und unterkarbonischem Kalk am Sart-dschol-Paß.

g granitische Gesteine, c Konglomerat aus Granit und Kalkgeröllen, darunter sandige Schichten, die aus Granitgrus bestehen, darin Korallen, cb unterkarbonischer Kalk mit Productus giganteus und Productus striatus.

Gehänge aber liegen vereinzelte, getrennte Schollen von geschichtetem Konglomerat und unterkarbonischem Kalk. Das Konglomerat, das aus Granit und Kalkgeröllen besteht, liegt an der Basis des Kalks unmittelbar auf Granit, der auf allen Seiten ansteht und auch zwischen den Schollen in den Furchen des Gehänges angeschnitten ist. Die Schollen setzen auf ihrer Rückseite am Granit ab und es kann kein Zweifel darüber aufkommen, daß sie einst in einem langgestreckten Streifen zusammengehängt haben.

Da die Schollen in einer flachen Einsenkung des Gehänges liegen, an welchem man, um in das Kok-dschar-Tal zu gelangen, in Südrichtung etwas hinansteigen muß zu jener Stelle des Gehänges, an das sie sich anzulehnen scheinen, so trifft man oberhalb der Schollen wieder auf Granit; dann senkt sich das Gehänge zur Tiefe des Kok-dschar-Tals. Auf dem Abstiege dahin zeigt sich nochmals eine Kalkscholle von geringem Umfang, deren Bänke mäßig nach Norden geneigt sind; dann verdeckt dichte Vegetation das anstehende Gestein. Ganz zuletzt kann man noch dünnplattigen, Glimmer führenden roten und grünlichen Sandstein beobachten, der O.N.O. streicht und steil nach Süden einfällt. An dieser Stelle läßt sich zwar die Grenze zwischen Kalk und Sandstein der Vegetation wegen nicht feststellen; doch kann man immerhin sehen, daß sich der unterkarbonische Kalk in der östlichen Fortsetzung des Streichens schwach nach Norden einfallend, an den Granit anlehnt, daß bunte Mergel und Sandstein etwas südlich davon sein Hangendes bilden, und daß alle diese Bildungen in einem scharfen flexurartigen Bogen nach Süden zur Tiefe des Kok-dschar-Tals umbiegen.

Über das Lagerungsverhältnis zwischen dem unterkarbonischen Kalk und den bunten, Gips führenden Mergeln und Sandsteinen finden wir weiter östlich auf der rechten Seite des Kok-dschar-Tals Aufschluß. Etwas talaufwärts vom Wege, der vom Sart-dschol-Paß, dem schon erwähnten Bache folgend, nach Süden hinab zum Kok-dschar führt, mündet ein von Norden kommendes kleines Seitental. Der Hintergrund dieses Seitentals liegt im Granit und man sieht dort an der Grenze von Granit und Sedimenten und weiter südlich das folgende Profil (s. Profil V): Dicht über dem Granit liegt plattiger, zum Teil

knolliger, rötlicher sandiger Kalk, worin abgeriebene Brachiopodenschalen vorkommen. Zwischen diesem Kalk und dem Granit findet man ein rotes klastisches Gestein, das aus kleinen aufbereiteten Bruchstücken des Granits, namentlich aus Quarz und Feldspat besteht. Schon in diesen grusig-sandigen, wenig mächtigen Schichten erscheinen öfters Einzelkorallen. Über dem rötlichen plattigen Kalk folgt dickbankiger Kalk, der in den unteren Lagen noch rötlich gefärbt ist und gerundete Gerölle von Granit enthält, in den oberen Lagen aber verschwinden die Gerölle mehr und mehr; es kommen jedoch noch Bruchstücke von Quarz, von zersetztem Feldspat und vor allem von dunklem Glimmer darin vor. Schon in diesen Lagen führt der Kalk sehr viele Fossilien: stockbildende Korallen wie Lithostrotion, sehr häufig Productus striatus, dann Productus giganteus, Productus inflatus, Productus longispinus u. a. Die darüber folgenden Bänke bestehen aus dichtem hellgrauen Kalk, worin Crinoideenreste und dieselben Fossilien vorkommen, wie in den tieferen Bänken. Dieser Kalk geht nach oben in dünnplattigem rötlichem, Crinoideenreste enthaltendem Kalk über, der vollständig dem rötlichen Kalk gleicht, welchen Friederichsen als Geröll im Flussbett des Dschütü-oguss-Tals gesammelt hat (siehe S. 100). Darüber folgt bunter mergeliger Kalk, dann plattiger bunter Mergel, der hellen Glimmer und Tongallen führt; darauf weiche graue und graugrüne, gipshaltige Mergel und zuletzt roter, plattiger Sandstein. Der Gips bildet weiße gebänderte Einlagerungen in den Mergeln und seitlich von dem eben beschriebenen Profil findet man auf der Sohle des Seitentales mit Wasser angefüllte Erdtrichter.

Hier sehen wir also deutlich, daß der unterkarbonische Kalk auf dem Granit transgressiv liegt, daß der massige graue Kalk nach oben in rötlichen Kalk, dieser dann in bunte, Gips führende Mergel übergeht, und daß darauf dann der rote plattige Sandstein folgt.[1]) Ich habe aber an dieser Stelle kein Konglomerat anstehend gefunden, das mit den bunten Sedimenten wechsellagert, sondern nur lose Blöcke aus Granit und Kalkgeröllen gefunden.

Aus allen diesen Tatsachen ergibt sich zusammen mit den über die Verbreitumg der karbonischen Bildungen auf der südlichen Seite des Tian-Schan[2]) gemachten Beobachtungen folgendes: Die marine Schichtenfolge des Karbons ist vollständig auf der südlichen Seite des Tian-Schan entwickelt; namentlich das Unterkarbon tritt dort in weiter Verbreitung und in großer Mächtigkeit auf. Im Hangenden des Kalks mit Productus giganteus tritt dort mehr und mehr Sandstein auf; dann stellen sich Kalk- und Quarzkonglomerate ein. In den Geröllen der Kalkkonglomerate kommen unterkarbonische Fossilien vor. Diese grobklastischen Bildungen gehören also wahrscheinlich zum mittleren und oberen Oberkarbon; aber auch an anderen Stellen, wo die Kalke der Stufe des Spirifer mosquensis zahlreiche Fossilien führen, wie z. B. bei Kara-dschul am Südrand, westlich von den Salzsümpfen des Schorköl, erkennt man deutlich an der Beschaffenheit der Bildungen wesentliche Abnahme der ehemaligen Wassertiefe. In die Zeit des unteren und mittleren Oberkarbons fällt eine Phase der gebirgsbildenden Bewegungen, die einen großen Teil des Tian-Schan getroffen haben. Die in petrographischer Beziehung mannigfaltigen Bildungen

[1]) Einen ähnlichen Übergang des unterkarbonischen Kalks in salinare Bildungen habe ich auch in den nordöstlichen Vorketten, im Temurlik-Tau beobachtet, im Dschidschen Tale. G. Merzbacher.

[2]) Siehe meine S. 111 erwähnte, demnächst erscheinende Abhandlung.

des oberen Oberkarbons liegen diskordant auf den älteren karbonischen Bildungen; sie enthalten Schwagerina princeps und, abgesehen von der Gattung Enteletes, eine Fauna, die vollständig mit der Fauna des uralischen Schwagerinenkalks übereinstimmt (siehe S. 111). Von der karbonischen Schichtenfolge ist hingegen in den mittleren und nördlichen Teilen des zentralen Tian-Schan nur der Kalk mit Productus giganteus gefunden worden. Dieser Kalk ist in der zentralen Kette und im Sary-dschass-Tau ohne Zweifel mächtiger als an vielen Stellen der äußeren nördlichen Gebirgszüge, wo er nach oben erst in bunte, Gips führende Mergel, dann in rote Sandsteine und Konglomerate übergeht. Auch dort weisen Mergel auf Abnahme der Wassertiefe, das heißt auf die beginnende Regression des Meeres hin. Die großen zum Teil eckigen Blöcke in den Konglomeratbänken der Buam-Schlucht, wovon manche mehr als einen Meter Durchmesser haben und also nicht weit transportiert sein können, verraten die Nähe von Landflächen und dadurch auch, daß mit der Regression des Meeres die gebirgsbildenden Bewegungen begonnen haben.

Die früher erwähnte geringere Mächtigkeit des unterkarbonischen Kalks im Kok-dschar-Tal läßt verschiedene Deutungen zu: entweder hat die Transgression die granitische Unterlage dort später erreicht, als im Gebiet der zentralen Kette und des Sary-dschass-Tau, oder die Regression hat dort früher begonnen und die bunten Sedimente vertreten einen Teil des unterkarbonischen Kalks, oder aber, und dies ist am wahrscheinlichsten: die Transgression ist über eine gebirgige Oberfläche vor sich gegangen.

Wie dem nun aber auch sei, so scheinen marine Sedimente jedenfalls nach der Ablagerung des Kalks mit Productus giganteus und nach der Regression des Meeres in dem Gebiet des nördlichen zentralen Tian-Schan nicht mehr gebildet worden zu sein. Die bunten Sedimente kommen dort, soweit die bisherigen Beobachtungen reichen, nur an den nördlichen Abhängen des Gebirges vor; sie setzen einen langen und verhältnismäßig schmalen Streifen zusammen, der sich mit manchen Unterbrechungen vom Kok-dschar-Tal längs der nördlichen Seite des Terskei-Ala-Tau über das Durchbruchstal des Tschu am westlichen Ende des Issyk-kul nach Westen bis zu den nördlichen Abhängen des Alexander-Gebirges erstreckt. Verlauf und Ausdehnung dieses Streifens, wie sie sich ungefähr aus der jetzigen Lage der verschiedenen Reste der bunten Sedimente ergeben, mögen in Wirklichkeit etwas anders gewesen sein; denn vor allem ist deren Absatz von Lage und Ausdehnung der alten Gebirgsrümpfe, die von der unterkarbonischen Transgression vermutlich nur zum Teil betroffen worden sind, abhängig gewesen. Es kann kein Zweifel darüber herrschen, daß große Teile dieser Gebirgsrümpfe uns in den heute noch sichtbaren granitischen Massiven des Terskei-Ala-Tau und seiner östlichen Fortsetzung erhalten geblieben sind, denn die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks über Granit ist nicht nur am Sart-dschol-Paß und im Kok-dschar-Tal, sondern auch an vielen anderen Stellen, namentlich im Gebiet des südlichen äußeren Granitzuges sichtbar. Die geringe Mächtigkeit der unterkarbonischen Bildungen und ihre Lagerungsverhältnisse am Sart-dschol-Paß weisen darauf hin, daß die Transgression dort in der Tat über einer sehr unebenen Oberfläche vor sich gegangen, und daß sie vielleicht an manchen Stellen mehr eine Ingression gewesen ist. Wir kennen allerdings nicht das Maß der Veränderungen, welche die äußeren Gebirgszüge des nördlichen zentralen Tian-Schan und die westlich davon gelegenen Teile des Terskei-Ala-Tau durch die späteren gebirgsbildenden Bewegungen erlitten haben und vermögen deshalb auch nicht zu beurteilen, wie weit die

Höhenunterschiede, die heute zwischen diesen Teilen des Gebirges bestehen, abgesehen von der Abtragung, erst später entstanden sind. Wahrscheinlich ist es aber, daß die alten Gebirgsstücke, worin die granitischen Massive besonders ausgedehnt gewesen sind, zur Zeit der unterkarbonischen Transgression verschiedene Höhe gehabt haben, sodaß sie also von der Transgression nicht alle oder doch nicht gleichmäßig getroffen worden sind. Die bisherigen Beobachtungen lassen ferner schon erkennen, daß die alten paläozoischen Sedimente in unserem Gebiet nach Osten mehr und mehr an Ausdehnung zunehmen, wo die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks sowohl über Granit als auch über den alten paläozoischen Sedimenten noch am meisten sichtbar wird, das ist zwischen dem oberen Teile des Sarydschass-Tals im Westen und dem großen Musart-Tal im Osten. Vielleicht hängt dies zusammen mit einer ursprünglichen Erniedrigung des Gebirges durch Senkung der alten Faltenachsen nach N.O. unter Zunahme der Sedimente und Abnahme der granitischen Massive.

Die tertiären Bildungen.

Durch Semonow und Sewerzow, sowie durch spätere Reisende sind uns aus vielen Teilen des Tian-Schan, sowohl von den Rändern als auch aus dem Inneren des Gebirges, rote Sedimente bekannt geworden, die durch ihre Beschaffenheit und durch ihre Lagerungsverhältnisse auf den ersten Blick verraten, daß sie sehr junge Bildungen sind. Semonow[1]) erwähnt solche Bildungen vom Issyk-kul, namentlich aber von der sogenannten Dschalanasch-Hochfläche, die auf der nördlichen Seite der östlichen Ausläufer des Kungeu-Ala-Tau liegt. Sewerzow[2]) hat rote Sedimente, hauptsächlich Sandstein, Steinsalz führenden Ton und Konglomerat, aber auch noch jüngere weniger feste und geschichtete Bildungen in weiter Verbreitung zwischen dem Issyk-kul und dem Tschatyr-kul im Gebirgsland des Naryn gesehen. Stoliczka,[3]) der von Kaschgar aus den Tschatyr-kul besucht hat, berichtet von gelblichen und rötlichen Tonen, die Konglomeratbänke enthalten und eine breite Zone an dem nördlichen Rande der Kaschgarischen Niederung zusammensetzen, ferner von rotem Sandstein und Konglomerat, die in den Gebirgszügen südlich vom Tschatyr-kul in der Umgebung des Tojun-Tals vorkommen und die zum Teil von basaltischen Gesteinen durchbrochen worden sind. Alle Forschungsreisende, die den Tian-Schan später bereisten, haben die roten Sedimente auch in anderen Teilen des Gebirges angetroffen. Romanowsky und Muschketow haben sie in den westlichen und nördlichen Teilen des Gebirges in weiter Verbreitung gesehen und Bogdanowitsch[4]) und Obrutschew[5]) haben gezeigt, daß sie die Ränder des östlichen Tian-Schan und des Bei-Schan begleiten und zwischen die Gebirgszüge eindringen. Die neueren Forschungen haben nun ergeben, daß sie sogar in den höchsten Teilen des Gebirges, nämlich im zentralen Tian-Schan vorkommen. Ich habe sie zwischen dem Bedel- und dem Ak-bel-Paß, sowie

[1]) Semonow, Peterm. Mitteil., 1858, S. 357 und 360.

[2]) Peterm. Mitteil., Ergänzungsheft Nr. 42, S. 13, 32 und 48 f. Nr. 43, S. 13 f., 42 f., 69 f. und 85 f.

[3]) Record Geolog. Survey of India, 1874, VII und Quaterly Journal, 1874, XXX.

[4]) Ergebnisse der Tibet-Expedition des M. W. Pewtzow. Bd. II. Geologische Untersuchungen von K. J. Bogdanowitsch. Petersburg 1892 (russ.).

[5]) Obrutschew W. A., Zentral-Asien, Nördliches China und Nan-Schan. 2 Bde. Petersburg 1900 und 1901 (russ.). Siehe besonders Bd. II, S. 647 f.

im Quellgebiet des Kara-sai gesehen, wo sie in der Nähe der höchsten Erhebungen mehr als 3600 m hoch liegen (Merzbacher, l. c., S. 63).

Friederichsen hat sie westlich davon beobachtet, nämlich am Unterlaufe des Orto-Utsch-kul, das ist an den südlichen Abhängen des Terektü-Tau nördlich vom Irtasch. Nach seinem Bericht kommen dort noch in der Höhe von 3700 m rote und braunrote Konglomerate und Sandsteine vor. Weiter im Osten hat Friederichsen[1] im Sary-dschass-Tal in dem Einschnitt des Tschilun, der ein linker Nebenfluß des Sary-dschass ist, rötliche, geschichtete Sande und Konglomerate in der Höhe von 3000 m gesehen; die gleichen Bildungen habe ich weiter nach Osten verfolgt und die geologische Übersichtskarte zu dieser Arbeit zeigt, daß sie auf der linken Seite des Flusses fast den ganzen nördlichen Abhang des Sary-dschass-Tau begleiten.

Aus diesen Nachrichten geht die außerordentlich große Verbreitung der roten Sedimente im Tian-Schan hervor, und zwar begleiten sie nicht nur die Ränder des Gebirges auf großen Strecken, sondern sie breiten sich auch über weite Flächen des Gebirges aus, die sich zwischen dem Issyk-kul und dem südlichen Rande des Gebirges bei Kaschgar erstrecken. Auch reichen sie zu bedeutenden Höhen hinan und man findet sie selbst noch in der Nähe der höchsten und zentralsten Teile des Gebirges.

Die roten Sedimente werden allgemein als tertiäre Bildungen betrachtet. Es ist aber bei dem Mangel an Fossilien in den meisten Fällen unmöglich, das Alter der verschiedenen Gruppen dieser Sedimente, die sich nur mit Hilfe der Lagerungsverhältnisse oder gewisser petrographischer Unterschiede in Glieder trennen lassen, genauer zu bestimmen. Dagegen ist es möglich, jedoch nur bis zu einem gewissen Grade eine Altersfolge nachzuweisen.

Vergleichen wir nun zunächst die roten Sedimente der verschiedenen Gebiete des Gebirges miteinander und stellen wir fest, welche Unterschiede sich dabei ergeben.

Semonow[2]) berichtet, daß junge Sedimente die Dschalanasch-Hochfläche mehrere hundert Fuß hoch bedecken und in den tiefen Einschnitten des Kegen und der Merke-Flüsse sehr gut aufgeschlossen sind, daß sie aus Sand, Lehm und aus Steingeröllen von allen möglichen Größen bestehen, sowie daß sie zu einem lockeren und losen Konglomerat nur schwach verkittet erscheinen. Dies sei, so meint Semonow, „ein von den zahlreichen Flüssen angeschwemmter Boden ganz modernen Ursprungs, ungestört auf anstehenden festen Gesteinen angehäuft und aufgelagert." Diese Beschreibung ist ausführlich genug, um erkennen zu lassen, daß mit den Bildungen der Dschalanasch-Hochfläche ein großer Teil der Bildungen übereinstimmt, womit die weiten Becken des Karkara und Tekes angefüllt sind.

Diejenigen roten Sedimente, die auf der südlichen Seite des Issyk-kul an dem Fuße des Terskei-Ala-Tau vorkommen, beschreibt Semonow als ein Konglomerat, in welchem Quarz, Feldspat, Granitkörner und auch größere Gerölle zu einem mehr oder weniger zerreiblichen Gestein verkittet worden sind. Dieses Konglomerat, das an manchen Stellen auch gefestigt erscheint, fällt unter einem Winkel von 35° nach Norden ein. Semonow meint nun, es sei auch dies eine Bildung offenbar ganz modernen Ursprungs, nämlich eine Seebildung des Issyk-kul.

Friederichsen,[3]) der dieses Konglomerat auch untersucht hat, neigt zu der Ansicht,

[1]) Friederichsen, l. c., S. 108 und 109.

[2]) Petermanns Mitteil., 1858, S. 360.

[3]) Friederichsen, l. c., S. 72.

daß es durch Anhäufung von Gebirgsschutt entstanden sei, und daß die Neigung der Schichten nicht durch Dislokation entstanden, sondern die natürliche Neigung des Schuttes an den Gehängen einer ausgedehnten Mulde darstelle.

Sewerzows rote Bildungen sind zweifellos zum Teil anders beschaffen, als die jungen Bildungen der Dschalanasch-Hochfläche, der Becken des Tekes, des Karkara und des Issyk-kul; zum Teil stimmen sie aber auch damit überein. Es lassen sich nämlich unter diesen Bildungen, wie Sewerzow selbst schon angedeutet hat, zwei Gruppen unterscheiden, die verschiedene petrographische Beschaffenheit und verschiedene Lagerungsverhältnisse haben.[1]) Die erste, älteste Gruppe, enthält die festen oder mürben roten Sandsteine mit untergeordneten Konglomeratschichten und tonige Gesteine, die Steinsalz führen. Diese Bildungen bedecken einen großen Teil des Gebirges zwischen dem Issyk-kul und dem Tschatyr-kul; sie sind disloziert worden, fallen nach Norden und Süden ein und folgen dem Streichen der Ketten, die hauptsächlich aus paläozoischen Gesteinen bestehen. Sewerzow sagt darüber: „Dieser rote Sandstein mit dem ihm untergeordneten Konglomerat und dem stellenweise sich vorfindendem Steinsalz ist ohne Zweifel eine Meeresformation, und seine quer durch das ganze System (des Tian-Schan) sich hinziehenden Entblößungen, weisen darauf hin, daß zu der Zeit, als dieser Sandstein sich ablagerte, sich wahrscheinlich an der Stelle der eben angegebenen Reihe von Gebirgssätteln eine Meerenge befand."

Die zweite, jüngere Gruppe, enthält geschichtete Ablagerungen, welche die weiten Becken des Gebirges am Naryn erfüllen. Diese Bildungen sind weniger fest als die Sedimente der ersten Gruppe, ihre Farben sind blasser und ihre Konglomerate sind schwach verfestigte Geröllagen; im Ganzen sind sie wenig gestört, wenn auch einige Dislokationen darin vorkommen. Die Beschreibung Sewerzows läßt erkennen, daß diese Bildungen mit den Ablagerungen der Dschalanasch-Hochfläche und denen der Becken auf der Nordseite des Gebirges übereinstimmen, von denen Sewerzow meint, daß sie in großen Seen abgelagert worden seien.

Wir begeben uns nun weiter nach Süden und betrachten die jungen Bildungen zwischen dem Tschatyr-kul und Kaschgar, worüber wir Nachrichten durch Stoliczka und Bogdanowitsch erhalten haben. Wir folgen Stoliczkas Bericht[2]) und beginnen im Süden: „Eine breite Zone von jungen Bildungen begleitet nördlich von Kaschgar den äußersten Saum des aus paläozoischen Sedimenten bestehenden Gebirges." Nach Stoliczka finden sich hauptsächlich geschichteter Ton und Sand, meist gelblich weiß, an einigen Stellen auch rötlich gefärbt; manche Lagen sind durch kalkiges oder kieseliges Zement verhärtet. Diese Bildungen sind disloziert worden, sind gefaltet und werden von Brüchen durchschnitten. Stoliczka bezeichnet sie als Artusch-Schichten[3]) und meint, sie hätten neogenes Alter und wären marinen Ursprungs. Fossilien sind aber bisher nicht darin gefunden worden.

Die eben erwähnten Bildungen liegen vor dem Rande des Gebirges; im Gebirge selber treten in der Umgebung des Tojun-Tals und noch weiter nördlich zwischen dem Sujok-

[1]) Peterm. Ergänzungsh. Nr. 42, S. 32 und besonders Nr. 43, S. 42 f. und 69 f.

[2]) Records Geolog. Survey of India, 1874.

[3]) Sollte Artysch heißen, nach der in der Nähe gelegenen Dörfergruppe Artysch (siehe Merzbacher, l. c., S. 37 f.).

Fluß und dem Turugart-Paß rote Sandsteine und Konglomerate auf, die von basaltischen Gesteinen durchbrochen worden sind. Südlich von Tschakmak liegen große vereinzelte Schollen desselben roten, rotgelben und weißen Sandsteins diskordant auf den abgetragenen paläozoischen Sedimenten. Der Sandstein führt zerstreute und in Lagen angehäufte gerundete Gerölle von rotem und grünem, Radiolarien führenden Hornstein und von rötlichem Quarz. Die basaltischen Gesteine treten als Lagergänge und Gänge auf.

Nördlich von Tschakmak nehmen die aus paläozoischen Sedimenten bestehenden Ketten an Höhe ab und an ihre Stelle treten niedrigere Gebirgszüge, die aus rotem und weißem Sandstein und aus Konglomeraten bestehen. Die basaltischen Gesteine erreichen dort eine große Mächtigkeit, treten in Lagergängen auf und vereinzelt auch als große Decken. An einigen Stellen sieht man auch hier, daß der Sandstein diskordant auf paläozoischen Sedimenten liegt, an den meisten Orten ist aber die Unterlage nicht sichtbar. Die Sandsteine und Konglomerate sind disloziert worden, fallen unter Winkeln von 30° bis 40° nach Norden ein und bilden eine mächtige Schichtenfolge. Stoliczka und Bogdanowitsch halten sie für tertiäre Bildungen. Der erwähnte südlich von Tschakmak auftretende rote Sandstein, der Hornsteingerölle führt, ist ein verhältnismäßig nur wenig mächtiges Glied dieser Bildungen.

Wir haben also aus dem Gebirge südlich vom Tschatyr-kul bisher zwei verschiedene Glieder der roten Sedimente kennen gelernt: nämlich die Artysch-Schichten Stoliczkas und die eben besprochenen Sandsteine und Konglomerate.

Es gibt in diesem Teile des Gebirges aber noch eine dritte Art von Bildungen. Stoliczka bezeichnet sie als „gravel“ und gibt an, daß sie an einigen Stellen zu Konglomeraten verfestigt worden seien; er hält sie mit Recht für die Ablagerungen ehemaliger großer Flüsse. Zunächst ist zu bemerken, daß Bogdanowitsch[1]) diese Bildungen mit Konglomeraten vergleicht, die östlich vom Tschatyr-kul weit verbreitet sind, und daß er ihnen tertiäres Alter zuschreibt. Es handelt sich hier aber in der Tat weniger um Kiesel, wie Stoliczka meint, als vielmehr um Konglomerate, die an den meisten Stellen recht fest sind.

Diese Konglomerate sind im Allgemeinen deutlich geschichtet und liegen am Rande des Gebirges diskordant über den Artysch-Schichten, im Innern des Gebirges aber diskordant über den tertiären Sandsteinen. Am Rande des Gebirges sind sie mehrere hundert Meter mächtig und sehr weit verbreitet und erfüllen auch weiter im Osten die beckenartigen Vertiefungen des Gebirges; sie bestehen dort aus Geröllen von granitischen und basaltischen Gesteinen, aus solchen der paläozoischen Sedimente und auch Stücke des roten tertiären Sandsteins finden sich darin, während ihr Bindemittel kieselig oder kalkig ist, an vielen Stellen aber auch lehmig. Diese Konglomerate sind nur wenig disloziert worden, fallen mit schwacher Neigung nach Norden gegen das Gebirge ein und sind jünger als der tertiäre Sandstein und also auch jünger als die Artysch-Schichten.

Wir wollen nun noch die roten Sedimente zweier anderen Gebiete des Gebirges ganz kurz betrachten: nämlich die des zentralen Tian-Schan und die der alten Seebecken auf der nördlichen Seite des Gebirges. Zunächst sind zwei Stellen zwischen dem Bedel-

[1]) Ergebnisse der Pewzowschen Tibet-Expedition. Bd. II: Geologische Untersuchungen in Ost-Turkestan von K. J. Bogdanowitsch. Petersburg 1892 (russisch), S. 66 f.

Paß und dem Ak-bel-Plateau zu erwähnen; die eine liegt ungefähr eine halbe Tagereise nördlich vom Bedel-Paß, die andere in dem Quellgebiet des Kara-sai.[1]) An diesen beiden Stellen zeigen sich rote, lockere feinkörnige Konglomerate, die meist aus kleinen Geröllen von Quarz, Quarzit und Kalk bestehen und auch noch Brocken von Phyllit und Tonschiefer enthalten. Daneben findet man geschichteten roten und grauen Ton und sogar einige dünne Bänke von graugelbem, stark tonhaltigem Kalk. Diese roten Sedimente erfüllen sowohl nördlich vom Bedel-Paß als auch im Quellgebiet des Kara-sai sehr hoch gelegene, flache Becken des Gebirges (siehe S. 117), das dort aus stark dislozierten Sedimenten, namentlich aus Phyllit, Tonschiefer und Quarzit besteht; sie sind hauptsächlich an den Rändern dieser Becken sichtbar, wo sie unter einer mächtigen Decke von alten Moränen und rezenten Aufschüttungen hervortauchen. Auf der nördlichen Seite des Kara-sai-Quellgebietes fallen sie steil nach Norden unter paläozoischen Tonschiefern ein.

Die Beschreibung, welche Friederichsen[2]) von den roten Bildungen des Orto-Utsch-kul gibt, zeigt, daß diese vollständig den roten Bildungen gleichen, die wir in den Becken nördlich vom Bedel-Paß und am Kara-sai fanden; es sind lockere rote Konglomerate, die Bruchstücke der in der Nähe anstehenden Gesteine, namentlich von Tonschiefer und Gneis, enthalten. Daneben kommt auch ein plattiger, tonhaltiger, hellgelber Kalk vor. Auch diese Bildungen sind disloziert worden; sie fallen 35° nach Süden und in dem Quellgebiet des Flusses anscheinend auch nach Norden ein; ihr Streichen ist N.O. bis O.N.O. gerichtet. Friederichsen meint, daß sie, wie andere ähnliche Bildungen, durch Anhäufung von Schutt entstanden seien.[3])

Rote Sedimente, welche wir im Kaündü-Tale auf weiten Strecken des Mittellaufes verbreitet fanden, stimmen mit denen der Becken nördlich vom Bedel-Paß und im Kara-sai-Quellgebiet beiläufig überein.[4]) Es sind auch dort hauptsächlich lockere Konglomerate, die zum größten Teil auffallend rot gefärbt sind. Man findet darin sowohl gerundete Gerölle von Kalk und Quarzit, wenig Granit und sehr viel Gabbro, als auch Brocken von Phyllit und Tonschiefer. Diese Konglomerate sind fast immer deutlich geschichtet; an einigen Stellen verliert sich aber die Schichtung, indem das Bindemittel stark zunimmt und lehmig wird. Diese roten Konglomerate des Kaündü-Tals, die sich nach Süden bis zum Utschat, nach Osten bis in die Nähe des Kara-art-scha, eines Nebenflusses des Koi-kaf, ausdehnen, sind sehr stark disloziert worden (siehe Figur VIII); sie setzen zwischen den hohen Gebirgszügen des zentralen Tian-Schan ein relativ niedriges Hügelland zusammen und liegen an den meisten Stellen scheinbar konkordant auf den paläozoischen Bildungen, auf Phyllit, Tonschiefer und dolomitischem Kalk, sind aber zusammen mit diesen durch große im Streichen verlaufende Brüche in Streifen zerschnitten worden.

[1]) Merzbacher, l. c., S. 63.

[2]) l. c., S. 108.

[3]) l. c., S. 38, 72 f., 74, 109, 122, 156.

[4]) Hiezu möchte ich bemerken, daß ich im Kaündü-Tal, welches ich mehrmals besucht und von einem Ende zum andern durchwandert habe, während Herr Keidel es nur flüchtig an einer Stelle berühren konnte, zwei verschiedene Arten von Konglomeraten gefunden habe, außer den erwähnten lockeren, groben roten Konglomeraten, kommt auch ein weniger grobes, gelbliches, ungemein festes vor, welches talauswärts mehr und mehr in Sandstein übergeht. (Siehe übrigens S. 79 meines Berichtes.)
G. Merzbacher.



Fig. VIII. Profil durch das Gebirge auf der südlichen Seite des Kaündü-Tals.
Mafsstab 1 : 33000.
p grauschwarzer und grünlicher Phyllit, t plattige, lebhaft rot und grün gefärbte Tonschiefer, z. T. Hornstein, c paläozoischer, z. T. kristallinischer Kalk, d Dolomit, g rote Gobi-Sedimente, st Schotter der Terrasse auf der rechten Seite des Kaündü-Tals, s Gehängeschutt, a Gabbro.

Von den roten Sedimenten, die wir bisher aus den hochgelegenen Teilen des zentralen Tian-Schan, aus der Gegend des Bedel-Passes, vom Kara-sai, vom Orto-Utsch-kul und vom Kaündü-Tal kennen, unterscheiden sich die Bildungen des Sary-dschass-Tals hauptsächlich durch ihre ungestörte Lagerung, aber auch durch ihre etwas abweichende petrographische Beschaffenheit. Die Bildungen des Sary-dschass-Tals sind blasser gefärbt; ihr Bindemittel verschwindet öfters gänzlich, sodaß nur loser Sand oder grusiger, mit kleinen Gesteinsbruchstücken vermengter, rotgelber Lehm die Lücken zwischen den Geröllen erfüllt. Diese sind sehr mächtig und haben ursprünglich das ganze Becken des Sary-dschass-Tals erfüllt.

Wir wenden uns nun zu dem letzten der Konglomerat-Gebiete, nämlich zu den alten Seebecken auf der nördlichen Seite des zentralen Tian-Schan, die sich, wie ich schon S. 92 erwähnt habe, vom Issyk-kul weit nach Osten erstrecken und vom Kegen und Tekes durchströmt werden. Wir haben schon S. 118 das rote Konglomerat des Issyk-kul-Beckens kennen gelernt, das Semonow für eine Seebildung hält. Dieses Konglomerat sieht man auf beiden Seiten des Seebeckens; es lagert diskordant über granitischen Gesteinen und paläozoischen Sedimenten und setzt zum Teil die breiten Uferstreifen des Sees und die niedrigen Gebirgszüge am Saume der Vorberge des Terskei- und des Kungeu-Ala-Tau zusammen.

Aus ganz ähnlichen Bildungen bestehen die bewaldeten Gebirgsrücken in der Umgebung des Santasch-Passes, wo sich der Terskei-Ala-Tau und der Kungeu-Ala-Tau fast berühren. Obwohl dort die Aufschlüsse wegen der ungemein üppigen Vegetation und wegen der großen Ausdehnung der alten Moränen nur spärlich sind, so sieht man doch deutlich, daß die jungen Bildungen ebenso wie am Issyk-kul aus rotem, lockerem, feinkörnigem Konglomerat bestehen. Dieses Konglomerat enthält auch größere Gerölle und Bruchstücke von Granit, Porphyr und Kalk; es ist deutlich geschichtet und fällt unter mäßiger Neigung nach Norden ein, streicht in der Richtung der Längsachse des Issyk-kul, also nach O.N.O. Die Färbung ist etwas heller als die der Konglomerate des Issyk-kul; dies läßt sich dadurch erklären, daß es an einer Stelle liegt, wo die Sedimente des Terskei- und des Kungeu-Ala-Tau mächtiger entwickelt sind als dies an den Ufern des Issyk-kul der Fall ist. Das Konglomerat des Santasch-Passes enthält deshalb mehr Gerölle dieser Sedimente, namentlich des unterkarbonischen Kalks, als das Konglomerat des Issyk-kul, das fast ganz aus granitischen und porphyrischen Gesteinen zusammengesetzt ist.

Die roten Sedimente des Santasch-Passes reichen nun nach Osten bis in das hochgelegene Becken von Karkará; aber je weiter man sie nach Osten verfolgt, um so deutlicher tritt eine gewisse Veränderung ihrer Beschaffenheit hervor: das Konglomerat wird lockerer; seine Mächtigkeit nimmt ab und Zwischenlagen von rötlichem, graugelbem und gelbweißem, zum Teil lößähnlichem Lehm, schalteu sich mehr und mehr ein. Schließlich besteht die sehr mächtige Schichtenfolge hauptsächlich hieraus; eigentliche Konglomerate sind kaum noch vorhanden, sondern nur noch mehr oder weniger mächtige Geröllager. Durch diese Lager, durch Streifen von Kies und kaum verfestigtem Gesteinsschutt, sowie durch die verschiedene Färbung des Lehms ist eine Schichtung noch zu erkennen, und man bemerkt außer einer leichten, aber veränderlichen Neigung der Schichten kein Zeichen, das auf bedeutendere Dislokationen schließen ließe. Wir werden später ähnliche Vorkommnisse bei Betrachtung der tektonischen Verhältnisse, die sich an den Rändern der Tekes-Ebene zeigen, kennen lernen.

Wenn man nun die Ränder des Beckens von Karkara genauer untersucht, so findet man die folgenden bemerkenswerten Verhältnisse: Das rote Konglomerat des Santasch-Passes setzt einen bewaldeten und mit Matten bedeckten Gebirgszug zusammen, der im Westen aus dem Tale des Tub ansteigend, den Einschnitt des Passes trägt, und sich in seinem Verlaufe nach Osten in dem Hügelland auf der südlichen Seite des Beckens von Karkara verliert. Im Westen berührt dieser Zug die nach O.N.O. gerichteten, aus unterkarbonischen Kalk und Porphyr bestehenden, dem Kungeu-Ala-Tau vorgelagerten niederen Ketten; er trennt das Issyk-kul-Becken vom Karkara-Becken, indem er in schräger Richtung den Kungeu-Ala-Tau mit dem Terskei-Ala-Tau verbindet und erhebt sich 300 bis 400 m über den Boden des Beckens von Karkara. Zwischen seinem nördlichen Fuße und dem südlichen Abhang des Kungeu-Ala-Tau liegt, als eine schmale Einsenkung der westliche Zipfel des Beckens von Karkara. Die östlichen Ausläufer des Kungeu-Ala-Tau bilden hier nur niedrige Gebirgsrücken und sind hauptsächlich aus dem gleichen rötlichen unterkarbonischem Kalk zusammengesetzt, den wir schon aus dem Dschütüoguss-Tal und vom Sart-dschol-Paß (S. 112) kennen gelernt haben. An dem äußersten Saum ihrer südlichen Abhänge, das ist also an dem nördlichen Rande der eben erwähnten Einsenkung, sieht man aber steilstehende, N.O. bis O.N.O. streichende, plattige oder in dünnen Bänken abgelagerte, feste bunte Mergel, Glimmer führende tonige Sandsteine und graugrüne und graublaue Mergeltone. Diese Sedimente, die von ferne gesehen, durch ihre im Ganzen rote Färbung auffallen, legen sich in diskordanter Lagerung an den unterkarbonischen Kalk; sie tragen die Terrassen eines alten Sees, verschwinden nach Süden unter den rezenten Aufschüttungen des Beckens und bilden weiter in östlicher Richtung dessen nördlichen Rand. Da sie fast nur aus tonigen und mergeligen Bildungen bestehen, da sogar die Sandsteine zurücktreten und Konglomerate selten vorkommen, so unterscheiden sie sich schon hiedurch auf den ersten Blick von den Konglomeraten des Santasch-Passes und damit auch von denen des Issyk-kul und von den lehmigen, Geröll führenden Schichten des Karkara- und des Tekes-Beckens.

Es zeigt sich, daß sie auch älter als diese Bildungen sind, denn in westlicher Richtung verschwinden sie mit steiler Schichtenstellung unter den Konglomeraten des Santasch-Passes. Dort liegt also zwischen den stark dislozierten Mergeln des Karkara-Beckens und dem schwach nach Norden geneigten Konglomerat des Santasch-Passes eine deutliche

Diskordanz. Ganz dieselben Verhältnisse finden wir nun auf der südlichen Seite des Gebirges im Tojun-Tal nördlich von Kaschgar. Dort werden die mehr oder weniger dislozierten Artysch-Schichten Stoliczkas (siehe S. 119 f.) von den schwach nach Norden einfallenden, sehr mächtig entwickelten Konglomeraten (den gravels Stoliczkas) überlagert.[1])

Was nun hier im Becken von Karkara und weit entfernt davon, auf der südlichen Seite des Gebirges in der Nähe von Kaschgar deutlich hervortritt: nämlich die Diskordanz zwischen den dislozierten älteren und den wenig oder gar nicht gestörten jüngeren Bildungen, hat aber eine allgemeine Bedeutung. Indem wir speziell von der Voraussetzung ausgehen, daß die gebirgsbildenden Bewegungen, durch welche die älteren roten Sedimente stark disloziert worden sind, große Teile oder auch das ganze Gebiet des heutigen Gebirges getroffen haben, und davon, daß die Phase dieser Bewegungen die letzte war und fast ihr Ende erreicht hatte, als die weniger gestörten Bildungen abgelagert wurden, erhalten wir in der Diskordanz ein Mittel, eine ungefähre Altersgrenze zu bestimmen. Es setzt uns dies zunächst in die Lage die jüngeren Bildungen miteinander zu vergleichen: den Ablagerungen der Dschalanasch-Hochfläche entsprechen die roten Konglomerate des Issyk-kul, des Santasch-Passes, die Ablagerungen der Tekes-Ebene, der größte Teil der Bildungen des Beckens von Karkara, ferner Sewerzows Seebildungen in der Umgebung des Naryn, die Konglomerate über den Artysch-Schichten und die ungestörten Konglomerate auf der nördlichen Seite des Sary-dschass-Tau. Außer dem sehr wesentlichen gemeinsamen Merkmal der geringen Dislokation kommt hier noch ein anderes sehr wichtiges Kennzeichen in Betracht: die große Ähnlichkeit, welche alle diese Bildungen miteinander haben und zwar hat diese Ähnlichkeit ihre Ursache in derselben Art der Entstehung und ist so groß, daß die verschiedenen Beobachter unabhängig voneinander zu sehr verschiedenen Zeiten dieselben oder doch ähnliche Ansichten über die Entstehung dieser Bildungen ausgesprochen haben: Semonow sagt, daß die Ablagerungen der Dschalanasch-Hochfläche durch Flüsse angehäuft worden seien; die roten Konglomerate des Issyk-kul hält er für eine Seebildung. Sewerzow hat die gleiche Meinung hinsichtlich der jungen Bildungen des Naryn-Hochlandes geäußert[2]) und Stoliczka spricht die Ansicht aus, daß die Konglomerate (gravels), welche über den Artysch-Schichten liegen, durch fließendes Wasser gebildet worden seien. Friederichsen hingegen meint, wie schon erwähnt, daß die Konglomerate des Issyk-kul und von anderen Orten, Anhäufungen von Gebirgsschutt wären, deren Bildung als Folge einer langen Kontinentalperiode vor sich ging.

In diesen meist grobklastischen Sedimenten sind (siehe S. 118) bis heute nirgends Fossilien gefunden worden: weder marine Fossilien, die wir bei der Beschaffenheit dieser Sedimente auch nicht erwarten können, noch Süßwassergastropoden oder Pflanzenreste, noch die Knochen großer Landbewohner. Da wir also das Alter der Sedimente nicht unmittelbar ermitteln können, so wollen wir wenigstens versuchen, die Lage der Diskordanz an ihrer Basis zu bestimmen, und zu diesem Zweck betrachten wir die Unterlage der jungen Bildungen. Diese besteht, wie ich schon mehrfach hervorhob, aus ganz verschiedenen

---

[1]) Siehe Merzbacher, l. c., S. 37.

[2]) Allerdings nimmt Sewerzow schon (Peterm. Mitteil., Ergänzungsheft Nr. 42 S. 32, Nr. 43 S. 43, 45, 46 und 69) für eine Stufe dieser Ablagerungen, welche sich durch geringe oder gar keine Dislozierung von den darunter liegenden, stark gestörten älteren unterscheiden, fluvioglazialen Ursprung an.

G. Merzbacher.

Gesteinen. An einigen Stellen sind es ganz alte Felsarten. Die Bildungen der Dschalanasch-Hochfläche, die Semonow für eine Ablagerung der Flüsse hält, liegen auf granitischen und porphyrischen Gesteinen und auf unterkarbonischem Kalk, die Konglomerate des Issyk-kul, soweit dies zu ermitteln ist, hauptsächlich auf Granit, die des Sary-dschass-Tals auf Phyllit und Tonschiefer. An den meisten Stellen besteht die Unterlage aber aus tertiären Gobi-Sedimenten. Im Gebirgsland des Naryn sind es zum großen Teil die roten, braunen und grauen Sandsteine, Steinsalz führenden Tone und Konglomerate, von denen Sewerzow zum Teil[1]) marine Entstehung angenommen hat; in der Umgebung des Tschatyr-kul die roten und weißen, von Basalt durchbrochenen Sandsteine, die von Stoliczka und Bogdanowitsch in das Tertiär gestellt werden, an dem südlichen Rande des Gebirges die Artysch-Schichten, für die Stoliczka neogenes Alter und marinen Ursprung annimmt. Aber weder in den roten, Steinsalz führenden Tonen und Sandsteinen Sewerzows noch in den tertiären Sandsteinen und Konglomeraten auf der südlichen Seite des Tschatyr-kul und des Tojun-Tales noch in den Artysch-Schichten Stoliczkas sind bisher Fossilien gefunden worden.

Dagegen ist es mir gelungen in der Schichtenfolge der steil gestellten roten und grauen Mergel, Tone und Sandsteine des Karkara-Beckens, ungefähr 5 km nördlich von Karkara, eine aus graugrünem mergeligem Ton bestehende Bank zu entdecken, die zahlreiche Süßwassergastropoden enthält, welche auf pliozänes Alter schließen lassen.[2]) Der Streifen dieser Bildungen ist sehr breit, und etwas weiter im Norden gewinnen die Kirgisen an Stellen, wo ich nicht gewesen bin, Steinsalz daraus; es ist also immerhin möglich, daß auch noch ältere und noch jüngere Bildungen als die Gastropoden führenden Mergel bei Karkara darin vorkommen. Wie dem nun aber auch sei, so steht doch jedenfalls so viel fest, daß diese in steiler Schichtenstellung auftretenden Sedimente diskordant von dem flach nach Norden einfallenden Konglomerat des Santasch-Passes überlagert werden.

Wenn ich nun zur Betrachtung der übrigen Bildungen der Unterlage übergehe, so möchte ich vorausschicken, daß ich an dieser Stelle den Versuch nicht unternehmen will, die Beziehungen ausführlich zu besprechen, die zwischen den verschiedenen Gliedern der roten Sedimente an den Rändern des Gebirges, namentlich auf dessen südlicher Seite zu erkennen sind, weil wir uns dadurch zu sehr von dem eigentlichen Gegenstande dieser Arbeit entfernen würden. Dies soll in einer von mir vorbereiteten Arbeit über meine Untersuchungen in der Kaschgarischen Niederung geschehen. Ich will hier vielmehr nur kurz die Tatsachen anführen, die sich bei dieser ausführlichen Besprechung ergeben werden:

a) Die Bildung roter Sedimente hat schon zu der Zeit des Mesozoicums begonnen; denn es war, zum Beispiel am südlichen Rande der Kaschgarischen Niederung, schon eine mächtige Schichtenfolge von rotem Mergel, Ton, Sandstein und Konglomeraten von der Beschaffenheit der Gobi-Sedimente vorhanden, als der Mergel mit Gryphaea Esterhazyi, der eine eozäne Transgression von kurzer Dauer bezeichnet, darüber abgelagert wurde. Die Bildungen dieser Transgression haben nur sehr geringe Mächtigkeit, und breiten sich nur über die südlichen Teile der Niederung des Jarkent-daria aus; sie liegen heute

[1]) Peterm. Mitteil., Ergänzungsheft Nr. 43 S. 42, 43, 69, 70, 73.

[2]) Ich habe diese Funde Herrn Dr. M. Schlosser zur Untersuchung übergeben, welcher das Ergebnis seiner Bearbeitung demnächst veröffentlichen wird, doch kann schon jetzt gesagt werden, daß es unentschieden bleiben muß, ob spätmiozäne oder pliozäne Bildungen vorliegen. G. Merzbacher.

zwischen Alai und Tian-Schan in bedeutenden Höhen und stellen so die Verbindung mit dem marinen Tertiär des Ferghana-Beckens her. Zu der Zeit der Transgression waren einfachere Verhältnisse in der Verteilung von Erhebungen und Niederungen vorhanden und der Unterschied von Höhen und Tiefen war viel geringer als heute.

b) Die ältesten roten Bildungen liegen auf der südlichen Seite des Tian-Schan, an dem südlichen Rande der nach N.W. streichenden Gebirgszüge des Chalyk-Tau und an dem nördlichen Rande des Kaschgarischen Gebirges konkordant über graugrünen, Pflanzen und Kohle führenden mesozoischen Sandsteinen und Konglomeraten, in die sie nach unten allmählich übergehen. Bei einer Vergleichung der verschiedenen Gebiete ergibt sich, daß diese roten Bildungen an der Basis nicht gleichmäßig zusammengesetzt sind, sondern, daß sie sowohl in der horizontalen als auch in der vertikalen Richtung einen ähnlichen, wenn auch nicht so starken Wechsel von fein- und grobklastischen Sedimenten zeigen, wie die eigentlichen Gobi-Sedimente; man muß daher annehmen, daß sie wie diese unter ähnlichen und örtlich wechselnden Verhältnissen abgelagert wurden. An ihrer Beschaffenheit ist mit Sicherheit erkennbar, daß sie hauptsächlich in fließendem Wasser, in seichtem Wasser oder zum Teil vielleicht auch subaëril entstanden sind. Es hat also in großen Teilen der hier in Frage kommenden Gebiete seit der Zeit des jüngeren Paläozoicums oder des älteren Mesozoicums, abgesehen von der nur kurze Zeit dauernden eozänen Transgression, keine Meeresbedeckung bestanden. Im großen Ganzen kann ein Unterschied in der Zusammensetzung der mesozoischen Bildungen und der alttertiären Gobi-Sedimente kaum festgestellt werden. Ein Unterschied andererseits zeigt sich allerdings darin, daß die mesozoischen Bildungen graugrün sind und Kohle führen, die Gobi-Sedimente dagegen rot sind und Gips und Steinsalz führen.

c) Die Abhängigkeit der Beschaffenheit der roten Sedimente von den örtlichen Verhältnissen ist namentlich an den Rändern und in den daran grenzenden Teilen der nach N.O. streichenden Gebirgszüge des südlichen Tian-Schan sichtbar, wo die roten Sedimente in diskordanter Lagerung Vertiefungen des Gebirges ausfüllen oder seine abgetragenen Falten bedecken. Die ältesten Bildungen sind hauptsächlich verschieden gefärbte und beschaffene Sandsteine. Diese Sandsteine enthalten kleine, stark gerundete Gerölle von rotem und grünem Hornstein und rotem Quarz; sie sind an einigen Stellen, wie im Tojun-Tal und im Sugun-Gebiet von basaltischen Gesteinen durchbrochen worden. Da Fossilien nicht darin gefunden worden sind, so kann ihr Alter nicht genauer bestimmt werden.

Stoliczkas Artysch-Schichten sind jünger als diese Sandsteine, welche keine einheitliche, konkordante Schichtenfolge bilden. Außer den Bildungen, die Stoliczka anführt, findet man noch roten, tonigen Sandstein, Gips und Steinsalz führenden Ton und bunte Mergel längs der Linie des Tojun-Tals. Diese Bildungen werden durch markante Diskordanzen getrennt und, an die Diskordanzen gebunden, trifft man grobe und feine Konglomerate aus Geröllen der paläozoischen Sedimente und an einigen Stellen auch von basaltischen Gesteinen. Auch diese Konglomerate sind noch stark disloziert worden.

Die Dislokationen der verschiedenen roten Sedimente zeigen zusammen mit den Diskordanzen, die eine Abtragung des Gebirges voraussetzen, daß gebirgsbildende Bewegungen und Unterbrechungen während der Bildung dieser Sedimente erfolgt sind. Diese Bewegungen haben eine allgemeine Bedeutung gehabt. Einige Teile des Tian-Schan sind erst hiedurch

entstanden, andere aber stark verändert worden. Die ursprünglich einfacheren Verhältnisse in der Verteilung der alten, abgetragenen Gebirgszüge und der Niederungen sind dadurch verwickelter, der Unterschied zwischen Höhen und Tiefen ist größer geworden. Um dies zu zeigen, genügt der Hinweis darauf, daß die eozäne Transgression der Niederung des Jarkent-daria von Westen gekommen ist, und daß man heute an der Stelle der verbindenden Straße zwischen dieser Niederung und dem Ferghana-Becken die Austern führenden Schichten des Eozäns zwischen den alten Felsarten des Tian-Schan und des Alai in Höhen von mehr als 4000 m findet. Die Becken oder auch die tiefgelegenen Strecken des Landes, wo sich der feine Detritus sammeln konnte, haben also im Allgemeinen durch die Gebirgsbewegungen an Ausdehnung verloren. Die Tone und Sandsteine der basalen Schichten der roten Sedimente nehmen im Ganzen an Mächtigkeit ab und an ihre Stelle treten nach oben mehr und mehr grobklastische Bildungen.

Die genauere Untersuchung der verschiedenen Glieder der Gobi-Sedimente zeigt dies sehr deutlich. Die Sandsteine des oberen Tojun-Tals, welche wir zu den ältesten Bildungen unter diesen Sedimenten rechnen, führen nur sehr kleine Gerölle der widerstandsfähigsten Gesteine, und Konglomerate sind im allgemeinen selten. Die Artysch-Schichten, die jünger sind und, wie ich schon hervorhob, Sedimentgruppen von verschiedenem Alter umfassen, sind im Ganzen reich daran. Vergleicht man alle erwähnten Sedimente ohne Rücksicht auf die Diskordanzen, so zeigt es sich, daß die Psephite der verschiedenen Gruppen von den Rändern des Gebirges nach außen an Mächtigkeit abnehmen und durch Psammite und Pelite ersetzt werden, sowie daß in allen Gruppen zusammengenommen, diese nach oben an Bedeutung verlieren und durch Psephite mehr und mehr ersetzt werden. Die ganz jungen, wenig dislozierten Bildungen, die wir für das jüngste Glied der Gobi-Sedimente halten, bestehen an den meisten Stellen fast ganz aus grobklastischen Bildungen. Es ist klar, daß diese Verhältnisse, die wir im Ganzen betrachtet in fortschreitender Ordnung finden, während der ganzen Zeit der Bildung der Gobi-Sedimente auch räumlich nebeneinander ohne Ordnung, aber in viel beschränkterem Maße bestanden haben.

Die roten, Salz führenden Tone und Sandsteine Sewerzows liegen — was er selbst zwar nicht feststellte, was aber aus seiner Schilderung der Lagerungsverhältnisse hervorgeht — über abgetragenen Teilen des Gebirges, wovon Reste bis in eine sehr späte Zeit erhalten geblieben sind; sie verraten durch die Art ihrer Konglomerate die Mitwirkung von fließendem Wasser bei ihrer Bildung. Die pliozänen Tone und Mergel von Karkara, welche Süßwasser-gastropoden führen, liegen in einem Becken des Gebirges, das seit langer Zeit bestanden hat und während der letzten Phase der gebirgsbildenden Bewegungen wahrscheinlich noch vergrößert worden ist. Grobklastische Bildungen, ja sogar Sandsteine sind dort selten. Wir haben es hier mit Ablagerungen eines ausgedehnten ehemaligen Sees zu tun.

Aus alledem ist zu entnehmen, wie schwierig es ist, die verschiedenen Glieder der Gobi-Sedimente zu vergleichen und die Frage nach ihrem Alter zu beantworten. Nach den bis heute vorhandenen Beobachtungen ergeben sich als sicher, kurz wiederholt nur die folgenden Beziehungen: die roten Sandsteine auf der südlichen Seite des Tschatyr-kul und im Tojun-Tal sind älter als die Sedimente der Artysch-Schichten und wahrscheinlich auch älter als die roten Salz führenden Tone und Sandsteine Sewerzows. Diese sind aber älter als der größte Teil der Tone und Mergel des Karkara-Beckens, die vielleicht den jüngeren Bildungen der Artysch-Schichten äquivalent sind. Über das Alter der roten

Sedimente aus der Gegend des Bedel-Passes und des Kara-sai, des Orto-Utsch-kul sowie über das der im Kaündü-Tal abgelagerten läßt sich bis jetzt nichts Sicheres sagen; da sie aber stark disloziert worden sind, kommt ihnen gewiß ein höheres Alter zu, als dem Konglomerat des Sary-dschass-Tals und den übrigen, diesem Konglomerat entsprechenden Bildungen vom Issyk-kul und von anderen Orten.

Zum Schlusse fassen wir noch einmal die Ergebnisse zusammen, die sich aus allen diesen Tatsachen ergeben:

Die Bildung roter Sedimente mit Einschaltungen ausgedehnter grobklatischer Zwischenlagen, die in fließendem Wasser entstanden sind, beginnt in der mesozoischen Zeit. Diese Bildungen liegen in gewissen Teilen des Gebirges und seiner Ränder diskordant auf den stark abgetragenen alten Felsarten, in anderen Teilen aber konkordant auf den mesozoischen Angara-Schichten, in welche sie nach unten allmählich übergehen. Außer den Gebilden der eozänen Transgression, die man bis jetzt nur von dem südlichen Rande der Niederung des Jarkent-daria kennt, sind marine Sedimente nicht gefunden worden.

Es folgen die gebirgsbildenden Bewegungen der tertiären Zeit zu wiederholten Malen; dies ist sichtbar an den Diskordanzen. Die einzelnen Gruppen der roten Sedimente wurden disloziert, dann abgetragen, aufs Neue gebildet, nochmals disloziert und wieder abgetragen. Auf solche Weise kompliziert sich die Verteilung von Höhen und Tiefen; die tiefgelegenen Striche des Gebirges und seiner Ränder wurden kleiner und die Bedingungen der Ablagerung der roten Sedimente werden dadurch in der Beziehung verändert, daß in den jüngeren Schichtengruppen mehr und mehr grobklastische Bildungen auftreten.

So kommen wir zu der großen Diskordanz, die am Santasch-Paß, im Tojun-Tal, östlich davon und an so manchen anderen Stellen sichtbar ist. Die jüngsten Bildungen, über welche diese Diskordanz sich ausbreitet, sind gewisse Glieder der Artysch-Schichten und die Mergel und Tone von Karkara, denen wir pliozänes Alter zuschreiben. Die jungen, wenig gestörten Bildungen über der Diskordanz sind also noch jünger, doch muß es unentschieden bleiben, mit welcher Stufe des Pliozäns sie beginnen.

Die jungen Bildungen. — Diese Bildungen fassen wir deshalb zu einer Gruppe zusammen, weil sie gegenüber den älteren, bis in das Pliozän reichenden tertiären Sedimenten ihrer Unterlage, wenig oder gar nicht gestört worden sind, und weil für ihre Ablagerung nur ein verhältnismäßig kurzer Zeitabschnitt in Frage kommen kann.

Ich vermag in dieser Abhandlung über diese Bildungen nur die wichtigsten Beobachtungen anzuführen und muß darauf verzichten, die Folgerungen, die sich aus der Vergleichung der in verschiedenen Gebieten auftretenden Arten ergeben, hier ausführlicher zu begründen. Denn obgleich auch bei diesem Gegenstand die Vergleichung des zentralen Tian-Schan mit den benachbarten Gebieten ebenso notwendig wäre, wie bei manchen anderen Punkten seiner stratigraphischen Verhältnisse, so sind doch mit der Frage nach Entstehung und Verbreitung dieser jungen Bildungen so viele andere wichtige Fragen enge verknüpft, z. B. die nach der Entstehung und dem Alter mancher großer Quertäler, nach der Veränderung der Gefälls-

verhältnisse, nach der Ausdehnung und den Phasen der ehemaligen Vergletscherung, daß es nicht möglich ist diese Verhältnisse hier erschöpfend zu besprechen.[1])

Die jungen Ablagerungen sind, wie wir schon gesehen haben, sehr mächtig. Semonow[2]) gibt an, daß sie die Dschalanasch-Hochfläche mehrere hundert Fuß hoch bedecken; dies mag auch für das Becken des Issyk-kul zutreffen, wo die roten, flach nach Norden einfallenden Konglomerate jedoch nicht vollständig aufgeschlossen sind, sondern zum Teil von alter Moräne und rezenten Ablagerungen des Sees bedeckt werden oder unter dessen Spiegel hinabsinken. Stoliczka war erstaunt über die Mächtigkeit dieser Bildungen (gravels) im Tojun-Tal. Dort sieht man sie mäßig nach Norden geneigt und in gleichmäßiger Schichtenfolge quer zum Streichen fast eine halbe Tagereise weit aufgeschlossen; östlich vom Tojun-Tal sind sie in den Becken des Gebirges 150—250 m mächtig. Auch in der Tekes-Ebene, wo ihre Unterlage nicht sichtbar ist, erreichen sie große Mächtigkeit und Ausdehnung; im Sary-dschass-Tal sind sie zwar zum großen Teil durch die Erosion wieder entfernt worden, aber doch noch immer sehr mächtig (S. 122). In den tertiären Mergelgebirgen des Südrandes, dem Topa-dawan und Tschul-Tau (Merzbacher, l. c., S. 36 f. und 45), welche ein Äquivalent der Artysch-Schichten sind, liegen sie weit verbreitet als Decken diskordant über den Gips und Salz führenden tertiären Mergeln und Tonen. Allenthalben sind sie in verschiedener Höhe abgelagert worden. Die rötlichen Konglomerate des Sary-dschass-Tals liegen fast ganz ungestört mehr als 3000 m hoch, und wenn wir für die Randgebiete des Gebirges, die ungefähr mittlere Höhenlage der Flüsse, die in die jungen Bildungen eingeschnitten sind und die des Issyk-kul-Spiegels nehmen, so erhalten wir die folgenden Werte: für die Tekes-Ebene 1700 m, für das Karkara-Becken 1900 m (2100 am Santasch), für den Issyk-kul 1600 m, für die Gegend von Tangitar und Basch-sugun auf der Südseite des Gebirges 1800 m, für das Tojun-Tal 17—1800 m und für den Topa-dawan 16—1700 m, für den Tschul-Tau etwa 14—1500 m. Diese Zahlen geben aber nur ganz ungefähr die Höhenunterschiede an. Genauere Werte lassen sich nur schwer oder gar nicht ermitteln; denn einmal ist die Lagerung der jungen Bildungen an den meisten Stellen, wenn auch nur wenig, so doch immerhin gestört worden, und an manchen Stellen ist ihre Unterlage, die am besten für die Vergleichung geeignet wäre, gar nicht sichtbar.

Aber die Tatsache, daß die Unterlage der jungen Bildungen des Sary-dschass-Tals bei 3000 m entblößt ist, in den Randgebieten des Gebirges aber durchschnittlich 1300 bis 1400 m tiefer liegt, genügt allein schon, um zu zeigen, daß diese Bildungen in sehr verschiedener Höhe abgelagert worden sind. Zieht man dabei auch in Betracht, daß zur Zeit der Ablagerung Bodenbewegungen stattgefunden haben, so hatten diese doch kein sehr großes Maß, jedenfalls bei weitem nicht solche Bedeutung wie die Bewegungen, die noch die pliozänen Bildungen des Karkara-Beckens und die Artysch-Schichten etc., getroffen haben.

---

[1]) Ich möchte hier schon jetzt darauf hinweisen, daß aus der Bildung dieser verschiedenen und in verschiedener Weise abgelagerten Konglomerate, Sandsteine und Tone mit Sicherheit hervorgeht, aber auch aus anderen Verhältnissen bewiesen werden kann, daß in der Tertiärzeit und später im Tian-Schan wasserreiche Epochen mit solchen verhältnismäßiger Trockenheit wiederholt abgewechselt haben. Über diese mit dem Prozesse der Talbildung und dem Verlaufe der Eiszeiten im Tian-Schan in engem Zusammenhang stehende Frage, werde ich meine Beobachtungen in einer eigenen Arbeit veröffentlichen. G. Merzbacher.

[2]) Peterm. Mitteil., 1858, S. 357.

Obgleich wir also sehr bedeutende Bodenbewegungen nicht voraussetzen können, so weisen doch die Lagerungsverhältnisse der jungen Bildungen darauf hin, daß seit deren Ablagerung Veränderungen in der Gestalt der Oberfläche ausgedehnter Teile des Gebirges vor sich gegangen sind.

Wenn wir die Lagerungsverhältnisse und die Verbreitung der jungen Bildungen genauer verfolgen, so zeigt es sich, daß diese entweder große Becken des Gebirges zum Teil, oder kleinere Becken ganz erfüllten und über deren Rändern eine zusammenhängende Decke bildeten. Für den ersten Fall haben wir im Issyk-kul-Becken und in den Becken von Karkara und des Tekes gute Beispiele, für den zweiten Fall finden wir vorzügliche Aufschlüsse am südlichen Rande des Gebirges (Bassins von Argu, Tegermen, Sugun).

Die Geschichte der großen Becken auf der Nordseite des Gebirges ist schwierig zu verfolgen; wir werden einiges davon noch im tektonischen Teile dieser Arbeit kennen lernen, müssen uns aber hier zunächst mit der unbestreitbaren Tatsache begnügen, daß diese Becken zum großen Teil schon seit der tertiären Zeit bestehen, und daß sie also schon vorhanden waren, als die jungen Bildungen abgelagert wurden. Dagegen wollen wir die Verhältnisse auf der südlichen Seite des Gebirges genauer betrachten, weil sich dort Gelegenheit bietet, sowohl das Maß der Veränderungen, welche die jungen Bildungen seit ihrer Ablagerung erfahren haben, zu erkennen, als auch ihre Entstehung zu beurteilen.

Stoliczkas[1]) Profil durch die Zone seiner „Artysch-Schichten" zeigt, obgleich es die tektonischen und die stratigraphischen Verhältnisse nur in den äußersten Umrissen wiedergibt, doch ganz gut die außerordentliche Mächtigkeit der jungen Bildungen (gravels), vor allem aber die exponierte hohe Lage ihrer steilen, nach Süden gekehrten Erosionsränder, an denen die schwach nach Norden geneigten Konglomerat-Schichten ausstreichen. Schon an dieser Stelle, die am Ausgang des Tojun-Tals, nördlich von Kaschgar liegt, zeigt es sich, daß die jungen Bildungen über den dislozierten und abgetragenen Gobi-Sedimenten diskordant liegen, und daß sie die Vertiefungen ausfüllen, welche zwischen den aus paläozoischen Sedimenten bestehenden Ketten des Gebirges und den Gobi-Sedimenten oder in den Gobi-Sedimenten selber liegen. Weiter im Osten sind die Aufschlüsse noch klarer: Zwischen Tangitar und Basch-sugun sieht man sehr deutlich, daß die Einsenkungen zwischen den äußersten frei stehenden Kulissen des Gebirgsrandes ganz angefüllt sind mit jungen Bildungen, und daß diese über den Rändern der Kulissen zusammenschließen. Auf diese Weise sind nicht nur die Vertiefungen zwischen den aus paläozoischen Sedimenten bestehenden Ketten und Kulissen, sondern auch die Vertiefungen zwischen den Erhebungen der Gobi-Sedimente ausgeglichen worden, sodaß sich eine mächtige,

---

[1]) Records, l. c., S. 25. Zu diesem Profil ist zu bemerken, daß die Entfernung zwischen Kaschgar und Tschon-terek (Chung-terek im Profil) in der Luftlinie ungefähr 50 km beträgt. Im Verhältnis zur Länge sind die Höhen deshalb stark übertrieben; und auch das Verhältnis zwischen der Höhe der niedrigen Gebirgszüge, die aus den „Artysch-Schichten bestehen", und der Höhe der eigentlichen Ketten, die aus paläozoischen Sedimenten zusammengesetzt sind, ist nicht richtig ausgedrückt. Ich wähle dennoch dieses Profil, weil es die erste, unbefangene Darstellung von Verhältnissen gibt, die in der Literatur oft erwähnt worden sind. Die Schichtung der jungen Bildungen (gravel, Nr. 1 im Profil) ist nicht angegeben; einer der steilen Erosionsränder liegt etwas links seitlich von dem C in dem Worte „Chung-terek". An diesem Rande streichen die schwach nach Norden geneigten Konglomeratschichten aus und das Profil gibt richtig wieder, daß die obere Kante des Randes höher liegt, als irgend ein Punkt der aus Artysch-Schichten bestehenden Unterlage.

zusammenhängende Decke über große Teile des Gebirgsrandes ausgebreitet hat. Wir müssen nun annehmen, daß diese Decke, die fast ausschließlich aus geschichteten, grobklastischen Bildungen besteht, vom Gebirge abdachende Flächen gebildet hat, und daß auf diesen Flächen Gerölle über große Strecken durch fließendes Wasser ausgebreitet worden sind. Die Lage, in welcher wir die Reste dieser Decke heute finden, zeigt uns nun die Größe der Veränderungen, die seit ihrer Bildung eingetreten sind. Ein Beispiel dafür bietet schon das angeführte Profil Stoliczkas. Wir können dort die exponierte Lage der Erosionsränder nicht allein durch Abtragung erklären, sondern müssen, um die anormale Neigung der Schichten nach Norden gegen das Gebirge zu verstehen, annehmen,[1]) daß doch sehr späte Bodenbewegungen stattgefunden haben. Ganz ähnliche Verhältnisse, wie im Tojun-Tal lassen sich aber an vielen Stellen des von uns in großer Ausdehnung bereisten Südrandes des Gebirges nachweisen.

Schon dies allein genügt, um zu zeigen, daß in der Tat nicht nur die Oberfläche des Gebirges, sondern auch dieses selber seit der Ablagerung der jungen Bildungen in einem deutlich erkennbarem Maße verändert worden ist. Aber auch Beispiele anderer Art, wie die zweifellos durch späte Bewegungen verursachten Veränderungen der Gefällsverhältnisse und die damit zusammenhängende Bildung vieler in jüngeren Ablagerungen eingeschnittenen Durchbruchstäler, würden dies zeigen.[2])

Während es nun verhältnismäßig leicht ist, die Entstehung der jungen Bildungen an den Rändern des Gebirges zu erkennen, ist es viel schwieriger ihre Entstehung in den großen, tiefen und geschlossenen Becken zu erklären. In einem solchen Becken liegt z. B. der Issyk-kul. Es ist klar, daß jeder Versuch, hier die Entstehung der jungen Ablagerungen zu erklären, voraussetzt, daß die Geschichte des Beckens selber bekannt sei. Dies ist um so notwendiger, als gerade das Issyk-kul-Becken in einer Zone großer Dislokationen liegt, die, wie die steile Stellung der pliozänen Bildungen des Karkara-Beckens beweist, noch in sehr später Zeit vor sich gegangen sind. Semonow meint, das rote Konglomerat des Issyk-kul, das den nördlichen Fuß des Terskei-Ala-Tau begleitet, sei eine junge Seebildung. Das Konglomerat reicht aber wahrscheinlich tief unter den Spiegel des Issyk-kul hinab, und östlich vom Santasch-Paß liegt es mehr als 2000 m hoch. Es nimmt auch eine beträchtliche Fläche ein. Ist es dennoch eine Seebildung und erklärt sich dadurch die nordwärts gerichtete Neigung seiner Schichten? Friederichsen denkt an eine Auffüllung des Beckens durch Gebirgsschutt und meint, daß auch in diesem Falle die Neigung der Schichten ursprünglich sein könne. Aber die gleichmäßige Verbreitung der gröberen Gerölle und die deutliche Schichtung können alsdann nur durch fließendes Wasser verursacht worden sein, und die Ablagerung so mächtiger grobklastischer Bildungen setzt ganz erhebliche Wassermengen voraus. Ist aber dennoch zu jener Zeit kein See vorhanden gewesen und war also das Issyk-kul-Becken damals geöffnet? Dies sind Fragen, auf die wir heute bei unseren geringen Kenntnissen der Verhältnisse noch keine

[1]) Die Erklärung, welche Stoliczka selbst für die merkwürdige Erscheinung gibt, ist interessant, siehe Rec. G. S. o. J., VIII, S. 14.

[2]) Dazu gehören z. B. auf der Nordseite des Gebirges die sogenannte Buamschlucht, die des Terte und Kusgun-ya etc., auf der Südseite mehrere im Merzbacher'schen Berichte erwähnte Durchbrüche, z. B. die des Tilbitschek, des Kap-salyan und Kepek-tschai im Chalyk-Tau, die des Tangitar, des Gess-Maidan und Kurumduk, sowie andere mehr.

befriedigende Antwort erwarten können. Wie dem nun aber auch in dem einzelnen Falle sein mag, so ist es doch gewiß, daß der größte Teil der jungen Bildungen auf fluviatilem Wege entstanden ist, sowohl in den hoch im Inneren des Gebirges liegenden flachen Becken als auch besonders an den Rändern des Gebirges.[1])

Wir finden ähnliche Bildungen auch noch heute,[2]) namentlich auf der südlichen Seite des Tian-Schan in dem oft 20 bis 30 km breiten Streifen der rezenten Schuttdecken, die sich vom Rande des Gebirges nach außen gegen die Wüste senken, und die häufig die äußersten niedrigen Kulissen des Gebirges und die Sättel und Mulden der Gobi-Sedimente fast ganz bedecken. Größe und Ausdehnung der heutigen Schuttdecken bleiben aber, so bedeutend sie auch sein mögen, weit hinter denen der Schuttdecken der jungen Ablagerungen zurück; das zeigt sich allenthalben, besonders bei der Vergleichung beider Erscheinungen in den Randtälern des Gebirges. Wir müssen deshalb, um diesen Unterschied erklären zu können, für die Zeit der Ablagerung der jungen Bildungen viel reichlichere Niederschläge für alle Teile des Gebirges voraussetzen, als wir sie heute selbst in dessen regenreichsten Teilen beobachten.

In den Zeitabschnitt nach Ablagerung der jungen Bildungen und vor der Ablagerung der rezenten Schuttdecken fällt die ehemalige große Vergletscherung des Tian-Schan, die weit bedeutender gewesen ist, als man bisher angenommen hat. Ich führe, um dies zu beweisen, nur zwei Erscheinungen an.[3]) Westlich vom Ausgang der Buam-Schlucht sieht man auf der linken Seite des Tschu, dicht an der Straße, die von Stary-Tokmak nach der Poststation Dschil-aryk führt, ungefähr in der Höhe von 1200 m, also 400 m tiefer als der Spiegel des Issyk-kul liegt, mitten in der Steppenvegetation sehr gut erhaltene Granitrundhöcker mit glatter, fast frischer Oberfläche und Gletscherschrammen, die in der Richtung des Tschu-Tals verlaufen. Am Ausgange des südlichen Musart-Tals zeigen sich 200—300 m über dem Talboden alte Moräne am Gebirgsrand und vor dem Ausgang mitten in der Kieswüste mächtige Endmoränen. Sowohl am nördlichen als auch am südlichen Rande des Tian-Schan hat also das Eis die Niederungen am Fuße des Gebirges erreicht, und wir finden seine Spuren an Stellen, wo heute trockene Steppe oder heiße Wüste vorhanden ist.

Ausgedehnte, sehr gut erhaltene Terrassen zeigen an, daß sich der Issyk-kul in postdiluvialer Zeit bis an den Santasch-Paß nach Osten ausgedent hat, und der Gasteropoden führende Seelöß in dem Talbecken von Kok-mainak[4]) beweist, daß er auch noch weiter nach Westen gereicht hat. Man findet ähnliche Terrassen auch im Karkará- und im Tekes-Becken, im Kapkak-Tal, sowie im Argu-Becken etc. und an vielen Stellen

---

[1]) Auch der Umstand, daß diese Bildungen häufig in dem Maße, als sie sich vom Inneren des Gebirges nach außen hin erstrecken, an grobem Material verlieren und mehr und mehr feinkörnig werden, spricht hiefür. G. Merzbacher.

[2]) Siehe Merzbacher, l. c., S. 28, 38, 40, 46, 81, 85.

[3]) Im übrigen verweise ich auf die zahlreichen, in Merzbachers Bericht angeführten Tatsachen.

[4]) Friederichsen, l. c., s. Abb. 4 auf Taf. 3; die hellen Streifen in der Mitte des Bildes sind Seelöß, der Süßwassergastropoden führt, aber abgesehen davon ist zu beachten, daß die wagerechten Terrassen zwischen Prschewalsk (Karakol) und dem Santasch-Paß mehr als 1800 m hoch liegen, daß die Höhe des Tschu-Tals bei Kok-moinak aber nur ungefähr 1530 m beträgt. Dies gibt eine deutliche Vorstellung von der Größe und Tiefe des Issyk-kul in postdiluvialer Zeit.

auf der südlichen Seite des Gebirges, wo zur gleichen Zeit viele ausgedehnte Seen bestanden haben. Ein großer Teil der Niederungen vor den nördlichen Abdachungen des zentralen Gebirges, die heute von den großen Zuflüssen des Ili durchströmt werden, worunter das beste Beispiel das weite und sehr lange Becken des Tekes ist, waren früher mit Seen ausgefüllt. Am Südrand des Gebirges lassen sich an allen Mündungen der Flußtäler Merkmale und Reste einer glazialen Epoche nachweisen, wo man jetzt nur trockene Steppe findet. Hieraus ergibt sich überaus deutlich die große Veränderung der klimatischen Verhältnisse, die in der Quartärperiode und später eingetreten ist.

Den ehemaligen Seen kommt also postglaziales Alter zu oder sie haben schon in der letzten Zeit der großen Vergletscherung bestanden: ihre Terrassen ziehen sich, gut erhalten über die aufbereiteten Endmoränen hin, die vor dem Ausgang der großen Quertäler liegen. Zur Zeit dieser Wasserbedeckung haben die heutigen oro- und hydrographischen Verhältnisse zum größten Teil, wenigstens in allgemeinen Zügen, schon bestanden. Einige der großen Quertäler mögen seitdem, wie das Beispiel des Tschu-Durchbruchs in der Buam-Schlucht zeigt, vergrößert worden sein. An den Mündungen der großen Quertäler auf der südlichen Seite der Tekesebene reichen dagegen die Terrassen des großen Sees, drei oder vier übereinander, eine Strecke weit in die Täler hinein;[1]) weiterhin sieht man aber darüber und talaufwärts die unversehrte alte Moräne.

Noch lehrreicher sind die Verhältnisse auf der Südseite des Gebirges in der nördlichen Umrandung der Kaschgarischen Niederung. Dort liegen ausgedehnte flache Talbecken, von denen schon Stoliczka[2]) berichtet hat, in der Zone der Gobi-Sedimente und weiter nördlich zwischen den aus paläozoischen Gesteinen zusammengesetzten Ketten und Kulissen des eigentlichen Gebirges. Der Boden und zum Teil auch die Ränder dieser Becken bestehen aus jungen Konglomeraten, die diskordant die dislozierten Gobi-Sedimente überlagern.[3]) An den Beckenrändern, auch in den mürben Sandsteinen und Mergeln der Gobi-Sedimente, sieht man heute noch an manchen Stellen die Terrassen der alten Seen.[4]) Wo die Quertäler in die Becken münden, zeigen sich, besonders gut aufgeschlossen bei Tischyktasch im Tojun-Tal, verfestigte fluvioglaziale Schotter, die vom Tojun-Fluß in 20 bis 30 m hohen, nahezu senkrechten Wänden angeschnitten worden sind. Weiter talaufwärts, zwischen Tschon-terek und Mursa-terek, wird auf beiden Talseiten oberhalb der Schotter alte Moräne sichtbar. Die Furche des Tojun-Tals war also im ganzen zur Zeit der großen Seen, gegen das Ende der Vergletscherungsperiode im allgemeinen schon so beschaffen, wie heute. Nun liegen aber die steilen, nach Süden gekehrten Ränder der jungen, schwach dislozierten Konglomerate, die bei der Besprechung von Stoliczkas Profil erwähnt worden sind, 300 bis 400 m über den fluvioglazialen Schottern der Talsohle. Hiedurch wird uns ein anderer Beleg für die bedeutende Veränderung gegeben, welche die Oberfläche des Gebirges seit Bildung der jungen Konglomerate erlitten hat, die eine so große Mächtigkeit erreichen. Es zeigt uns ferner, daß, abgesehen von wenigen Ausnahmen, die sich aber durch besondere Verhältnisse erklären lassen, seit der Zeit der Bildung der

---

[1]) Merzbacher, l. c., S. 8, 30, 87 u. s. w.

[2]) Records, VIII, S. 15: „A peculiar feature in this part of the hills consists in the occurrence of extensive plains to which the name jilga is generally applied."

[3]) Merzbacher, l. c., S. 37, 38, 41. [4]) ibid. S. 38.

jungen Konglomerate bis zu der Zeit der fluvioglazialen Schotter nur grobklastische Sedimente abgelagert worden sind. Die Mächtigkeit der fluvioglazialen Schotter, die zur Zeit der großen Seen oder kurz vorher entstanden sind, ist viel geringer als die Mächtigkeit der jungen Konglomerate. Obgleich wir Verhältnisse, die es erschweren, den Prozeß der Ablagerung beider Bildungen miteinander zu vergleichen, nicht zu berücksichtigen vermögen, wie z. B. den Unterschied in der Dauer der Ablagerung und die wahrscheinlich sehr große Verschiedenheit der damaligen Oberflächenverhältnisse des Gebirges von den späteren, so ergibt sich dennoch klar, daß seit Bildung der jungen Konglomerate bis zur Zeit der Ablagerung der fluvioglazialen Schotter eine Periode sehr großen Wasserreichtums abnahm und besonders auch die Menge des fließenden Wassers dauernd allmählich abgenommen hat.

Wir kennen zwar nicht das Alter der großen Diskordanz an der Basis der jungen Bildungen und wissen deshalb auch nicht, ob deren grobklastische Sedimente schon in der Zeit des Pliozäns entstanden sind; aber dies ist wahrscheinlich der Fall, und es scheint deshalb, als ob gegen das Ende dieses Zeitabschnitts die Niederschlagsmengen in einem hohen Maße gestiegen sind, so daß dadurch im Verein mit der großen Höhe des Gebirges und weniger durch Verminderung der allgemeinen Temperatur die ausgedehnte Vergletscherung des Gebirges entstanden ist.

Wenn wir noch einmal kurz zusammenfassen, was sich bei Betrachtung der jungen Bildungen ergibt, so kommen wir zu den folgenden Ergebnissen: Diese Bildungen sind in verschiedener Höhe entstanden, ihre heutige Lage kann deshalb nicht dazu benutzt werden, den Betrag der späten Dislokationen zu ermitteln, und ihr gemeinsames Merkmal ist, außer der sehr ähnlichen Beschaffenheit, die auf Ablagerung in fließendem Wasser schließen läßt, das geringe Maß ihrer Dislokationen im Vergleiche zu denen der älteren Bildungen. Die großen, weit ausgreifenden, gebirgsbildenden Bewegungen der tertiären Zeit hatten daher schon vor Beginn dieser Ablagerung ihr Ende erreicht. An der Basis der jungen Bildungen sieht man, wo deren tertiäre Unterlage sichtbar wird, eine weit verbreitete Diskordanz, und die Sedimente der Unterlage sind stark disloziert worden. Die Gastropoden führenden Mergel von Karkará zeigen, daß diese Dislokationen, die durch große, weit gedehnte, gebirgsbildende Bewegungen verursacht wurden, noch im Pliozän, wenn nicht früher, entstanden sind.

Die weite Verbreitung und große Masse der grobklastischen Sedimente und die Tatsache, daß an vielen Stellen die rote Färbung verschwindet, zeigen ein Wachsen der Niederschlagsmengen nach dieser Zeit an. Es entstanden während dieser Zeit die Grundzüge der heutigen Oberflächenverhältnisse des Gebirges; viele der großen Täler wurden damals gebildet. Diese Vermehrung der Niederschlagsmengen verursachte in erster Linie die Vergletscherung des hohen Gebirges, als deren Folge wieder die großen Seen beim periodischen Rückgang der großen Vereisung entstanden sind.

V.

Nachdem wir bereits hervorgehoben haben, daß granitische Gesteine im nördlichen zentralen Tian-Schan sehr weit verbreitet sind, und nachdem wir die Sedimente, die sich dort finden, zum Teil kennen gelernt und hiedurch die erforderliche Grundlage für Betrachtung der tektonischen Verhältnisse erhalten haben, wollen wir untersuchen, wie weit es möglich ist, an der Hand der bisherigen Tatsachen die verschiedenen Stücke im Bau des nördlichen zentralen Tian-Schan zu unterscheiden. Daß solche deutlich unterscheidbare Stücke vorhanden sind, ergibt sich schon aus den bisher mitgeteilten Beobachtungen und ich erinnere, um dies zu zeigen, nur daran, daß die granitischen Gesteine, welche einen großen Teil der äußeren Gebirgszüge zusammensetzen, sehr alt sind, daß sie Kataklase zeigen, und daß der unterkarbonische Kalk auf ihnen transgressiv liegt; daß dagegen die granitischen Gesteine, welche in den hohen inneren Ketten große Massive zusammensetzen, wo sie genauer untersucht wurden, nämlich im Bayum-kol-Tal, keine Kataklase zeigen, und daß sie im Sarydschass-Tau und anderwärts den unterkarbonischen Kalk im Kontakt verändert haben.

Obgleich die geologische Übersichtskarte, die ich für diese Arbeit entworfen habe, sehr große Lücken hat, so zeigt sie doch, daß die Struktur der inneren Gebirgsteile, die sich sehr deutlich in dem gleichmäßigen und geradlinigen Verlauf der granitischen Massive und der Sedimente ausprägt, viel besser erhalten zu sein scheint, als die der äußeren. Nichts ist aber mehr geeignet, den Unterschied zwischen den äußeren Gebirgszügen und den inneren zu kennzeichnen, als die Lagerungsverhältnisse des unterkarbonischen Kalks, der in den äußeren Gebirgszügen in großen unregelmäßig verteilten Lappen und Schollen transgressiv auf den granitischen Gesteinen und den älteren paläozoischen Sedimenten liegt, dagegen in den inneren Teilen des Gebirges zwischen langgestreckten granitischen Massiven steil gestellt oder gefaltet worden ist. Dieser Unterschied tritt auch in orographischer und morphologischer Beziehung deutlich hervor, sodaß wir Kriterien verschiedener Art haben, die äußeren Gebirgszüge von den inneren Ketten im Alter zu unterscheiden. Ehe wir die tektonischen Verhältnisse der verschiedenen Gebirgsteile im einzelnen verfolgen, ist es geboten, einen Querschnitt zu betrachten, der sowohl die inneren Ketten als auch die äußeren im Zusammenhang zeigt.

Von den großen Quertälern, welche in die nördlichen Abhänge des zentralen Tian-Schan eingeschnitten sind, eignet sich hiezu am besten das Bayum-kol-Tal, weil es ganz in der Nähe des höchsten Gebirgsteiles, nämlich nahe am Khan-Tengri beginnt und uns in seiner tiefen Furche in ausgezeichneten Aufschlüssen fast alle die Unterschiede zeigt, die ich eben erwähnt habe. Wir haben hiebei den Vorteil, daß die Gesteine, die das Gebirge längs dieser Linie zusammensetzen, in ausreichendem Maße petrographisch untersucht worden sind (siehe Profil Fig. I auf Taf. III).

Das Bayum-kol-Tal beginnt ungefähr 15 km nordöstlich vom Khan-Tengri am nördlichen Fuße der höchsten zentralen Kette; es ist ungefähr 60 km lang und mündet nahe westlich von der russisch-chinesischen Grenze in die Steppe des Tekes. Man kann in den das Tal umrahmenden Gebirgen in morphologischer Beziehung drei natürlich begrenzte Abschnitte unterscheiden: Der südliche Abschnitt ist das Hochgebirge und darin liegt der oberste Teil des Bayum-kol-Tals. Auf beiden Seiten dieses Talabschnittes tragen die Gipfel Firn und Eis und dazwischen sieht man Gletscher in den flachen Mulden.

Auch der Talboden liegt dort noch über der Baumgrenze und man findet nur niedrige Sträucher von Juniperus sabina, Caragana jubata und Salix-Arten. Der zweite Abschnitt, worin der mittlere Teil des Tals liegt, ist die breite Zone des Gebirges, die sich sowohl in vielen Teilen des Tian-Schan, als auch in anderen innerasiatischen Gebirgen zwischen der Firngrenze und der oberen Baumgrenze ausdehnt. Es ist dies das in morphologischer Beziehung interessante Schuttgebiet, das durch ausgedehnte, von den Flüssen herbeigetragene Schuttmassen, die in beckenartigen Weitungen flach aufgebreitet wurden, ausgezeichnet ist.[1]) Teilweise liegt der Talboden des mittleren Bayum-kol-Tals schon etwas unter der oberen Baumgrenze. Der dritte und längste Abschnitt, der untere Teil des Tals, hat schon Mittelgebirgsformen. Hier findet man Landschaften, die denen der europäischen Voralpen ähnlich sind. An vielen Stellen reichen die Matten bis zu den Gipfeln und dichte Bestände der schönen Picea Schrenkeana bedecken Talseiten und Berggehänge. Von den drei Abschnitten des Tales gehören der untere und der mittlere, sowie die nördliche Hälfte des oberen Abschnitts in geologischer Beziehung zu den äußeren Gebirgszügen; doch ist der Unterschied in orographischer Beziehung zwischen diesen und den inneren Ketten deshalb hier nicht mehr so deutlich, weil, wie ich schon im einleitenden Teil zu dieser Abhandlung gesagt habe, die Wasserscheide hier in der zentralen Kette liegt und das Gebirge sich deshalb gleichmäßiger von Süden nach Norden erniedrigt, als z. B. westlich vom Aschutör-Paß, wo die Wasserscheide dem östlichen Verlaufe des Terskei-Ala-Tau folgt. Die Gesteine, die Herr Richarz untersucht hat, habe ich teils im oberen, teils im mittleren Bayum-kol-Tal gesammelt.

Um eine Übersicht über die in geologischer Beziehung verschiedenen Teile des Gebirges dieser beiden Talabschnitte zu erhalten, betrachten wir am besten zunächst das Bild Fig. I auf Tafel I.

Ich versetze den Leser auf die Höhe eines die Talsohle um mehrere hundert Meter überragenden Bergsturzes, der sich auf der linken Talseite erhebt, ungefähr dort, wo sich kurz hintereinander von Südost der Ala-aigür und von Südwest der Aschu-tör in den Bayum-kol ergießen,[2]) das ist an der Stelle, wo Profil I auf Taf. III im Norden endigt.[3]) Im Rücken hat man den unteren Abschnitt des Bayum-kol-Tals, also den größten Teil der waldreichen äußeren Gebirgszüge des nördlichen zentralen Tian-Schan. Vor dem Beschauer zu Füßen breitet sich der ebene, mit Schotter bedeckte Talboden des mittleren Talabschnittes aus. Im Hintergrunde des Bildes liegt genau im Süden die pyramidenförmige Gestalt des Khan-Tengri. Davor aber und ein wenig weiter östlich erhebt sich ein mit Eis bekleideter hoher Berg. Zwischen diesen Berg, der in der zentralen Kette liegt, und den Khan-Tengri ziehen wir die von W.S.W. nach O.N.O. verlaufende südliche Grenze des nördlichen zentralen Tian-Schan, da sie dann mit der in tektonischer Beziehung wichtigen Linie des Inyltschek-Tals zusammenfällt. Der Khan-Tengri besteht, wie wir schon wissen, aus veränderten Sedimenten, die sich in seinem Gipfel mehr

---

[1]) Siehe übrigens Merzbacher, l. c., S. 8 f., 25, 31, 79, 85, 88, 94 u. s. w.

[2]) Der Leser, der die Karte von Friederichsen benutzt, muß beachten, daß derselbe das mittlere und obere Bayum-kol-Tal als Ala-aigür, das Aschu-tör-Tal als Beian-kol-Tal, den Aschu-tör-Paß als Naryn-kol-Paß und das Kara-kol-Tal (Nebental des Sary-dschass-Tals) als Aschu-tör-Tal bezeichnet. Die Karte Merzbachers hat die richtigen Bezeichnungen; s. Merzbacher, l. c., S. 13 f.

[3]) Merzbacher, l. c., S. 8 und 9.

als 7000 m hoch erheben; der hohe mit Eis bedeckte Gipfel und die zentrale Kette, in deren Nähe er liegt, bestehen aus stark verändertem, zum Teil kristallinischem, unterkarbonischem Kalk. Unter dem Khan-Tengri und scheinbar ein wenig westlich davon erheben sich im Hintergrunde des Bildes noch zwei Berge; sie sind vom Khan-Tengri ungefähr 13 und 15 km, vom Standpunkt des Beschauers 19 und 16 km entfernt und bestehen aus granitischen Gesteinen.

Der übrige auf dem Bilde sichtbare Teil des Gebirges bildet die Umgebung des mittleren Teils des oberen Talabschnitts. Die mit Schnee und Firn bedeckten Höhen zur Linken bestehen aus einer Schichtenfolge von Gneis, Phyllit, Tonschiefer und Dolomit und aus einem schmalen Granitmassiv (siehe Profil I auf Taf. III und die Skizze in Fig. XVII), die Talhänge im Vordergrunde auf beiden Seiten des Tals werden aus Biotitgranit gebildet.

Hiemit haben wir auf einer ungefähr 30 km langen Linie vom Khan-Tengri im Süden bis zu der Mündung des Ala-aigür-Tals im Norden quer zum Streichen die wichtigsten Teile kennen gelernt, die das Gebirge zusammensetzen.

Es sind:

1. die Kette des Khan-Tengri,
2. die zentrale Kette,
3. das Granitmassiv im oberen Teile des Bayum-kol-Tals,
4. die Schichtenfolge von Gneis, Tonschiefer, Dolomit u. s. w., die ich, um eine kurze Bezeichnung zu wählen, als die Schieferzone des Bayum-kol-Tals bezeichnete,
5. das Granitmassiv in der nördlichen Hälfte des mittleren Talabschnittes, das einen Teil des südlichen Granitzugs der äußeren Gebirgszüge bildet.

Von diesen Teilen liegt die Kette des Khan-Tengri schon außerhalb unseres Gebietes; die zentrale Kette und das Granitmassiv des oberen Bayum-kol-Tals bilden zusammen die inneren Ketten, die Schieferzone und das Granitmassiv am Ala-aigür-Tal gehören dagegen, strenge genommen, schon zur Gruppe der äußeren Gebirgszüge. Das Profil in Fig. III, Taf. III zeigt, daß hier im Bayum-kol-Tal der Teil des Gebirges, den wir aus geologischen Gründen zu den äußeren Gebirgszügen rechnen, ungefähr dreimal so breit ist, als die inneren Ketten.

Wir wollen nun die eben erwähnten Teile des Gebirges im einzelnen näher betrachten: Genauere Angaben über die petrographische Beschaffenheit der granitischen Gesteine und der Sedimente, die das Gebirge in der Umgebung des oberen und mittleren Talabschnitts zusammensetzen, finden wir in der hier anschließenden Arbeit von Richarz und einige Angaben über die granitischen Gesteine der äußeren Gebirgszüge bei Petersen.[1])

1. Der Khan-Tengri.

Wir wissen durch Merzbacher,[2]) daß sich der höchste Berg des Tian-Schan, der Khan-Tengri, in einer schmalen langgestreckten Kette erhebt, die der Inyltschek-Gletscher umfließt. Die Kette ist in geologischer Beziehung die östliche Fortsetzung der Kette auf der linken (südlichen) Seite des unteren Inyltschek-Tals; sie ist noch etwas über den Khan-Tengri hinaus bekannt; dagegen ist nicht ganz festgestellt, wo sie im Osten endet. Wir

---

[1]) Friederichsen, l. c., petrogr. Anh., S. 275 f., nicht Nr. 220, das aus dem Aschu-tör-Tal stammt.
[2]) Merzbacher, l. c., S. 74.

wissen aber, daß sie dorten mit der wasserscheidenden zentralen Kette zusammenhängt, die sich ihrerseits unter einer Abschwenkung des Streichens nach S.O. in den hohen Ketten am Musart-Paß fortsetzt.

Die Kette auf der linken Seite des Inyltschek-Gletschers besteht hauptsächlich aus Serien von grauschwarzem und grünlichem Phyllit, Glimmerschiefern und Amphiboliten, worin an mehreren Stellen mächtige Lager von Gabbro und, wie die vorläufige Untersuchung der gesammelten Gesteinsproben ergeben hat, auch von stark veränderten Quarzporphyren vorkommen; ferner aus verändertem dolomitischem Kalk und crinoideenhaltigen Dolomit, in welchen auch erkennbare unterkarbonische Fossilien vorkommen.

Das Profil in Figur IX zeigt uns, obgleich es nicht vollständig ist, den Bau dieser Kette. Alle Schichten fallen, abgesehen von örtlichen Störungen, im Ganzen unter Winkeln von 20° bis 40° nach Süden ein.

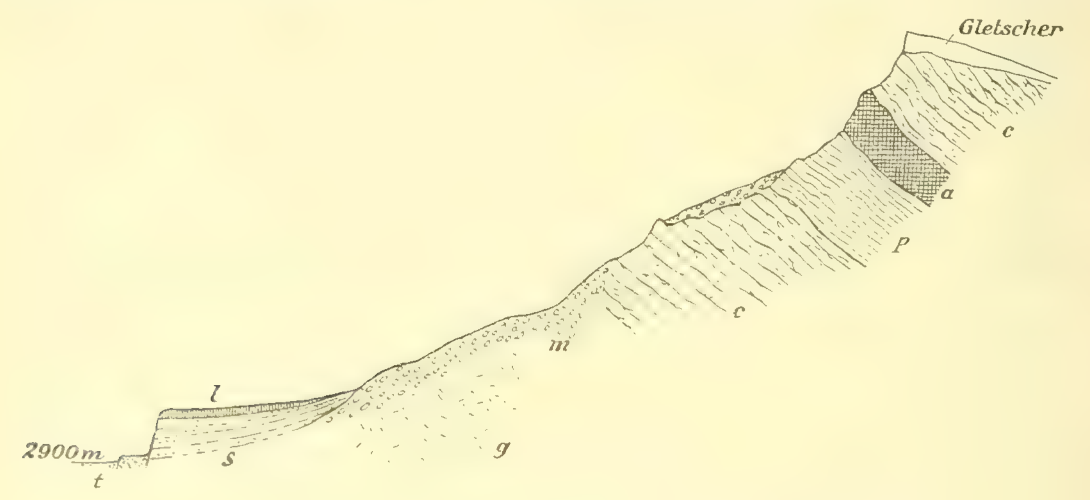


Fig. IX. Profil durch die linke Uferkette des unteren Inyltschek-Tals.
Mafsstab 1 : 10,000.
p grünlicher Phyllit, c kristallinisch-paläozoischer, zum Teil dolomitischer Kalk, m alte Moräne, s Schuttkegel, l fluviatiler Löß, t Terrassenschotter des Flußbettes, g Granit, a Gabbro.

Ein breiter Streifen von Grundmoräne verhüllt den nördlichen Fuß der Kette an den meisten Stellen des Tales. Dicht unterhalb der Gletscherzunge ist diese aber fast bis an den Talboden entblößt und man sieht, daß dort der untere Teil des Gehänges, soweit man überhaupt anstehendes Gestein erreichen kann, aus dem grünschwarzen und grünlichen Phyllit besteht. Der Phyllit verschwindet, indem er nach O.N.O. streicht, zum großen Teil talaufwärts unter dem Eis des Inyltschek-Gletschers; aber ungefähr 16 km von der Endzunge entfernt, wird er wieder in der Kette sichtbar, die den Khan-Tengri trägt, denn diese Kette beginnt,[1]) indem sie plötzlich mit steilen Wänden mitten aus dem Eis des Inyltschek-Gletschers zu bedeutender Höhe emporragt, mit Phyllit.

Ganz sicher ist hiemit der Zusammenhang ja nicht erwiesen; aber abgesehen davon, daß diese Kette in der Streichrichtung der linken Uferkette des oberen Inyltschek-Tals

[1]) Merzbacher, l. c., S. 70.

liegt, weist auch ihr Bau in der Nähe des Khan-Tengri und am Khan-Tengri selber auf diesen Zusammenhang hin.

Wir finden nämlich auch dort dieselben Gesteine und ähnliche Lagerungsverhältnisse, wie auf der linken Seite des Inyltschek-Tals. An der Stelle, wo sich die Kette des Khan-Tengri aus dem Inyltschek-Gletscher erhebt, sind der Phyllit und die anderen ihn begleitenden Sedimente stark zerknittert, aber man erkennt doch im Ganzen deutlich das Südfallen.

Dies wiederholt sich auch am Khan-Tengri und der Berg zeigt bei seiner gewaltigen Größe eine überraschende Einfachheit des Baues. Schon von weitem kann man von einigen hochgelegenen Stellen des nördlichen zentralen Tian-Schan,[1]) z. B. vom Sart-dschol-Paß, von der Kette auf der rechten Seite des oberen Sary-dschass-Tals aus, besonders deutlich aber von den Talgehängen des mittleren Bayum-kol-Tals aus erkennen, daß in dem unteren Teile des Khan-Tengri dunkles Gestein ansteht, daß dagegen der obere Teil des Berges aus einem hellen Gestein aufgebaut ist.

Die Skizze in Figur XV zeigt uns das Bild des Berges, wie man es von einem hochgelegenen Punkte der Gehänge des mittleren Bayum-kol-Tals sieht. Der Berg liegt von diesem Punkt ungefähr 35 km in südlicher Richtung entfernt. Man erkennt aber dennoch auf das Deutlichste dunkles Gestein an dem Fuße der steilen Nordwand der Gipfelpyramide und dessen scharfe, sanft von Westen nach Osten ansteigende Grenze gegen das darüber lagernde helle Gestein der Gipfelwände.

Dasselbe beobachtet man von einem hochgelegenen Punkte der rechten Umrandung des oberen Inyltschek-Tals. Auch hier erkennt man das dunkle Gestein in dem unteren Teile des Gipfelbaues und darüber das helle Gestein des Gipfels. Von hier aus sieht man aber, daß sich die Grenze zwischen beiden von Norden nach Süden senkt.

Dies wird durch Merzbachers in der Nähe des Berges gemachten Beobachtungen bestätigt, und es zeigt sich, daß der Sockel des Khan-Tengri in der Tat aus dunklen Sedimenten, nämlich hauptsächlich aus grünlichen Phylliten besteht, worin ein basisches Eruptivgestein, wahrscheinlich Gabbro,[2]) in großer Menge vorkommt, daß dagegen das helle Gestein des Gipfels kristallinischer Kalk (zum Teil etwas dolomitisch) ist. Alle diese Bildungen fallen unter Winkeln von 20° bis 30° nach Süden ein, sodaß die Kalk- und Dolomitbänke und zum Teil auch noch der Phyllit sowohl auf der nördlichen als auch auf der südlichen Seite des Berges ausstreichen. Das helle massige

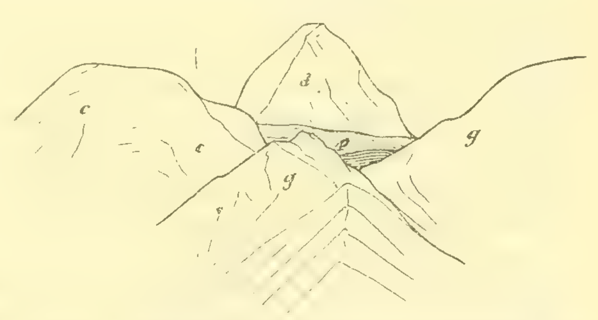


Fig. XV. Blick auf den Khan-Tengri von Norden (vom mittleren Teil des Bayum-kol-Tales aus).

d kristallinischer, zum Teil etwas dolomitischer Kalk des Khan-Tengri, p Phyllite mit basischen Eruptivgesteinen darin von der Basis des Berges, c kristallinische Kalke der zentralen Kette, g Granit des oberen Bayum-kol-Tals.

[1]) Merzbacher, l. c., S. 68.

[2]) Das Untersuchungsergebnis des petrographischen Befundes der Gesteine aus dem oberen Inyltschek-Tal liegt noch nicht vor.

Gestein liegt über dem dunklen Phyllit flach gewölbeartig gebogen, wie das Stück einer riesigen, sanft nach Süden geneigten Platte.[1]) Wir haben hier also im Ganzen dieselben Lagerungsverhältnisse, wie sie weiter im Westen, auf der südlichen Seite des Inyltschek-Tals zu beobachten sind.

Die Kette auf der linken Seite des Inyltschek-Tals streicht demnach in der Nähe der Endzunge des Inyltschek-Gletschers in der Richtung nach O.N.O. auf die rechte Seite des Gletschers hinüber und setzt sich in der Kette des Khan-Tengri nach Osten fort. Dabei erhebt sie sich von Westen nach Osten allmählich zu sehr bedeutender Höhe.

Der Bau der Ketten am Khan-Tengri und auf der linken Seite des Inyltschek-Tals wiederholt sich weiter im Süden. Die alten Gesteine, die dort die Ketten zusammensetzen: Phyllit, paläozoischer Tonschiefer, kristallinischer Kalk und Dolomit zeigen fast überall südliches Einfallen: die wenigen Ausnahmen haben nur örtliche Bedeutung. Granitische Gesteine in großer Menge sind, soweit das Gebirge südlich vom Inyltschek-Tal heute bekannt ist, das ist nach Süden bis in die tiefe Furche des Koikaf-Tals,[2]) nach Osten bis an die an den Hintergrund der mächtigen Gletscher des Inyltschek- und des Kaündü-Tals, nur an einer Stelle, nämlich südlich vom Khan-Tengri, zwischen dem Inyltschek- und dem Koikaf-Gletscher gefunden worden. Basische Eruptivgesteine kommen dagegen häufig vor. Lagergänge und mächtige Lager von Gabbro schalten sich zwischen die alten Gesteine ein.

Der hier in Rede stehende Teil des Gebirges gehört, ebenso wie der Khan-Tengri strenge genommen, nicht mehr zum Gebiet des nördlichen zentralen Tian-Schan, entsprechend der Begrenzung, die ich für dieses Gebirgsstück in der Einleitung gegeben habe. Wir wollen seinen Bau aber dennoch hier kurz erörtern, weil es zum Verständnis der tektonischen Verhältnisse der nördlich davon liegenden Gebirgsteile notwendig ist. Die geologischen Verhältnisse, die im Profil IX dargestellt sind, bleiben auf eine beträchtliche Strecke weit nach Osten fast unverändert sichtbar. Der Weg aus dem mittleren Inyltschek- zum Kaündü-Tal führt durch zwei von einer Hochfläche getrennte verbindende Täler, die Atschailo-Täler. An der Stelle, wo das nördliche Atschailo-Tal in das Inyltschek-Tal mündet, ungefähr 17 bis 18 km unterhalb der Endzunge des Inyltschek-Gletschers,[3]) springt ein Teil der linken Uferwand spornartig gegen die Mitte dieses Tales vor und in dem toten Winkel dahinter findet man viel alte Moräne. Der Sporn und die unterste, tief eingeschnittene Strecke des nördlichen Atschailo-Tals besteht aus steil nach Süden einfallendem grauem, kristallinischem Kalk. Ungefähr 1 km südlich von der Mündung gabelt sich dieses Tal. Der eine Ast ist nach O.N.O. gerichtet, der andere verläuft nach S.O. und mündet etwas spitzwinklig zur Richtung des Inyltschek-Tals. Bis an die Gabelung sieht man, vom Inyltschek-Tal kommend, den Kalk. In der Gabelung folgt grauer und grünlicher Phyllit, der, wie der Kalk, steil einfällt und weit nach Süden reicht, wo er einen hohen Gipfel bildet. Der Weg zum Kaündü-Tal, der dem nach S.O. verlaufenden Aste folgt, steigt in steilen Serpentinen zu einem hochgelegenen, flachen, mit alter Moräne erfülltem Boden an, der ungefähr dem Streichen der Phyllite folgt. Auf der linken Seite sieht man im Südosten eine hohe, aus kristallinischem Kalk bestehende, stark

[1]) Merzbacher, l. c., S. 75. [2]) ibidem S. 70, 72, 78, 81 f. [3]) ibidem S. 77.

vergletscherte Kette. Im Nordwesten dagegen, zur Rechten ist das schiefrige von der linken Seite des Inyltschek-Tals heranziehende Gebirge eine ziemliche Strecke weit in einem sehr auffallendem Maße abgetragen.[1]) Die Wasserscheide ist mitten in den begrünten alten Moränendecken kaum sichtbar; auch im oberen Teile des südlichen Atschailo-Tals ändert sich die Umgebung nicht. Der untere Talabschnitt bildet jedoch vor der Mündung eine enge Schlucht, die, weil sie sich nach Süden wendet, tief in den Kalkzug eingeschnitten ist, der die vergletscherte Kette auf der südlichen Seite der oberen Atschailo-Täler bildet. In dieser Schlucht sieht man aufs Neue die große Beständigkeit des südlichen Fallens. Nun steigt man auf steilem Pfad ins Kaündü-Tal hinab, das an dieser Stelle fast von Osten nach Westen verläuft. Der kristallinische Kalk der vergletscherten Kette ist auf der linken Seite des Kaündü-Tals wieder sichtbar (siehe das Profil in Figur VIII); der Phyllitzug, in den Atschailo-Tälern von alten Moränen fast ganz bedeckt, tritt in der rechten Talwand heraus. Hier sieht man auch seine Zusammensetzung; ungemein mächtige Massen von Gabbro, wovon Teile schon vom Atschailo-Tal aus sichtbar werden, liegen darin. Geht man im Kaündü-Tal aufwärts, so bemerkt man, daß auf den Kalk der vergletscherten Kette weit und breit im Südost Phyllit und Tonschiefer folgen. An vielen Stellen bricht auch dort der Gabbro durch. Dieser Phyllitzug streicht nach O.N.O.; sein äußerster nördlicher Saum, aus rotem und grünem Tonschiefer, aus Radiolarit und grauem Phyllit zusammengesetzt, erscheint über der steilen Wand des erwähnten Kalkes auf der linken Talseite. Unterhalb dieser Stelle wendet sich das Kaündü-Tal nach Südwesten und erweitert sich zu einem flachen Becken mit verhältnismäßig niedrigen Rändern. In diesem Becken erscheinen, einen unerwarteten Anblick mitten im wilden Hochgebirge bietend, die lebhaft rotgefärbten Gobi-Sedimente. Diese Sedimente, die ich schon bei Besprechung der stratigraphischen Verhältnisse mehrfach erwähnt habe, findet man auf beiden Seiten des Kaündü-Tals; sie erstrecken sich namentlich aber weit nach Süden, wo sie bis in die Gegend des Utschat-Tals ein nicht hohes, von höheren Ketten umrahmtes Bergland zusammensetzen. Auf der rechten Talseite reichen sie dagegen nur 200 bis 300 m über das Niveau des Flusses und grenzen in scheinbar konkordanter Lagerung an Schiefer oder an die mächtigen Massen von Gabbro, die dort anstehen. Auf der linken Seite sieht man unterhalb der Gobi-Sedimente die Unterlage, aus paläozoischen Bildungen bestehend, an vielen Stellen zutage treten. Allerorten fallen diese Bildungen, hauptsächlich grauer Phyllit und kristallinischer Kalk, nach Süden ein und folgen in langgestreckten Graten dem allgemeinen Streichen nach O.N.O. Über diese Unterlage breiten sich die Gobi-Sedimente in scheinbar konkordanter Auflagerung als eine ausgedehnte Decke aus und bilden das Hangende auf den flachen Südseiten der aus paläozoischen Sedimenten bestehenden Grate und Rücken. Dies geschieht in mehrfacher Wiederholung auf der Linie unseres Profils. An keiner anderen Stelle habe ich eine ähnliche Überdeckung der Gobi-Sedimente durch die alten Bildungen beobachtet. Nichts spricht überzeugender dafür, daß hier große, im Streichen verlaufende Brüche vorhanden sind, als diese Verhältnisse und der Umstand, daß auch die Gobi-Sedimente davon getroffen worden sind, zeigt, daß diese Brüche während der letzten großen Phase der gebirgsbildenden Bewegungen entstanden sind. Das Ausmaß der Brüche muß sehr beträchtlich sein. Die sichtbare Höhe

---

[1]) Merzbacher, l. c., S. 77.

der Verschiebung beträgt an einer Stelle der linken Talseite des Kaündü dicht oberhalb der Einmündung des Atschailo-Tals mehr als 800 m. In dieser Höhe sieht man eine Schichte der Gobi-Sedimente, die weiter im Westen am Talboden liegt, über der steilen linken Uferwand. Hieraus ergibt sich zugleich, daß an dieser Stelle die tiefe und breite Furche des Kaündü-Tals erst nach der Bildung der Brüche entstanden sein kann.

Die steilen Nordseiten der Grate, welche den Verlauf der Brüche bezeichnen, lassen deutlich erkennen, daß sich die Schichten nach Westen neigen. Dies ist eine Erscheinung von allgemeiner Bedeutung, denn sie wiederholt sich an allen in Frage kommenden Stellen. Das Gebirge, das also aus langgestreckten, durch die Brüche getrennten, nach O.N.O. streichenden Schollen besteht, steigt nach Osten allmählich an. Was hier in der Umgebung des mittleren Kaündü-Tals so deutlich sichtbar ist, wiederholt sich im Inyltschek-Tal und in der Kette des Khan-Tengri. Auch dort sind große Brüche vorhanden, die besonders deutlich auf der rechten Seite der Endzunge des Inyltschek-Gletschers hervortreten und scheinbar in der Richtung der Talachse verlaufen; sie trennen die Kette des Khan-Tengri von der zentralen Kette und die linke Uferkette des Inyltschek-Tals vom Sary-dschass-Tau. Auf diese Weise erklärt sich die auffällig große Verschiedenartigkeit in der Zusammensetzung der Ufergebirge auf beiden Seiten des Inyltschek-Tals. Die Linie dieses Tals wird zu einer tektonisch wichtigen Linie, welche die in geologischer Beziehung natürliche, südliche Grenze des nördlichen zentralen Tian-Schan hier zu ziehen gestattet (siehe S. 91). In diesen Verhältnissen zeigt sich aber fast ausschließlich die Wirkung der letzten Bewegungen. Wie das Gebirge vordem beschaffen war, ist heute schwer zu ermitteln. Vor allem erscheint es für diesen Zweck wichtig, das Alter der mächtigen Dolomit- und Kalkmassen zu kennen, die in der Umgebung des Khan-Tengri und südlich vom Inyltschek-Tal so weit verbreitet sind.

Unterkarbonische Fossilien, darunter Productus giganteus, kommen am oberen und mittleren Inyltschek-Gletscher vor und Merzbacher hält dafür,[1]) daß zwischen dem hellen Gestein der Gipfelpyramide des Khan-Tengri und dem Phyllit an seiner Basis eine ausgesprochene Diskordanz vorhanden sei. Die Natur dieser Diskordanz, ob stratigraphisch oder tektonisch, konnte nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Die Tatsache aber, daß der helle Kalk und Dolomit des Gipfels verhältnismäßig flach liegt, der Phyllit darunter aber überaus heftig gestört worden ist, macht es sehr wahrscheinlich, daß auch der Gipfel des Khan-Tengri aus unterkarbonischem Kalk und Dolomit besteht, und daß an dessen Basis eine ähnliche wichtige Transgressionsdiskordanz vorhanden ist, wie die, welche wir schon kennen gelernt haben, als von den Verhältnissen auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals, am Kaschka-tur-Paß die Rede war. Ein Teil der Kalk- und Dolomitmassen ist aber älter, und hiedurch wird die Erkennung der Verhältnisse sehr erschwert.

Die ganz alten, vor der unterkarbonischen Transgression erfolgten Bewegungen mögen, wie auch das Beispiel der Schieferzone des Bayum-kol-Tals zeigt, sehr heftig gewesen sein. Im hohen Grade auffallend ist in diesem Teile des Gebirges die Beständigkeit des südlichen Einfallens.

Wir fassen also kurz zusammen, was sich an der Hand der bisherigen Beobachtungen über das Gebirge in der Umgebung des Khan-Tengri und südlich vom Inyltschek-Tale sagen läßt:

---

[1]) Mündliche Mitteilung.

Granitische Gesteine sind selten, dagegen basische Eruptivgesteine außerordentlich häufig. Als Sedimente zeigen sich hauptsächlich Phyllit, Tonschiefer, Dolomit und Kalk. Untergeordnet kommt Radiolarit und Quarzit vor. Über diesen alten Bildungen erscheinen (wahrscheinlich jungtertiäre) Gobi-Sedimente in der Umgebung des Kaündü- und Utschat-Tals. Alle diese Bildungen streichen im Allgemeinen nach O.N.O.; sie sind, abgesehen von den Gobi-Sedimenten, in Zonen angeordnet, von denen wir, vom Inyltschek-Tal nach Süden gehend, die folgenden unterscheiden können: a) die Zone von kristallinischem Kalk und Dolomit auf der linken Seite des Inyltschek-Tals, b) die Zone von Phyllit, die an der Gabelung des nördlichen Atschailo-Tals sichtbar wird, den Untergrund der Atschailo-Täler nach Südwest bildet und sich nach Nordost in der Kette des Khan-Tengri fortsetzt, c) die Zone von kristallinischem Kalk und Dolomit, in welcher die hohe vergletscherte Kette auf der südlichen Seite der Atschailo-Täler liegt, d) die Zone von Phyllit und Tonschiefer östlich davon in der Umgebung des mittleren Kaündü-Tals. Über c) und d) legen sich die Gobi-Sedimente dieses Tales. Diese Zonen werden im Streichen von Brüchen begleitet, die sowohl in der Kette des Khan-Tengri, als auch besonders in den Gobi-Sedimenten des mittleren Kaündü-Tals sichtbar sind. Die Sedimente steigen, indem sie beständig nach Süden einfallen, allmählich von Westen nach Osten zu den bedeutendsten Höhen des Gebirges am Khan-Tengri und im Hintergrund des Kaündü-Gletschers an.

2. Die zentrale Kette.

An der Stelle, wo sich die Kette des Khan-Tengri in der Mitte des Inyltschek-Gletschers, ungefähr 16 km von dessen Endzunge entfernt, zu erheben beginnt, teilt sie, wie schon hervorgehoben, den Inyltschek-Gletscher in zwei Arme. Auf dem linken (südlichen) Arm ist Merzbacher[1]) bis an den Fuß des Khan-Tengri vorgedrungen. Der rechte Arm aber, der schmäler ist als der linke, erwies sich als unzugänglich; denn die ganze Breite zwischen dem südlichen Ende der Kette des Khan-Tengri und der nördlich davor liegenden zentralen Kette wird von einem Eissee[1]) eingenommen, der von steilen Felswänden eingeschlossen, den Zugang versperrt. Wir kennen also die Furche des nördlichen Gletscherarms nicht und wissen nicht, aus welchen Gesteinen dort der südliche Abfall der zentralen Kette besteht. Dagegen ist deren nördliche Seite gut bekannt. Würde man von dem nördlichen Fuße des Khan-Tengri nach Norden über die zentrale Kette steigen, so käme man dicht östlich an dem höchsten darin liegenden Gipfel, den Merzbacher Pik Semonow genannt hat,[2]) vorbei auf den vereisten Kamm, der die Firnbecken des Semonow- und Muschketow-Gletschers von den Firnbecken des westlichen Bayum-kol-Gletschers trennt. Dieser Kamm trägt die zwei Einschnitte, welche als Semonow- und Bayum-kol-Paß bezeichnet wurden, und auf ihm verläuft, wie wir schon wissen (S. 92 etc.), vom Aschu-tör-Paß her die Wasserscheide des zentralen Tian-Schan. Das Stück der zentralen Kette, das sich von diesem Kamme und von der östlichen Seite des Pik Semonow nach Osten bis zum Pik Nikolai Michailowitsch erstreckt, liegt im Hintergrunde des Bayum-kol-Tals, den wir nun zunächst betrachten wollen.

Eine tiefe Einsenkung trennt diesen Teil der zentralen Kette, deren Gipfel mehr als 6000 m hoch sind, von dem im Norden liegenden Gebirge, das von dem Bayum-kol-Fluß

[1]) Merzbacher, l. c., S. 70 f. [2]) ibidem S. 19.

von Süden nach Norden tief durchfurcht worden ist. In dieser Einsenkung fließen die beiden Zweiggletscher des Bayum-kol fast aus entgegengesetzten Richtungen, von O.S.O. und von W.S.W. zu einer gemeinsamen Endzunge zusammen. Die einzelnen Firnbecken, welche diese beiden Gletscher alimentieren, liegen, in einer Reihe nebeneinander, in karartigen Vertiefungen des nördlichen Abfalles der zentralen Kette.[1])

Die Moränen, die aus diesen Firnbecken kommen, geben Aufschluß über die Gesteine, aus denen die zentrale Kette besteht. Man findet stark veränderte Sedimente, granitische Gesteine scheinen aber nicht vorzukommen. Sehr häufig ist weißer, körniger Kalk, dann dunkler Kalk; jede Spur von organischen Resten ist daraus verschwunden. Diese Gesteine stammen von den höchsten Teilen der Kette, wo an manchen Stellen der steile Fels aus dem mächtigen Mantel von Schnee und Eis zutage tritt. Auch hellen und dunklen kristallinischen Crinoideenkalk findet man und darin werden Reste von Korallen und Brachiopoden sichtbar; so habe ich zum Beispiele noch erkennbare Reste der Schalen von Spirifer und Diclasma darin gesehen. Der Crinoideenkalk stammt gleichfalls zum größten Teile vom oberen Teil der Umrandung.

Obgleich die große und mächtige Decke von Schnee und Eis, welche die nördlichen Abhänge der zentralen Kette bekleidet, es verhindert, die Stellen zu erreichen, wo diese Gesteine anstehen, so kann man doch auch schon von ferne sehr gut beobachten, daß in der Tat der Kamm der Kette und der obere Teil ihres nördlichen Abhangs aus hellem und dunklem kristallinischen Kalk bestehen. Und an dem Wechsel der Farbe erkennt man sehr deutlich, daß die Kalkbänke steil stehen und in der Richtung der Kette, also O.N.O. bis N.O. streichen. Dies wird auch bestätigt durch Beobachtungen an den Abhängen der von der zentralen Kette nach Norden abzweigenden Seitenkämme. Hier stehen die Schichten allerdings nicht mehr ganz senkrecht, sondern sie fallen mehr oder weniger steil nach Süden ein (siehe Profil X), und man sieht an den höher gelegenen Aufschlüssen, daß die Änderung des Fallens allmählich vor sich geht.

Am Boden der Einsenkung, worin die beiden Bayum-kol-Gletscher liegen, gibt es zwischen dem Eis und den Moränen nur wenig entblößtes Gestein; man vermag daher kein vollständiges Profil der Zusammensetzung des Baus des Gletscherbodens zu bilden. Immerhin gewinnt man einige Klarheit dadurch, daß man die über das ganze Gletschergebiet zerstreuten Aufschlüsse so miteinander verbindet, daß sie Teile eines Profiles werden. Gerade südlich von der Stelle, wo sich die beiden Hauptarme des Bayum-kol-Gletschers zu der gemeinsamen Endzunge vereinigen und genau in der nach Süden verlängerten Richtung des obersten Bayum-kol-Tals endigt ein mit Schutt bedeckter Seitenkamm der zentralen Kette, auf dem man allmählich fast bis zu deren halben Höhe nach Süden ansteigen kann. An diesem Kamme (Profil II auf Taf. III in der unteren rechten Ecke) zeigt sich, aus welchen Gesteinen der südliche Teil des Gletscherbodens und der Fuß der zentralen Kette bestehen.

Man findet, wenn man vom Fuße der Kette nach Norden geht, die folgenden Verhältnisse: Der stark veränderte helle und dunkle Kalk, der, wie gesagt, hauptsächlich die hohen Teile der zentralen Kette zusammensetzt, kommt an dem unteren Teile ihres

[1]) Siehe die Abbildung auf Taf. I, die einen Teil des östlichen Zweiggletschers, seine Firnbecken sowie den Pik Nikolai Michailowitsch zeigt.

nördlichen Abhangs nur noch selten vor; dort wird dünnbankiger kristallinischer Crinoideenkalk sichtbar, der mit Kalktonschiefer und Tonschiefer wechsellagert, und nach Norden stellt sich mehr und mehr Phyllit ein. Vom Fuße der Kette sieht man bis zu dem Ende des Seitenkamms diese Bildungen eine mannigfach wechselnde Schichtenfolge zusammensetzen, so daß die kalkigen Glieder hauptsächlich am Fuße der zentralen Kette und in dessen Nähe, die tonigen dagegen mehr im Norden, im südlichen Teile und in der Mitte des Gletscherbodens vorkommen.

Diese Anordnung der verschiedenen Sedimente kann man sehr gut außer in Abbldg. X und XI, in Fig. 2 auf Taf. I erkennen. Der kristallinische Kalk, dessen senkrechte Stellung

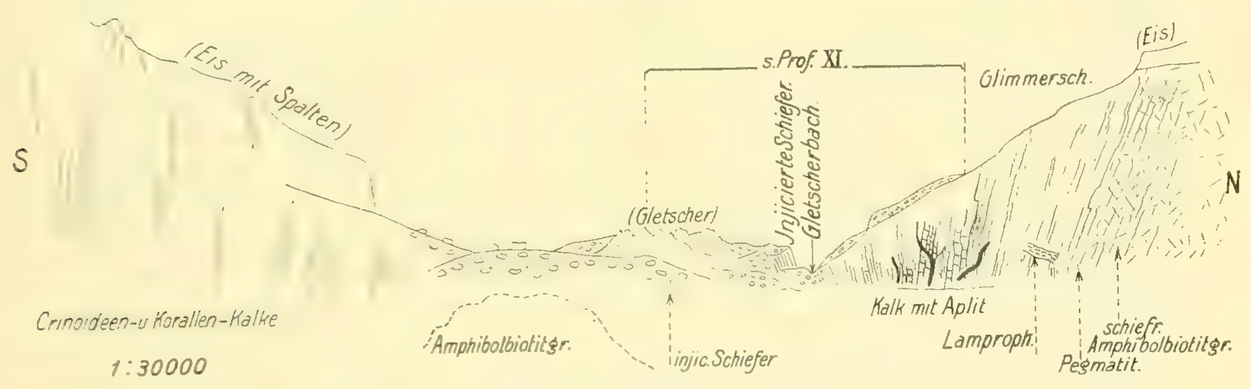


Fig. X. Profil durch den Gletscher des Bayum-kol-Talschlusses von Süd nach Nord.

durch den Wechsel von heller und dunkler Färbung dort sehr scharf hervortritt, zeigt sich besonders deutlich an der steilen Westwand des Pik Nikolai Michailowitsch, von wo er, geradlinig nach Westen und Osten streichend, den Kamm und die Gipfel der zentralen Kette zusammensetzt. Am Fuße der Kette zeigen sich die nach Norden abzweigenden Seitenkämme, welche die Firnbecken des östlichen Bayum-kol-Gletschers voneinander trennen. Diese Seitenkämme haben keine scharfen Formen; sie sind gerundet und sehr stark mit Schutt bedeckt, bestehen aus Phyllit und Schiefern, die, wie man sehr gut beobachten kann, einen breiten nach Osten verlaufenden Streifen zusammensetzen.

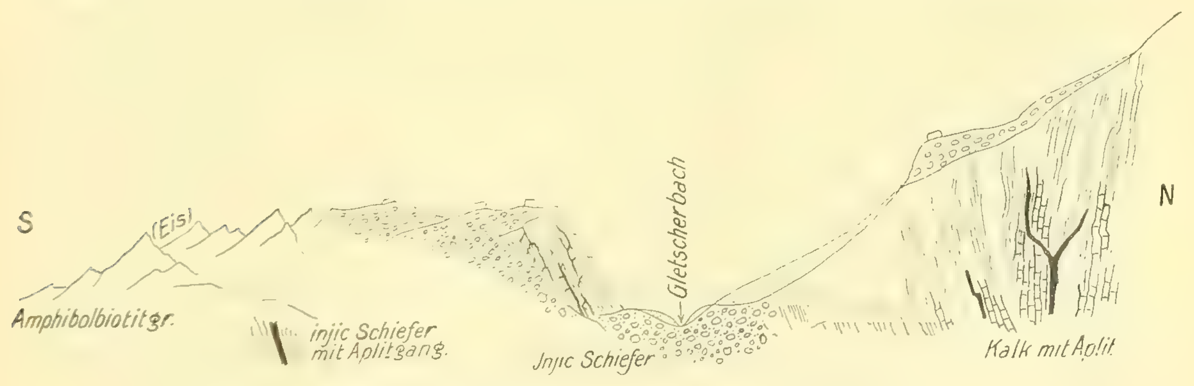


Fig. XI. Profil durch den Gletscher des Bayum-kol-Talschlusses von Süd nach Nord. Mittelstück aus Profil X.

Die bisher geschilderten Verhältnisse zeigen also, daß der südliche Teil der Umrandung des Bayum-kol-Gletschers aus zwei verschiedenen Teilen besteht: nämlich aus dem steilstehenden Kalk der zentralen Kette und aus einer Schichtenfolge von Kalk, Tonschiefer und Phyllit, die am Fuße der Kette sichtbar wird und ungefähr bis in die Mitte des Gletscherbodens reicht. In der nördlichen Hälfte des Gletscherbodens und in seiner nördlichen Umrandung finden wir dagegen andere Gesteine: nämlich solche granitischer Natur und dazwischen eine schmale langgestreckte, im Streichen verlaufende Zone von injizierten und deshalb sehr stark veränderten Schiefern. Der Kontakt zwischen den granitischen Gesteinen des Gletscherbodens und dem Phyllit und Tonschiefer in dessen südlichem Teile ist namentlich an dem Ende des Seitenkammes deutlich zu sehen, der nahe an der Stelle endigt, wo sich die beiden Hauptarme des Bayum-kol-Gletschers vereinigen.

Man findet dort am Kontakt von Süden nach Norden (siehe Profil II auf Taf. III) erst Tonschiefer und Phyllit, dann einen schmalen Streifen von zerrüttetem, stark verändertem Kalk, hierauf granitisches Gestein. Durch die petrographische Untersuchung des Kalks wurden die Erscheinungen der Kontaktmetamorphose nachgewiesen; das granitische Gestein gehört zu dem Amphibolbiotitgranit des oberen Bayum-kol-Tals. Wenn man sich in der Richtung dieses Profiles weiter nach Norden begibt, so kommt man am Ende des Seitenkammes auf die Endzunge des Bayum-kol-Gletschers, wo eine Strecke weit alles anstehende Gestein mit Eis und Moräne bedeckt ist. An der Spitze der Endzunge sieht man aber neben dem Eise, auf dessen westlicher Seite, zuerst mürbes, grünliches Gestein, dann nördlich davon ein wenig Biotitglimmerschiefer.

Wir müssen nun, um diese Verhältnisse genauer kennen zu lernen, die oben erwähnten Gesteine im Streichen verfolgen, bis wir in der westlichen und östlichen Umrandung der Bayum-kol-Gletscher dazu geeignete Aufschlüsse finden.

Zunächst ist der Kontakt zu verfolgen, der nur eine kurze Strecke weit sichtbar ist. Man sieht ihn am Ende des erwähnten Seitenkammes, dann taucht er nach Osten unter das Eis und die Moränen des östlichen Bayum-kol-Gletschers hinab und verläuft darunter bis hin an den äußersten östlichen Rand der Einsenkung, in welcher die Bayum-kol-Gletscher liegen. Dort wird er nochmals sehr deutlich sichtbar. Es kann kaum ein Zweifel darüber sein, daß die gerade Verbindungslinie zwischen diesen beiden Stellen den Verlauf des Kontaktes unter dem Eise ungefähr richtig wiedergibt. Nach Westen ist dieser viel schwerer zu verfolgen als nach Osten; denn der westliche Bayum-kol-Gletscher ist stark zerrissen und verhüllt die Stellen, wo der Kontakt beobachtet werden könnte, noch mehr als in der östlichen Umrandung. Die Tatsache aber, daß an der östlichen Seite des Kammes, der die Firnbecken des westlichen Bayum-kol-Gletschers und des Semonow-Gletschers trennt, außer den Gesteinen, die wir am Fuße der zentralen Kette finden, auch Granit ansteht,[1]) macht es sehr wahrscheinlich, daß der Kontakt auch dort vorhanden ist.

Wir sehen also, daß die Sedimente, die den Fuß der zentralen Kette und den südlichen Teil des Bodens der beiden Bayum-kol-Gletscher zusammensetzen, an einer langen, geraden, dem allgemeinen Streichen folgenden Linie durch die granitischen Gesteine, woraus der nördliche Teil des Gletscherbodens besteht, begrenzt werden. Diese granitischen Gesteine sieht man, abgesehen von dem vordersten Ende des schon öfters erwähnten Seiten-

[1]) Merzbacher, l. c., S. 29.

kammes, auch an einigen Stellen, sowohl am nördlichen Rande des östlichen Bayum-kol-Gletschers als auch im Westen zwischen dem Eis und den Moränen des westlichen Gletscherarms. Leider ist es nicht möglich im Osten die Breite des Zuges, den sie zusammensetzen, zu ermitteln, da dort dessen Grenze gegen die im Norden folgenden injizierten Schiefer durch den Gehängeschutt und zum Teil auch durch Vegetation verdeckt wird.

Die Länge dieses Zuges ergibt sich für die Einsenkung der Bayum-kol-Gletscher aus der Entfernung der Stellen, wo sein Kontakt gegen die Sedimente am Fuße der zentralen Kette noch sichtbar ist: im Osten erreicht er also den äußersten Teil der Umrandung und wahrscheinlich reicht er noch weiter darüber weg; nach Westen erstreckt er sich, indem er allmählich breiter wird, noch über den Semonow-Gletscher hinaus; denn man findet dort noch in dessen oberem Teile die Zone der injizierten Schiefer (siehe die Karte).

Die dortige Breite dieses Zuges kann nur geschätzt werden; in dem Profil der Endzunge (Profil II auf Taf. III) ist dieser quer zum Streichen ungefähr 700 m weit sichtbar oder an dem Gehängeschutt zu erkennen; es ist aber sehr wahrscheinlich, daß er sich noch 200 bis 300 m weiter nach Norden unter dem Eis und den Moränen der Endzunge fortsetzt; so mag seine Breite hier ungefähr 1 km betragen. Dies ist aber wohl auch seine größte Breite innerhalb der Umrandung des Bayum-kol-Gletschers.

Die Zone der injizierten Schiefer, die diesen Granitzug im Norden begrenzt, ist nicht so breit; ihre Grenzen sind aber nur an wenigen Stellen deutlich zu erkennen. Dennoch kann man die Schiefer sowohl an der Beschaffenheit des Gehängeschutts als auch an der Zusammensetzung der Moränen in der Streichrichtung innerhalb der Umrandung der Bayum-kol-Gletscher so weit verfolgen, als der Granitzug und sein Kontakt gegen die Sedimente der zentralen Kette zu sehen ist.

Die petrographische Beschaffenheit der injizierten Schiefer ist in der Arbeit von Richarz zu finden, und ich will deshalb hier nur die hauptsächlichsten Verhältnisse anführen:

In den Aufschlüssen, die zwischen dem Eis und den Moränen des westlichen Bayum-kol-Gletschers an einigen Stellen vorhanden sind, finden wir ziemlich nahe dem nördlichen Rande des Granitzugs zum größten Teil in losen Blöcken der Moräne, aber auch anstehend, ein stark gepreßtes granitisches Gestein, dessen basische Gemengsteile in Lagen angeordnet und in der Zersetzung begriffen oder schon zersetzt worden sind. Große an den Rändern ausgezogene Feldspate liegen darin. Dieses Gestein gehört zum Granitzug; es stimmt vollständig mit dem Gestein an der nördlichen Grenze des Granitmassivs im oberen Bayum-kol-Tal überein. Zwischen der Stelle, wo es in den Moränen und unter dem Eise des westlichen Bayum-kol-Gletschers vorkommt und dieser Grenze liegen nun die injizierten Schiefer, die namentlich in der tiefen Furche des Baches aufgeschlossen sind, der am nördlichen Rande des westlichen Bayum-kol-Gletschers entspringt. Es sind hauptsächlich Kalk und Tonschiefer, die von Aplitgängen und Adern durchschwärmt werden und so verändert worden sind, daß man mit bloßem Auge kaum noch erkennen kann, daß das Gestein ursprünglich ein Sediment gewesen ist. An einigen Stellen hat es eine deutlich gneisähnliche Beschaffenheit angenommen; an anderen Stellen, dicht an der Grenze des Granitmassivs des oberen Bayum-kol-Tals ist die Veränderung nicht so weit gegangen.

Wir können in der Zone der injizierten Schiefer drei verschiedene Glieder in petrographischer Beziehung unterscheiden: nämlich erstens den Biotitglimmerschiefer, der hauptsächlich am nördlichen Rande des östlichen Bayum-kol-Gletschers dicht neben dem

Granit des oberen Bayum-kol-Tals vorkommt (siehe Profil I auf Taf. III), zweitens das grünliche, mürbe Gestein, das wir von der linken Seite der Endzunge des Gletschers kennen, das auch in der Furche des westlichen Bayum-kol-Gletschers aufgeschlossen ist und zu dem wahrscheinlich auch der Chloritknotenschiefer gehört, den man in der rechten Ufermoräne der Endzunge findet, zuletzt die veränderten Kalke und Tonschiefer, die hauptsächlich am nördlichen Rande des westlichen Bayum-kol-Gletschers, an der Grenze des Granitmassivs des oberen Bayum-kol-Tals anstehen.

Obgleich es sehr wahrscheinlich ist, daß diese Angaben, die sich aus den bisherigen, noch nicht erschöpfenden Beobachtungen und aus nur wenigen Aufschlüssen ergeben, die ganze Verbreitung dieser Gesteine nicht ganz genau wiedergeben, so zeigen sie doch, daß die Zone der injizierten Schiefer auf den beiden Seiten der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers verschieden zusammengesetzt ist; denn der Glimmerschiefer der rechten Talseite scheint auf der linken zu fehlen, wogegen die veränderten Kalke und Tonschiefer auf der rechten Seite kaum sichtbar sind.

Dies trifft zusammen mit einer gewissen Verschiedenheit der granitischen Gesteine auf den beiden Seiten der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers; es läßt sich darüber heute zwar noch nichts ganz Bestimmtes sagen, es scheint aber, als hätte diese Verschiedenheit der granitischen Gesteine ihren Grund in einem Altersunterschiede. Jedenfalls verläuft die südliche Grenze des Granitmassivs des oberen Bayum-kol-Tals nicht so regelmäßig, wie die auf dessen nördlicher Seite. Da ich sie aber wegen der starken Moränendecke und wegen des Gehängeschutts nicht genau verfolgen konnte, so habe ich es vorgezogen, sie auf der geologischen Übersichtskarte geradlinig anzugeben.

Wir unterscheiden also im Hintergrunde des Bayum-kol-Tals, das ist in der zentralen Kette und in der vor ihr im Norden liegenden Einsenkung der beiden Bayum-kol-Gletscher in geologischer Beziehung die folgenden Glieder:

a) den kristallinischen Kalk der Kette, b) die Schiefer an ihrem nördlichen Fuße, die bis zu der Mitte der Einsenkung reichen, c) den schmalen Granitzug in der nördlichen Hälfte der Einsenkung und d) die Zone der injizierten Schiefer an dessen nördlichem Rande.

Wie wir gesehen haben kann man alle diese Glieder längs der ganzen Einsenkung der beiden Bayum-kol-Gletscher annähernd verfolgen. Die kristallinischen Kalke der zentralen Kette reichen über den Pik Nikolai Michailowitsch hinaus nach Osten und dies gilt auch für die Schiefer vom nördlichen Fuß der Kette. Der schmale Granitzug in der nördlichen Hälfte der Einsenkung ist noch in deren östlichen Umrandung sichtbar, ebenso die Zone der injizierten Schiefer. Es ist aber unbekannt, wie weit sich diese beiden Glieder noch darüber hinaus nach Osten erstrecken.[1]) Dagegen können wir sie nach Westen eine beträchtliche Strecke weit verfolgen. Wir sehen den kristallinischen Kalk in der zentralen Kette auch noch in deren höchstem Gipfel, dem Pik Semonow, an dessen westlicher Flanke zutage treten, wo auch die steile Stellung der Schichten noch deutlich sichtbar wird. Von dort nimmt die zentrale Kette, wie aus der Skizze Figur XVI ersichtlich wird, ungefähr bis zum Meridian des Eissees, der den nördlichen Arm des Inyltschek-Gletschers

---

[1]) Ich möchte hiezu ergänzend bemerken, daß ich die gleichen Gesteine, in der gleichen Folge weiter im Osten bei meinen Untersuchungen im Hintergrunde der Täler Saikal und Dondukol feststellen konnte. G. Merzbacher.

absperrt, fast einen Kammverlauf in gerader Linie. Am nördlichen Fuße des Piks Semonow breitet sich das dem Semonow- und dem Muschketow-Gletscher gemeinsame große Firnbecken aus. Etwas weiter westlich hiervon erhebt sich aber zwischen den beiden Gletschern, erst schmal dann aber nach Westen rasch breiter und höher werdend, eine Zwischenkette, die weiterhin den nördlichen Rand des Muschketow-Gletschers bildet. Der nördliche Abfall dieser Kette ist ganz vereist, die südliche Seite dagegen ist von Eis

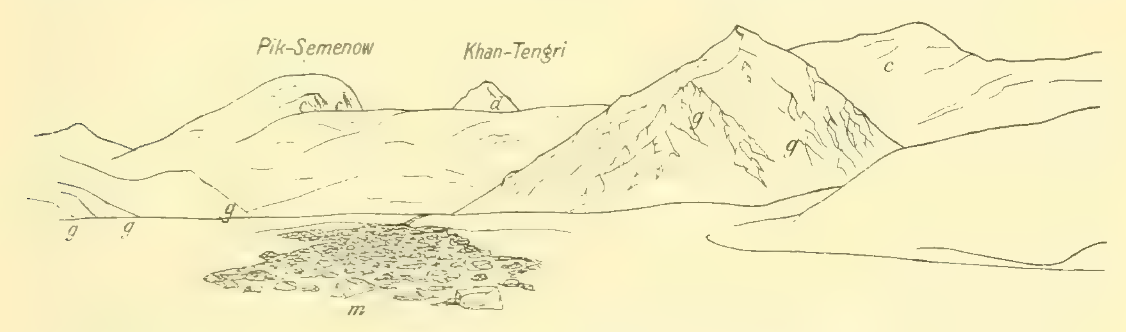


Fig. XVI. Blick von der Mittelmoräne des oberen Semenow-Gletschers (4000 m) nach S.S.O. auf zentrale Kette.

g Granit der Zwischenkette, d Dolomit und dolomitischer, sowie kristallinischer Kalk des Khan-Tengri, c kristallinischer Kalk der zentralen Kette, m Mittelmoräne des Semenow-Gletschers.

und Schnee in ihren unteren Teilen frei und man sieht, daß sie hauptsächlich aus granitischen Gesteinen besteht. Diese Gesteine liegen nun genau in der westlichen Fortsetzung des Granitzugs, den wir aus der nördlichen Hälfte der Einsenkung der beiden Bayum-kol-Gletscher kennen gelernt haben. Obgleich wir diesen Zug von Osten her nur bis an den schon mehrfach erwähnten wasserscheidenden Kamm, wo er unter Firn und Eis verschwindet, verfolgen können, so ist es doch sehr wahrscheinlich, daß der Granit der eben besprochenen Zwischenkette in Wirklichkeit seine westliche Fortsetzung ist, um so wahrscheinlicher, als die Zone der injizierten Schiefer nördlich davon auch in der Umrandung des oberen Semonow-Gletschers noch einmal sichtbar wird (siehe die geologische Karte).

In der zentralen Kette aber, die, wie gesagt, vom Pik Semonow fast in gerader Linie nach W.S.W. verläuft, erheben sich noch drei oder vier gleichfalls über 6000 m hohe Gipfel, die auf dessen Südseite dem oberen Muschketow-Gletscher einen prachtvollen Rahmen verleihen. An den Flanken dieser Gipfel kann man an einigen Stellen, ähnlich wie an der westlichen Seite des Piks Semonows, beobachten, daß auch hier der kristallinische Kalk noch vorkommt und man erkennt auch deutlich, daß er steil steht. Es ist also kaum ein Zweifel darüber, daß in der Tat der kristallinische Kalk vom Pik Nikolai Michailowitsch her bis in diesen Teil der zentralen Kette und wahrscheinlich auch noch weiter nach Westen reicht. Weiter westlich kenne ich das Gebirge bis in die Nähe des Tüss-aschu-Passes nicht mehr; es trägt dort eine außerordentlich mächtige Eisdecke und Merzbacher,[1] der auch den unteren Teil der Umrandung des Muschketow-Gletschers gesehen hat, berichtet, daß an den nach Norden gerichteten Abhängen der linken Uferkette des Muschketow-Gletschers kein anstehendes Gestein aus dem mächtigen Firn- und Eis-

[1]) Merzbacher, l. c., S. 67.

mantel hervortritt; seine Angaben über die Zusammensetzung der Moränen lassen aber erkennen, daß dort dieselben Gesteine wie in der südlichen Hälfte der Einsenkung des Bayum-kol-Tals vorkommen: nämlich heller und dunkler kristallinischer Kalk, Phyllit und Tonschiefer.

Daraus ergibt sich mit Sicherheit, daß sich der kristallinische Kalk der zentralen Kette bis an den mittleren Teil des Muschketow-Gletschers verfolgen läßt, daß er auch westlich vom Pik Semonow noch die sehr hohen Gipfel der Kette zusammensetzt, und daß er nach den Beobachtungen Merzbachers wahrscheinlich auch noch weiter im Westen vorkommt. Dasselbe gilt von dem aus Phyllit und Tonschiefer zusammengesetzten Streifen am nördlichen Fuße der zentralen Kette; diese Bildungen sind aber westlich von der Einsenkung der Bayum-kol-Gletscher nur noch an wenigen Stellen sichtbar, weil sie dort meist von Firn und Eis bedeckt werden. Man sieht sie nur noch in geringer Ausdehnung auf der linken Seite des Muschketow-Gletschers.

Der in der nördlichen Hälfte der Einsenkung der Bayum-kol-Gletscher auftretende Granitzug reicht also weit nach Westen; er bildet die Zwischenkette zwischen den oberen Teilen des Semonow- und Muschketow-Gletschers und noch weiter im Westen die rechte Uferkette dieses Gletschers, nimmt dabei vom Bayum-kol-Gletscher her nach Westen bedeutend an Mächtigkeit zu.

Am deutlichsten zeigt sich dieses Anschwellen auch am Verlauf der Zone der injizierten Schiefer, die, wie schon hervorgehoben, noch einmal in der Umrandung des oberen Semonow-Gletschers sichtbar werden, dorten aber nördlicher liegen als am Bayum-kol-Gletscher.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der dritten Zone von Gesteinen nochmals zum Bayum-kol-Tal, so vergegenwärtigen wir uns wieder unsern auf S. 136 erwähnten Standpunkt auf dem Bergsturz und erblicken hier nach Süden gewendet:

3. Das Granitmassiv des oberen Bayum-kol-Tals.

Die hauptsächlichsten Verhältnisse dieses Massivs hat Richarz in seiner Arbeit ausführlicher besprochen. Die hohen Teile der nördlichen Umrandung der beiden Bayum-kol-Gletscher bestehen ganz aus den granitischen Gesteinen dieses Massivs, wogegen die unteren Teile noch in der Zone der injizierten Schiefer liegen. Zunächst ist nochmals darauf hinzuweisen, daß die Gesteine des Massivs auf den beiden Seiten der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers nicht völlig miteinander übereinstimmen. Wie weit diese Verschiedenheit geht, hat durch die petrographische Untersuchung leider nicht nachgewiesen werden können, da einige von den Gesteinsproben, die ich auf der linken Seite der Endzunge gesammelt habe, abhanden gekommen sind; sie ergibt sich jedoch auch schon bei makroskopischer Betrachtung. Der Granit auf der linken Seite der Gletscherzunge ist reicher an basischen Gemengteilen, die zum Teil in der Zersetzung begriffen sind, als der Granit auf der rechten Seite; der Feldspat ist fleischrot, und die großen Einsprenglinge haben dieselbe Färbung. In dem Granit der rechten Seite kann man dagegen die spärlichen basischen Gemengteile mit bloßem Auge kaum erkennen, das Gestein hat eine lichtere Färbung und die großen Einsprenglinge des Feldspats sind hellgrau.

Der Granit auf der linken Seite der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers hat äußerlich große Ähnlichkeit mit manchen granitischen Gesteinen der äußeren Gebirgszüge und mit solchen auf der nördlichen Seite des Sary-dschass-Tau. Der Granit der rechten

Seite ist dagegen bisher nur in dem Massiv des oberen Bayum-kol-Tals sowie in dessen westlicher Fortsetzung gefunden worden.

Die Zusammensetzung des Granitmassivs des oberen Bayum-kol-Tals ist im Profil I auf Taf. III dargestellt: wir sehen, daß an den Rändern des ungefähr 5 km breiten Massivs porphyrische Ausbildung vorhanden ist, die sich gegen das Innere des Massivs hin aber bald verliert. Hier, wo das Gestein normalkörnig wird, nimmt der Plagioklas so an Bedeutung zu, daß das Gestein als Tonalit bezeichnet werden kann.

Die südliche Grenze des Massivs bildet, wie schon gesagt wurde, die Zone der injizierten Schiefer, nämlich auf der rechten Seite der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers Glimmerschiefer, auf der linken Seite stark veränderter Kalk und Tonschiefer. Nur in der Tiefe des Einschnittes des Bayum-kol-Tals sieht man die scharfe Grenze zwischen den injizierten Schiefern und den granitischen Gesteinen; in der Höhe ist sie dagegen an den Gehängen meist durch Moräne und Schutt bedeckt. Soweit sie verfolgt werden kann, zeigt es sich, daß sie den Schichtflächen der Schiefer und sehr wahrscheinlich auch im Allgemeinen deren Streichen folgt; noch deutlicher ist dies der Fall am nördlichen Rande des Massivs. Hier grenzen die granitischen Gesteine an Tonschiefer und Phyllit, die durch die Kontaktmetamorphose stark verändert worden sind; ihre Grenzfläche ist den Schichtflächen der Sedimente parallel und folgt daher deren Streichrichtung, die O.N.O. bis O.W. ist. Nach dieser Richtung kann man sie von einem hochgelegenen Punkte innerhalb des Massivs eine beträchtliche Strecke weit auf beiden Seiten des Bayum-kol-Tals überblicken.

Nur im Profil betrachtet, erscheint das granitische Massiv des oberen Bayum-kol-Tals wie ein mächtiger Lagergang, der dem Streichen und Fallen der umgebenden Sedimente auf beträchtliche Entfernung folgt. Wir wollen aber schon hier bemerken, daß der Granitzug in der Einsenkung der beiden Bayum-kol-Gletscher, wie die petrographische Untersuchung lehrt, ohne Zweifel zu dem Massiv des oberen Bayum-kol-Tals gehört, ganz abgesehen von den Gründen, die wir dafür in den tektonischen Verhältnissen finden und in dem Umstand, daß die granitischen Massen nach Westen breiter werden und an Mächtigkeit bedeutend zunehmen.

4. Die Schieferzone des Bayum-kol-Tals.

An der nördlichen Grenze des Granitmassivs kommen wir in die vierte große Zone, die wir in der Umgebung des Bayum-kol-Tals unterschieden haben: nämlich in die mächtige Schichtenfolge von Phyllit, Tonschiefer, amphibolitartigem Gestein, Gneis und Dolomit.

Diese Zone ist im Bayum-kol-Tal sehr breit; sie reicht von der Mitte des oberen bis zu der Mitte des mittleren Talabschnitts und sie wird im Norden, wie wir gesehen haben, von einem Granitmassiv, das schon als ein Teil des südlichen Granitzugs der äußeren Gebirgszüge angesehen werden muß, begrenzt.

Das Profil I auf Tafel III zeigt, daß wir in dieser Schieferzone mehrere Glieder unterscheiden können, und zwar von Süden nach Norden, in der folgenden Anordnung: a) in der nördlichen Hälfte des oberen Bayum-kol-Tals Phyllit und Tonschiefer, b) an der Grenze des oberen und mittleren Talabschnitts einen Streifen von amphibolitartigem Gestein, begleitet von grünlichem Phyllit, von hochkristallinischem Schiefer und Gneis, c) zwei Züge von Crinoideendolomit, die durch ein 1 km breites Granitmassiv getrennt werden, zuletzt d) nochmals einen breiten Streifen von Phyllit und Tonschiefer.

Die verschiedenen Glieder der Schieferzone haben verschiedenes Alter; sie gehören zum Teil zu der Phyllitgruppe, zum Teil zu der Gruppe der Tonschiefer des zentralen Tian-Schan; sie haben also paläozoisches Alter und sind jedenfalls alle älter als der unterkarbonische Kalk. Einige davon fallen durch ihre petrographische Beschaffenheit und durch ihre Färbung so auf, daß man sie leicht im Streichen verfolgen und auch dorten wieder erkennen kann, wo sie vom Bayum-kol-Tal schon weit entfernt vorkommen. Wir finden z. B. denselben Tonschiefer, der im Bayum-kol-Tal in der nördlichen Hälfte des oberen Talabschnitts ansteht, weiter im Westen auf der linken Seite des oberen Sary-dschass-Tals wieder, und der grünliche Phyllit und das amphibolitartige Gestein ist am Aschu-tör-Paß und noch weiter westlich auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals auch sichtbar. Dort ist die Reihenfolge der verschiedenen Glieder der Schieferzone, soweit sie aufgeschlossen sind, dieselbe wie im Bayum-kol-Tal. Dies ergibt sich sogleich, wenn wir den Verlauf der Tonschiefer und des amphibolitartigen Gesteins verfolgen und dieses Profil des oberen Bayum-kol-Tals mit dem Profil des oberen Sary-dschass-Tals vergleichen (s. Profil XII auf Taf. IV).

Wir wollen zunächst die Gruppe der Sedimente betrachten, die wir unter a) zusammengefaßt haben.

Im oberen Teile des Bayum-kol-Tals sieht man darin an der Grenze des oberen Granitmassivs alle Zeichen der Kontaktmetamorphose. Dicht am Granit beobachtet man Hornfels, dann etwas davon entfernt Fleckschiefer, zuletzt Knotenschiefer. Die Regelmäßigkeit dieser Erscheinungen im Ganzen wird nur ein wenig dadurch gestört, daß der Granit zum Teil in mächtigen Apophysen in den umgebenden Mantel der Tonschiefer eingedrungen ist. Man kann nun ganz deutlich beobachten, daß die kristallinische Beschaffenheit der Schiefer in dem Maße abnimmt, als die Entfernung von der Grenze des Granitmassivs zunimmt. Zuerst sieht man, wenn man den eigentlichen Kontakthof verlassen hat, stark veränderte Schiefer: Quarzphyllit und Phyllit, und fast jedes Stück, das man anschlägt, hat auf den Schichtflächen einen dichten Überzug von Glimmer. Diese Beschaffenheit verliert sich ungefähr 2 km vom Massiv entfernt mehr und mehr nach Norden und das Gestein ist nun ein harter plattiger, fast schwarzer oder ein blättriger, weniger fester, dunkelgrauer Tonschiefer, der sich auf den Schutthalden zum Teil mit einer braunen Verwitterungsrinde bedeckt. An einigen Stellen zeigen sich, eingeschaltet in den Tonschiefer, Quarzit und Quarzitschiefer. Dies bleibt so bis in die Nähe des grünlichen Phyllits am nördlichen Ende des oberen Bayum-kol-Tals. In den Tonschiefern eingelagert findet man an mehreren Stellen, namentlich auf der linken Seite des Tals einen feinkörnigen, grauen oder graugrünen, stark gepreßten Granit und Gneisgranit, dessen Verbindung mit dem Tonschiefer der starken Schuttdecke und der Moränen wegen aber nicht erkannt werden kann.

Ganz dieselben Verhältnisse beobachten wir im oberen Teile des Sary-dschass-Tals. Nur finden wir dort unmittelbar am Kontakt gegen das Granitmassiv des Semonow-Gletschers an Stelle von kristallinischem Schiefer einen schmalen Streifen von metamorphem Kalk. Nach Norden folgt darauf zuerst die Zone der Tonglimmerschiefer, dann die der dunklen und grauen Tonschiefer, worin auch hier wie im Bayum-kol-Tal Granit vorkommt.[1])

---

[1]) Friederichsen, l. c., S. 131 und 274.

Das zweite Glied der Schieferzone, das wir mit b) bezeichnet haben, bildet einen viel schmäleren Streifen, als die Phyllite und Tonschiefer südlich davon. Die Breite dieses Streifens beträgt im Bayum-kol-Tal ungefähr 300 bis 350 m; aber die Tatsache, daß diese Bildungen, hauptsächlich grünlicher Phyllit und amphibolitartiges Gestein, auch im Sary-dschass-Tal in derselben Lage zu den Phylliten und Tonschiefern wie im Bayum-kol-Tal vorkommen, zeigt, daß diese Bildungen ein selbständiges Glied der ganzen Schieferzone sind. Im Bayum-kol-Tal ist die Zusammensetzung dieses Streifens wegen der alten Moräne, des Gebirgsschuttes und der dichten Vegetation nur sehr schwierig zu verfolgen; es zeigt sich aber dennoch, daß er aus verschiedenen Bildungen besteht. Man findet dort die folgenden Verhältnisse:

Der obere Teil des Bayum-kol-Tals wird nach Norden durch einen Felsriegel abgeschlossen, der aus grünlichem Phyllit besteht und vom Flusse in einem engen Einschnitt durchbrochen worden ist.[1]) Hinter diesem Riegel kommt man, auf der rechten Talseite gegen Norden gehend, an alte Moräne und Schutt, auf der linken Seite auf einen Bergsturz, der dort einen großen Teil des Gehänges verdeckt. Ungefähr 300 m nördlich von dem Riegel hat sich der Bayum-kol-Fluß zum zweiten Male in gefestigte alte Moräne und anstehendes Gestein eingeschnitten. Bis hierher ungefähr reicht die Serie der Bildungen, die wir unter b) zusammenfaßten.

Auf dieser Strecke also finden wir von Süden gegen Norden zuerst den grünlichen Phyllit, begleitet von weichen, blättrigen chloritischen Schiefern, sodann ein grünliches, zunächst noch schieferiges Gestein, das aber immer dichter wird und in unregelmäßigen, kantigen Stücken springt. In diesem Gestein zeigen sich die ersten Vorkommnisse von Gabbro, der in Lagergängen auftritt. Weiter im Norden sind die Schutthalden so mächtig, daß man, wenigstens im unteren Teile des Gebirges, die Art der Verbindung des Gabbros mit den übrigen ihn umgebenden Bildungen nicht mehr mit Sicherheit erkennen kann. Noch weiter talabwärts stehen Glimmerschiefer und gneisähnliche Schiefer an, sodann Gneis; dieser reicht bis an den zweiten, oben erwähnten Einschnitt des Bayum-kol-Flusses (siehe Profil I).

Im Sary-dschass-Tal dagegen zeigt sich nur der südliche Teil dieser Schichtenfolge, nämlich nur der grünliche Phyllit und das amphibolitartige Gestein. An der Stelle, wo das Kara-kol-Tal in das Sary-dschass-Tal mündet, sieht man (siehe Profil Fig. XII), in dem breiten Schotterbett des Sary-dschass nach Norden gehend, an den unteren Teilen des Gebirges auf der rechten Talseite einige Rundhöcker, die aus grünlichem Phyllit bestehen, darauf bis zu der Höhe des Gehänges alte Moräne, dann nochmals eine Strecke weit grünlichen Phyllit und den weichen blättrigen, chloritischen Schiefer, zuletzt in der Furche eines von Norden kommenden, hängenden Seitentales das amphibolitartige Gestein. Sobald man dieses erreicht, verliert sich die deutliche Schichtung. Obgleich es mir nicht gelungen ist hier ein basisches Eruptivgestein, wie im Bayum-kol-Tal zu finden, so besteht für mich doch kaum ein Zweifel darüber, daß das amphibolitartige Gestein daraus hervorgegangen, aber fast bis zur Unkenntlichkeit verändert und zersetzt worden ist. Noch weiter nach Norden stößt man erst auf einen schmalen Zug von Granit

---

[1]) Merzbacher, l. c., S. 8.

und darauf auf unterkarbonischem Kalk, der mit mäßiger Neigung nach Norden einfällt und sich weit und breit nach Westen, Norden und Osten ausdehnt.

Es bleibt nun noch ein Sediment zu erwähnen, dessen stratigraphische Stellung nicht sicher zu ermitteln ist, dessen weite Verbreitung an der Grenze von Tonschiefer und grünlichen Phyllit (b) aber zeigt, daß es eine gewisse Bedeutung hat. Es ist dies das schon bei der Besprechung der paläozoischen Sedimente (S. 106) erwähnte Quarzitkonglomerat. Dieses Konglomerat ist im Sary-dschass-Tal, an der Stelle, wo sich der Sary-dschass und der Kara-kol vereinigen und weiter im Osten im Kara-kol-Tal auf der rechten Talseite nahe am Flußbett nur wenig mächtig aufgeschlossen. Man sieht es zwischen Tonschiefer und grünlichem Phyllit auch auf der westlichen Seite des Aschu-tör-Passes, und es kommt außer in den früher erwähnten Örtlichkeiten auch im Bayum-kol-Tal vor. Dort habe ich es aber nicht anstehend, sondern nur in Blöcken auf den Schutthalden am nördlichen Ende des oberen Talabschnittes gefunden. Das Konglomerat ist deshalb interessant, weil überall seine Gerölle stark deformiert sind und das ganze Gestein verändert ist. Dadurch unterscheidet es sich von den ähnlichen Konglomeraten an der Basis des unterkarbonischen Kalks, deren Gerölle unverändert sind. In Anbetracht der weiten Verbreitung dieser Konglomerate ergibt sich hieraus, daß die Veränderung des Konglomerates an der Grenze von Phyllit und Tonschiefer schon vor der unterkarbonischen Transgression erfolgt sein muß.

Wir wenden uns nun zur dritten Gruppe von Sedimenten, die die Schieferzone des Bayum-kol-Tals zusammensetzen, nämlich zu (c) den beiden Zügen von Crinoideendolomit.

Nördlich vom erwähnten zweiten engen Einschnitt des Bayum-kol sieht man noch eine Strecke weit talabwärts Gneis; dann kommt eine Schutthalde, die die Grenze zwischen Gneis und dem darauffolgenden Dolomit verdeckt. Zusammensetzung und Bau des nächsten talabwärts folgenden Stückes der rechten Talseite sind am besten auf der Skizze Figur XVII zu erkennen (dazu Profil I). Man bemerkt dort von Süden nach Norden zunächst ein breites steil abfallendes Band des Dolomits, das schräg den Hang hinaufzieht. Die Bänke des Dolomits fallen steil nach Süden ein; sie werden talabwärts durch Glimmerschiefer begrenzt, der allmählich in Gneisgranit übergeht; dann folgt der Kern eines ungefähr 1 km



Fig. XVII. Talboden des mittleren Bayum-kol-Tals (rechte Talumrandung) von der linken Seite gegen O.S.O. gesehen.

gr präkarbonischer Granit, an den Rändern Gneisgranit, gn Gneis, p Phyllit und amphibolitartige Gesteine, m Gabbro, c karbonische Kalke, d Dolomit, s Tonschiefer und Phyllit, Adinole und Hornfels. Streichen O.W. bis O.N.O. Fallen steil nach Süd oder senkrecht.

breiten Granitmassivs, das aus Biotitgranit besteht. Der nördliche Rand dieses Massivs zeigt wieder Gneisstruktur; nochmals wie an dessen äußersten südlichen Saume zeigt sich Glimmerschiefer und darauf das zweite senkrecht stehende Band des Dolomits. Das Streichen des Dolomits ist hier 80° O.N.O. bis O.W. Die petrographische Untersuchung hat ergeben, daß der vom Dolomit eingeschlossene Granit dieselbe Zusammensetzung und Beschaffenheit zeigt wie der Biotitgranit in der nördlichen Hälfte des mittleren Bayum-kol-Tals, der zu den präkarbonischen Graniten der äußeren Gebirgszüge zu zählen ist. Wenn man nun die Grenzzone dieses Granitmassivs gegen den nördlich darauffolgenden Dolomit genauer untersucht, so zeigen sich zwischen dem Glimmerschiefer am äußersten Saume des Massivs und dem Dolomit zunächst noch etwas Phyllit und feinblättriger graugrüner Tonschiefer, die mit dünnplattigem dolomitischem Kalk wechsellagern und im Ganzen nur wenig mächtig sind, weshalb ich sie in das Profil nicht eingezeichnet habe. Dann erst folgt der massige, zum Teil in dicken Bänken abgelagerte Dolomit. Mitten darin findet man aber wieder graugrünen Tonschiefer mit plattigem, dolomitischem Kalk wechsellagernd und dann am nördlichen Rande des Dolomitbandes nochmals denselben Wechsel und einen allmählichen Übergang in die weiter talabwärts folgenden Phyllite und Tonschiefer.

Damit kommen wir zu dem letzten, am weitesten im Norden liegenden Stücke (d) der Schieferzone des Bayum-kol-Tals, welche vom petrographischen Gesichtspunkt aus in der Abhandlung von Richarz erläutert wird. Ich möchte hiezu noch hervorheben, daß an der Grenze gegen den nördlich folgenden präkarbonischen Granit Zeichen der Kontaktmetamorphose in Gestalt von Hornfels und Adinolen deutlich sichtbar sind; auch Aplit findet man in den Schiefern.

Im Sary-dschass-Tal haben wir nur den südlichen Teil der Schieferzone, den Phyllit und Tonschiefer, den grünlichen Phyllit und das amphibolitartige Gestein getroffen. Wie wir gesehen haben, folgt auf der rechten Seite des oberen Sary-dschass-Tals darauf zuerst Granit, dann unterkarbonischer Kalk. Wir finden dort weder den Gneis, noch den Dolomit, noch den Phyllit und Tonschiefer. Um dieses Verhältnis zu erklären, müssen wir nochmals einen Blick auf Profil (Figur VI S. 111) werfen: Durch mehrfache Beobachtungen hat sich ergeben, daß der grünliche Phyllit mit den amphibolitartigen Gesteinen von Osten her über den Aschu-tör-Paß, längs der rechten Seite des Kara-kol- und des Sary-dschass-Tals bis in die Gegend des Kaschka-tur-Passes streichen; sie bilden auf dieser ganzen Strecke (siehe die Karte) einen zusammenhängenden, zwar schmalen, aber geschlossenen Zug, der im Kara-kol- und im Sary-dschass-Tal orographisch dadurch deutlicher hervortritt, daß dort die unmittelbar südlich davon liegenden Tonschiefer durch die Erosion entfernt worden sind und sich an ihrer Stelle das ungemein breite Schotterbett des Sary-dschass ausdehnt. Etwas talaufwärts vom Kaschka-tur-Paß sieht man nun, daß der Phyllitzug der rechten Talseite an quer zum Streichen gerichteten Verschiebungen mehrere Male nach Norden zurückweicht, so daß der mit alter Moräne bedeckte Talboden des Sary-dschass rechtwinklig in die Talwand vordringt und dadurch rasch breiter wird. Der Phyllitzug der rechten Talseite ist also durch große quer zum Streichen gerichtete Verschiebungen in mehrere Stücke zerschnitten worden (siehe auch S. 107) und diese Stücke liegen so, daß die rechte Talwand talaufwärts vom Kaschka-tur-Paß, im Grundriß gesehen, wie eine Treppe aussieht, wodurch das am weitesten im Westen gelegene Stück auch am weitesten im Norden liegend erscheint. Ungefähr 5 km talabwärts vom Kaschka-

tur-Paß endigt nun im Sary-dschass-Tal das letzte Stück des Phyllitzuges, indem es unter unterkarbonischem Kalk verschwindet und dieser Kalk bildet von nun an weiter im Westen die rechte Talseite.[1]) An diesem letzten Phyllitstück sieht man nun sehr deutlich die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks nahe am Kaschka-tur-Paß. Wir finden dort, wie Profil Fig. VI zeigt, die folgenden Verhältnisse: Der grünliche Phyllit mit dem amphibolitartigen Gestein steht auch hier wie weiter talaufwärts und wie im Bayum-kol-Tal fast senkrecht oder fällt unter einem sehr steilen Winkel nach Süden ein. Vom Bett des Sary-dschass-Flusses nach Norden gehend sehen wir zuerst am Talboden von alter Moräne umgeben einen Rundhöcker aus grünlichem Phyllit, darauf in der rechten Talwand, eingeschaltet in diesen Phyllit, schmale Züge von Gneis und grauwackenähnlichem Gestein, das Bruchstücke von Quarz und Feldspat enthält. Die Wand ist in der Höhe der Talseite fast eben abgeschnitten. Begibt man sich dorthin, so hat man vor sich im Norden eine fast horizontale, mit Schutt bedeckte Hochfläche, die in dem südlichen Rande des Gürtels der Denudationsflächen liegt, den wir bei Besprechung des südlichen äußeren Granitzugs kennen gelernt haben. Hier ist in der Nähe des Sary-dschass-Tals wie auch weiter östlich (siehe Profil XII) nur ein Stück davon erhalten; die Hochfläche ist nur schmal, sie endigt nach Norden an einem Abbruch, an dessen steilem Abfall horizontal liegende Bänke von unterkarbonischem Kalk ausstreichen. Der Kalk führt Productus giganteus und an seiner Basis sieht man ein Konglomerat, dessen Gerölle in der Linie des Profiles über dem Phyllit hauptsächlich aus Quarzit, daneben aus Phyllit, Tonschiefer, Gneis und stark zersetzten granitischen Gesteinen bestehen. Demnach kann kein Zweifel darüber herrschen, daß in diesem Konglomerat eine Reihe von Gesteinen vorkommt, die aus den Äquivalenten der Schieferzone des Bayum-kol-Tals stammen: und damit ist bewiesen, daß die Sedimente dieser Schieferzone, wenigstens die des südlichen Teils — nur diese sind im Sary-dschass-Tal sichtbar — älter sind als unteres Karbon, und dass diese Sedimente schon disloziert waren, als die Transgression vor sich ging.

Es bleibt nun noch zu entscheiden, ob dies auch für den nördlichen Teil der Schieferzone zutrifft. Die eben besprochenen Verhältnisse lassen mit voller Deutlichkeit erkennen, daß im Meridian des Kaschka-tur-Passes in der Tat nur die südliche Hälfte der Schieferzone zutage tritt. An Stelle des nördlichen Teils finden wir dagegen den unterkarbonischen Kalk in transgressiver Lagerung, und weiter im Westen verschwindet der Phyllit ganz darunter. Wenn wir die Höhen vergleichen, die der Phyllit und der unterkarbonische Kalk auf der rechten Seite des Kara-kol- und des Sary-dschass-Tals auf einer dem Streichen folgenden Linie erreichen, so finden wir, daß sie von Osten nach Westen stetig abnehmen. Am Aschu-tör-Paß liegt der Phyllit mehr als 4200 m hoch, an der Stelle, wo sich der Kara-kol mit dem Sary-dschass vereinigt, erreicht er 4000 m, am Kaschka-tur-Paß nur 3700 m, und weiter im Westen finden wir an der Stelle, wo der Phyllit verschwunden ist, den unterkarbonischen Kalk am Talboden des Sary-dschass schon bei 3000 m Höhe. Von Osten, von der Gegend des Aschu-tör-Passes beginnend, versinkt also der Phyllitzug mehr und mehr gegen Westen und in dem Maße, wie dies geschieht, verschmälert er sich, und der unterkarbonische Kalk greift über ihn hinweg bis an den Rand des Sary-dschass-Tals. Dies Versinken geht aber nicht all-

[1]) Siehe Merzbacher, l. c., S. 22.

mählich und beständig, sondern sprungweise an den quer zum Streichen gerichteten Verschiebungen vor sich. Es sind dies die gleichen Verschiebungen, an denen plötzlich die hauptsächlich aus granitischen Gesteinen bestehenden Ketten zwischen dem Sary-dschass- und dem Adùr-tör-Tal auf der rechten Seite des Adùr-tör endigen (S. 96).

Nach Osten ist der Phyllitzug der rechten Seite des Sary-dschass-Tals über den Aschu-tör-Paß hinaus noch eine beträchtliche Strecke weit sichtbar, weiter östlich aber ist das Gebirge in der Fortsetzung seiner Streichrichtung unbekannt (siehe die Karte).[1])

Auf der östlichen Seite des Passes sieht man in der tiefen, von Süden nach Norden verlaufenden Furche des obersten Teils des Aschu-tör-Tals in südlicher Richtung die dunklen Gesteine der Schieferzone; unmittelbar nördlich vom Passe zeigen sich aber in dieser Furche mächtige, ausgedehnte Massen von lichtem, ziemlich kristallinischem Kalk. Ich habe in ihm zwar keine bestimmbaren Fossilien gefunden, doch liegt dieser Kalk direkt in der Streichrichtung des unterkarbonischen Kalks, der im Kara-kol-Tal auf der nördlichen Seite des Phyllitzugs durch Granit im Kontakt verändert worden ist und gleicht ihm vollständig, sodaß kein Zweifel darüber aufkommen kann, daß er unterkarbonisches Alter hat, wenn auch das verbindende Stück zwischen ihm und dem als unterkarbonisch bekannten Kalk des Kara-kol-Tals nicht genauer geprüft wurde. Verfolgt man diesen das oberste Aschu-tör-Tal auf mehrere Kilometer umrandenden Kalk quer zu seinem Streichen, so sieht man an der Stelle, wo dieses Tal aus der S.N.-Richtung nach N.O. umbiegt auf der rechten Talseite den Kalk nach Osten fortsetzen, auf der linken Seite dagegen eine beckenartige Erweiterung, an deren südlichem Rande der Kalk steil abbricht. Weiter talabwärts wird zuerst eine nach O.N.O. streichende Zone von Tonschiefer und Phyllit sichtbar, dann granitisches Gestein, nämlich Granitgneis und Granit. Die Grenze zwischen den granitischen Gesteinen und den Sedimenten verläuft in der allgemeinen Streichrichtung nach O.N.O. und es zeigt sich, wenn man den Granit noch weiter talabwärts verfolgt, daß er mit dem Granit der nördlichen Hälfte des mittleren Bayum-kol-Tals zusammenhängt. Dies ergibt sich auch aus der petrographischen Untersuchung. Petersen[2]) hat die Proben untersucht, die Friederichsen von dem Gneis und Granit im Aschu-tör-Tal gesammelt hat; es ist ein Biotitgranit, der seiner Beschreibung nach vollständig mit dem Granit des nördlichen Teils des Bayum-kol-Tals übereinstimmt, also auch präkarbonisches Alter haben und zu dem südlichen Granitzug der äußeren Gebirgszüge des nördlichen zentralen Tian-Schan gehören dürfte.

Die Phyllite und Tonschiefer, die wir weiter südlich im Aschu-tör-Tal antreffen, liegen in der westlichen Fortsetzung des Streichens des nördlichen Teils der Schieferzone des Bayum-kol-Tals; sie stoßen, wie schon angedeutet, unmittelbar an die Kalkzone des Passes an, wo diese eine Höhenlage von 33—3500 m erreicht.

Fassen wir diese Tatsachen zusammen, so ergibt sich das folgende Bild: Westlich vom Kaschka-tur-Paß verschwindet das grünliche Phyllit der rechten Seite des Sary-dschass-Tals und an seiner Stelle reicht der unterkarbonische Kalk bis an den Rand des

---

[1]) Hiezu möchte ich bemerken, daß nach meinen späteren Beobachtungen bei Durchforschung der östlicher liegenden Quertäler Klein Musart, Saikal und Dondukol dort in der Tat die Phyllitmassen einen immer breiter werdenden Gürtel bilden, der im großen Musart-Tal seine größte Breite gewinnt.

G. Merzbacher.

[2]) l. c., S. 274.

Sary-dschass-Tals, wo er in Höhen von 3000—3300 m liegt. Am Kaschka-tur-Paß liegt er 3500 m hoch in transgressiver Lagerung auf dem letzten im Westen sichtbaren Stück des Phyllitzugs; noch weiter im Osten erreicht der Phyllit eine Höhe von 4000 m, und auf seiner nördlichen Seite sieht man, durch einen Granitzug davon getrennt, den unterkarbonischen Kalk, dessen Bänke unter Winkeln von 30—40° nach Norden einfallen und Gipfel von über 4000 m Höhe zusammensetzen. Westlich vom Aschu-tör-Paß finden sich im Kara-kol-Tal ganz ähnliche Verhältnisse (Profil Fig. XII): der unterkarbonische Kalk ist durch Granit im Kontakt verändert worden und seine Schichten stehen steil. Dies bleibt so bis zum Meridian des Aschu-tör-Passes. Auf dieser ganzen Strecke vom Kaschka-tur-Paß her bildet der unterkarbonische Kalk einen zusammenhängenden breiten Streifen auf der Nordseite des Phyllitzugs und verdeckt die Sedimente des nördlichen Teils der Schieferzone des Bayum-kol-Tals; weiter im Westen überdeckt er auch ein Stück des südlichen Teiles dieser Zone, liegt dann transgressiv darauf, lehnt sich weiter östlich mit mäßig nach Norden einfallenden Bänken daran und steht schließlich im Kara-kol-Tal und nördlich vom Aschu-tör-Paß steil, sodaß dort die Diskordanz zwischen ihm und dem älteren Phyllit verwischt wird. Auf der östlichen Seite des Aschu-tör-Passes bricht er an von Norden nach Süden gerichteter Linie steil ab und weiter östlich erscheinen, noch zum Teil in der Fortsetzung seines Streichens, die Phyllite und Tonschiefer des nördlichen Teils der Schieferzone des Bayum-kol-Tals, die im Aschu-tör von demselben präkarbonischen Biotitgranit wie im mittleren Bayum-kol-Tal im Norden begrenzt werden. Weder im Sary-dschass-, noch im Kara-kol-Tal, noch am Aschu-tör-Paß sieht man den Crinoideendolomit des mittleren Bayum-kol-Tals oder sonst ein Stück des nördlichen Teils der Schieferzone. Erst dort, wo der unterkarbonische Kalk nicht mehr vorhanden ist, wie in dem mittleren Teile des Aschu-tör-Tals, kommt diese Gruppe wieder zum Vorschein.

Bei Besprechung des Phyllitzugs der rechten Seite des Sary-dschass-Tals habe ich S. 155 hervorgehoben, daß dieser Zug in der Nähe des Kaschka-tur-Passes von großen, quer zum Streichen gerichteten Verschiebungen in mehrere Stücke zerschnitten worden ist. Man erkennt dieses Verhältnis, wie schon erwähnt wurde, auch an den verschiedenen Höhen, die der unterkarbonische Kalk auf einer im Streichen des Phyllitzugs liegenden Linie einnimmt. Diese Verschiebungen haben in der Umgebung des Sary-dschass-Tals eine große Bedeutung für den Bau des Gebirges; sie haben nicht nur den Phyllit und den unterkarbonischen Kalk der rechten Talseite betroffen, sondern sie reichen noch weiter nach Süden. Die große beckenartige Erweiterung des Sary-dschass-Tals, die im Osten etwas talaufwärts von der Mündung des Adür-tör-Flusses also ungefähr da beginnt, wo die Verschiebungen in der Nähe des Kaschka-tur-Passes so deutlich hervortreten, ist hauptsächlich dadurch verursacht worden,[1]) daß ein großes Stück des südlichen Teils der Schieferzone sowie des im Süden daran grenzenden granitischen Massivs (siehe S. 96 und 156), das in der westlichen Fortsetzung des Bayum-kol- und des Semonow-Massivs liegt, an diesen Verschiebungen abgesunken ist.

Aber auch im Osten zeigen sich diese Verschiebungen; schon die verhältnismäßig tiefe Lage des unterkarbonischen Kalks im Aschu-tör-Tal östlich vom Aschu-tör-Paß,

---

[1]) Merzbacher, l. c., S. 22.

an einer Stelle, wo wir eigentlich den nördlichen Teil der Schieferzone des Bayum-kol-Tals sehen müßten, und der steile Abbruch des Kalks längs einer von Norden nach Süden verlaufenden Linie, lassen darauf schließen, daß hier Verschiebungen vorhanden sind. Wir sehen aber ihre Anzeichen auch im mittleren Teil des Bayum-kol-Tals.[1]) Die Spuren einiger Querverschiebungen lassen sich an der steilen, gegen das Tal abfallenden Wand des nördlichen Dolomitbandes erkennen. Zwei von diesen Verschiebungen sind besonders deutlich bis in das im Süden folgende Granitmassiv zu verfolgen. Dies würde aber noch nicht beweisen, daß den Verschiebungen eine größere Bedeutung zukommt. Bei der Vergleichung der beiden Talseiten zeigt es sich jedoch, daß die verschiedenen Bildungen der rechten Talseite nicht in der geraden Fortsetzung des Streichens auf die linke Seite hinüberreichen, sondern daß sie dort sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung verschoben worden sind. Wie groß das Maß der Verschiebungen ist, habe ich aber wegen der mächtigen alten Moränendecke und der dichten Vegetation bei der Kürze der mir zur Verfügung stehenden Zeit nicht bis ins einzelne feststellen können und deshalb wurden sie auch in der Karte nicht berücksichtigt. Soviel scheint mir aber gewiß, daß der ganze mittlere Teil des Bayum-kol-Tals in einer Zone dicht nebeneinander liegender, quer zum Streichen gerichteter Verschiebungen liegt.

Aus allen diesen Beobachtungen ergibt sich nun, daß in der Schieferzone des Bayum-kol-Tals, von dort bis zum Kasckka-tur-Paß und wahrscheinlich auch noch darüber hinaus nach Westen eine Anzahl quer zum Streichen verlaufender Störungen vorhanden ist, welche die Schieferzone in Stücke zerschnitten haben, und daß über den tiefer liegenden Stücken an vielen Stellen der unterkarbonische Kalk in transgressiver Lagerung erscheint.

Hiedurch wird aber noch nicht genügend erklärt, warum einzelne Glieder der Schieferzone, wie deren südlicher Teil, und in einem gewissen Grade auch der grünliche Phyllit auf eine lange Strecke sichtbar sind, während der nördliche Teil an den meisten Stellen durch den unterkarbonischen Kalk verdeckt wird.

Wir haben schon bei der Besprechung des graublauen Tonschiefers des Kasckka-tur-Passes (S. 107), den wir als eines der jüngsten Glieder der paläozoischen Schieferserie betrachten, gesehen, daß dieser Tonschiefer westlich vom Kaschka-tur-Paß, in dem oberen Teile des Kubergantü-Tals, zusammen mit dem basalen Konglomerat des unterkarbonischen Kalks durch eine Anzahl staffelförmig auftretender Längsbrüche zerschnitten worden ist. Ich habe diese Brüche nach Westen nicht weiter verfolgt; nach Osten sieht man sie eine Strecke weit über den Kaschka-tur-Paß hinaus; noch weiter östlich ist aber das Gebirge eine Strecke weit bisher nicht genauer untersucht worden. Wir haben zunächst die Tatsache zu berücksichtigen, daß die Schieferzone des mittleren Bayum-kol-Tals schon zu den äußeren Gebirgszügen gehört, wo, wie wir wissen, die Granitmassive stark abgetragen und die Sedimente disloziert waren, als die unterkarbonische Transgression vor sich ging. In diesem Teile des zentralen Tian-Schan, der also ein heute noch sichtbares Stück aus dem Rumpfe eines sehr alten Gebirges darstellt, erkennen wir, wenn wir von den Stauchungen und flexurartigen Verbiegungen, die der unterkarbonische Kalk zwischen den alten Granitmassiven erlitten hat, absehen, die Wirkung der

[1]) Merzbacher, l. c., S. 8.

späteren gebirgsbildenden Bewegungen hauptsächlich in den sehr häufigen und oft sehr großen Brüchen. Unter diesen Brüchen haben namentlich die Längsbrüche und die spitzwinkelig zum Streichen verlaufenden Brüche für den Bau und die Gestalt der äußeren Gebirgszüge eine große Bedeutung (siehe S. 98 und 101). Es ist wahrscheinlich, daß der starre Rumpf des alten präkarbonischen Gebirges auch während der verschiedenen späteren Phasen der gebirgsbildenden Bewegungen in ähnlicher Weise beeinflußt worden ist; daß dort also sowohl während der intrakarbonen, als auch während der postkarbonischen und der tertiären tektonischen Vorgänge, Brüche entstanden sind. Spuren hievon finden wir, abgesehen von den schon erwähnten Stellen, wie wir später sehen werden, auch an sehr vielen anderen Orten der äußeren Gebirgszüge.

Für das Gebiet der inneren Ketten des zentralen Tian-Schan läßt sich aus den bereits geschilderten Verhältnissen entnehmen, daß zusammen mit den gebirgsbildenden Bewegungen während einer, vielleicht auch während zweier Phasen, die Intrusion sehr ausgedehnter granitischer Massen vor sich gegangen ist, durch die der unterkarbonische Kalk im Kontakt verändert wurde. Zu diesen granitischen Massen gehört auch noch der schmale Granitzug, der westlich vom Aschu-tör-Paß den grünlichen Phyllit auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals von dem nördlich darauf folgenden unterkarbonischen Kalk trennt. Wo dieser Granit auftritt, fällt der unterkarbonische Kalk steiler ein, und die Deutlichkeit der Längsbrüche verliert sich. In diesem Teile der Schieferzone des Bayum-kol-Tals, welche die granitischen Massive des alten Gebirges von den jüngeren Massiven der inneren Ketten trennt, sind die Spuren der zu verschiedenen Zeiten vor sich gegangenen Bewegungen so verwischt worden, daß es nicht möglich ist, sie nach den wenigen bisher gemachten Beobachtungen sicher zu kennzeichnen.

Friederichsen[1]) erwähnt den steilen Abfall, den der unterkarbonische Kalk westlich vom Kaschka-tur-Paß mehr als 30 km weit talabwärts auf der rechten Seite des Sary-dschass-Flusses zur Schau trägt. Dieser Abfall tritt in der Landschaft sehr auffällig dadurch hervor, daß er den südlichen Rand der ausgedehnten Denudationsflächen der äußeren Gebirgszüge bildet, und daß sich an seinem südlichen Fuße der auch fast ebene, weite Talboden des Sary-dschass ausbreitet. Friederichsen vermutet, daß dieser Abfall ein langer Bruchrand oder eine Flexur sei, woran ein großer Teil der Denudationsflächen im Süden abgesunken sei. Dies ist in der Tat der Fall. Der tiefer liegende Flügel wird allerdings durch alte Moräne und Schutt verhüllt; man sieht aber an vielen Stellen des langen Abfalls, daß der unterkarbonische Kalk entweder abbricht und alter Schiefer darunter hervorkommt oder, daß er in flexurartigen Stauchungen nach Süden zur Tiefe umbiegt. Dieser Abfall liegt nun in der Streichrichtung des grünlichen Phyllits des oberen Sary-dschass-Tals, jedenfalls in der westlichen Fortsetzung der Schieferzone des oberen Bayum-kol-Tals, und es ist daher augenfällig, daß hier in der Tat ein Teil der Schieferzone von einem großen Längsbruch getroffen worden ist. Obgleich es heute noch nicht möglich ist, dies auch im Osten für den nördlichen Teil der Schieferzone nachzuweisen, so erklärt sich doch sehr wahrscheinlich auch dort das Verschwinden dieses Teils der Schieferzone durch Längsbrüche.

---

[1]) Friederichsen, l. c., S. 124 und 129. Der Abfall des unterkarbonischen Kalks tritt auf Friederichsens Karte, Blatt I, deutlich hervor.

Aus allen den bisherigen Beobachtungen über die Schieferzone des Bayum-kol-Tals ergibt sich folgendes:

1. Die Schieferzone besteht aus verschiedenen Bildungen: aus Gneis, Phyllit, amphibolitartigem Gestein, Tonschiefer und Dolomit. Diese verschiedenen Bildungen haben ein verschiedenes Alter. Diskordanzen sind darin vorhanden, wie uns z. B. das veränderte Quarzitkonglomerat zeigt, das sowohl auf der rechten Seite des Sary-dschass- und des Kara-kol-Tals, als auch im Bayum-kol-Tal und an andern Orten (S. 106), wenn auch wenig mächtig, so doch in weiter Verbreitung auftritt. Alle Bildungen der Schieferzone aber sind älter als unteres Karbon.

2. Auch stellen sie keine Einheit in stratigraphischer, wohl aber in tektonischer Beziehung dar, indem sie in einer geradlinig nach O.N.O. streichenden Zone die präkarbonischen Granitmassive im Rumpf des alten Gebirges von den jüngeren Massiven der inneren Ketten trennen. Wo immer die Schieferzone oder ein Teil hievon sichtbar ist, bemerkt man, abgesehen von den nachträglichen Störungen, daß die Schichten senkrecht stehen oder steil nach Süden einfallen. Diese Dislokationen haben zum großen Teil schon bestanden, als die unterkarbonische Transgression vor sich ging, was uns die Lagerungsverhältnisse am Kaschka-tur-Paß und an andern Orten zeigen.

3. Eine gewisse Zugehörigkeit der Schieferzone zu der starren Masse der abgetragenen alten präkarbonischen Gebirgsteile, die sich schon aus der diskordanten und transgressiven Lagerung des unterkarbonischen Kalks über beiden ergibt, zeigt sich aber auch darin, daß der hauptsächliche Typus der Dislokationen, den wir in den alten granitischen Gebirgsteilen beobachten, auch in der Schieferzone vorherrscht: nämlich die großen Brüche. Querbrüche haben die Schieferzone in Stücke zerschnitten und Längsbrüche, die am Kaschka-tur-Paß und auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals sichtbar sind, haben einzelne Teile der Schieferzone auch in der Längsrichtung gegeneinander verschoben.

4. Hiedurch erklärt es sich, daß wir auf einer im Streichen der Schieferzone liegenden Linie dasselbe Glied in verschiedener Höhe finden und daß wir es schließlich im Westen unter der Decke des unterkarbonischen Kalks verschwinden sehen, sowie daß einige Teile, namentlich der nördliche Teil der Schieferzone in der Richtung des Streichens von dem unterkarbonischen Kalk bedeckt werden.

5. Die Nähe der jüngeren granitischen Massen der inneren Ketten, zwischen denen der unterkarbonische Kalk in der zentralen Kette steil aufgerichtet oder gefaltet worden ist, macht sich in der Schieferzone durch die Einschaltung eines schmalen Granitzugs und in der steilen Stellung des unterkarbonischen Kalks nordwestlich vom Aschu-tör-Paß auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals bemerkbar. Dagegen hängt das vom Dolomit umgebene Granitmassiv des mittleren Bayum-kol-Tals vermutlich mit den präkarbonischen Granitmassiven der äußeren Gebirgszüge zusammen.

Ich gehe nun zur Besprechung der Verhältnisse über, die in den inneren Ketten westlich vom Bayum-kol-Tal vorherrschen.

An der südlichen Grenze der Schieferzone des Bayum-kol-Tals kommen überall, wo die Grenzen bekannt sind, granitische Gesteine vor. Im Bayum-kol-Tal setzen diese das Massiv des oberen Talabschnitts zusammen. Wir haben gesehen, daß dort die Grenzfläche dieses Massivs im Norden mit dem Streichen und Fallen der Sedimente zusammenfällt,

und daß im Süden noch ein schmaler Granitzug durch eine Zone von injizierten Schiefern von dem Massiv abgetrennt wird. Die nördliche Grenze läßt sich vom Bayum-kol-Tal noch einige Kilometer weit nach Westen übersehen; weiter westlich ist das Gebirge bis in die Nähe des Aschu-tör-Passes nicht genauer untersucht worden. Im oberen Teile des Sary-dschass-Tals sieht man die Grenze aber wieder dicht unterhalb der Endzunge des Semonow-Gletschers (Profil XII auf Taf. IV). Es steht dort dem Granit zunächst veränderter Kalk an; darauf folgt Schiefer wie im Bayum-kol-Tal. Die Grenze zwischen Granit und Sedimenten quert unter spitzem Winkel das Sary-dschass-Tal, sodaß die linke Seite des Tales noch eine Strecke weit unterhalb der Endzunge des Gletschers aus Granit besteht (siehe auch Skizze Fig. XVIII). Wo der Kontakt am linken Ufer wieder deutlich sichtbar wird, sieht man die Verhältnisse, die im Profil Figur XIX dargestellt sind.



Fig. XVIII. Blick von der Endzunge des Semenow-Gletschers nach Westen in den oberen Teil des Sary-dschass-Tales. (Höhe des Standpunktes ca. 3400 m.)

s Tonschiefer, Kalkschiefer und zum Teil Phyllit, gr Granit, c unterkarbonischer Kalk mit Productus giganteus, ct Kontakt zwischen Granit und Schiefer.

Man sieht den Kontakt zwischen Schiefer und Granit, die deutliche Längsstufe auf der linken Seite des Sary-dschass, im Hintergrunde in der Mitte des Bildes die höchst auffälligen Denudationsflächen am Kaschka-tur-Paß (ca. 3500 m).

An dieser Stelle findet man eine Scholle von körnigem Kalk von Granit umgeben; dann folgt nach Norden an der Grenze des Massivs nochmals Kalk, dann umgewandelte Schiefer, hauptsächlich Phyllit, und in der breiten Talleiste gegen das Bett des Sary-dschass-Flusses von Brüchen durchschnittener Tonschiefer, der in den tiefen, engen Einschnitten der aus den Gletschern der linken Talseite entspringenden Bäche, gut aufgeschlossen ist. Es zeigen sich hier also am Kontakt in der Zusammensetzung der Schieferserie dieselben Verhältnisse, wie an der Endzunge des Semonow-Gletschers, und nur darin besteht ein Unterschied, daß unmittelbar an der Grenze des Granitmassivs die Schichten nach Norden einfallen, wogegen sie in der Talleiste lebhaft disloziert erscheinen. Weiter westlich entfernt sich die Grenze des Granitmassivs, indem sie im Allgemeinen dem Streichen der Sedimente folgt, mehr und mehr vom Sary-dschass-Tal nach Süden.

Wie schon erwähnt wurde, endigen der Granit und die ihn begleitenden Sedimente am westlichen Rande der großen beckenartigen Erweiterung des Sary-dschass-Tals auf der rechten Seite des Adùr-tör-Flusses an großen Querverschiebungen.[1])

Auf der ganzen Strecke vom Bayum-kol-Tal bis zum Adùr-tör-Tal bildet, soweit das Gebirge genauer bekannt ist, dasselbe Glied der Schieferzone die Grenze gegen die granitischen Gesteine im Süden; nur sieht man unmittelbar am Kontakt im Bayum-kol-Tal umgewandelte Schiefer, am Semonow-Gletscher und auf der linken Seite des Sary-dschass-Tals dagegen zwischen Granit und Schiefer noch einen Streifen von körnigem Kalk. Auf dieser ganzen Strecke fällt die Grenzfläche des Granits mit dem Einfallen der Sedimente zusammen: das Einfallen ändert sich aber von Osten nach Westen; es ist im Osten steil nach Süden, im Westen steil nach Norden. Am Semonow-Gletscher sieht man denselben hellgrauen Amphibolbiotitgranit wie im Bayum-kol-Tal, mit großen weißlichen Feldspaten. Die tiefsten Punkte, an denen die granitischen Gesteine noch sichtbar sind, liegen im Bayum-kol-Tal ungefähr bei 3000 m, an der Endzunge des Semonow-Gletschers bei 3400 m, auf der rechten Seite des Adùr-tör bei 3200 m.

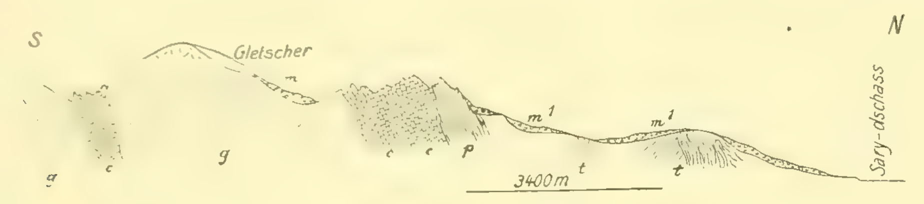


Fig. XIX. Profil durch die linke Seite des oberen Sary-dschass-Tales.
Kontakt an der südlichen Grenze der Schieferzone unterhalb der Vereinigungsstelle von Sary-dschass und Kara-kol.
Mafsstab 1 : 13,500.
g Granit des Semenow-Massivs, c kontaktmetamorpher Kalk, p umgewandelter Phyllit, t Phyllit und Tonschiefer, m Moräne der heutigen Gletscher, m[1] Moräne der alten Gletscher.

Über die Verbreitung des Granits des obersten Bayum-kol-Tals gegen Westen habe ich mich schon S. 96 f. ausgesprochen; es ist nicht sicher erwiesen aber sehr wahrscheinlich, daß die Granite unter der Endzunge des Muschketow-Gletschers und unter dem Bette des daraus entspringenden Adùr-tör-Flusses fortstreichen und mit dem Granit zusammenhängen, der im Meridian des Tüss-aschu-Passes auf der nördlichen Seite des Passes ansteht (siehe die Karte und das Profil in Fig. XIII sowie S. 96 und 108). Es wäre wichtig dies sicher nachzuweisen,[2]) denn es würde hiedurch wahrscheinlich gemacht, daß das ganze, sehr große Massiv in Wirklichkeit nicht einheitlich, also nicht durch denselben Prozess entstanden ist. Die bisherigen Beobachtungen reichen aber noch nicht aus dies zu entscheiden. Abgesehen von der schon nahe der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers bemerkbar werden-

[1]) Merzbacher, l. c., S. 22.

[2]) Dies kann erst geschehen, wenn auch die dort gesammelten Gesteine petrographisch genauer untersucht sein werden, was bis jetzt noch nicht möglich war, da der Vollständigkeit eines geologischen Gesamtdurchschnittes wegen, zunächst die Gesteine eines großen südlichen Quertales, des südlichen Musart-Tales, systematisch bearbeitet wurden. Das Ergebnis wird in unmittelbarer Folge nach dieser Arbeit in diesen Abhandlungen erscheinen. G. Merzbacher.

den Verschiedenheit der granitischen Gesteine (S. 148 und 150), die sicher nachzuweisen der zukünftigen Forschung überlassen bleiben muß, zeigt auch die Vergleichung der Massive im Westen und Osten eine gewisse Verschiedenheit der Gestalt. Im Westen ist das Massiv breiter als im Osten und an seinen Grenzen fallen die Sedimente nach außen ein: im Süden der Tonschiefer und Phyllit am nördlichen Fuße der zentralen Kette nach Süden, im Norden die Bildungen des südlichen Teils der Schieferzone nach Norden. Im Osten dagegen gleicht das Massiv mit seinen nach Süden steil einfallenden Grenzflächen einem mächtigen Intrusivlager (S. 151).

Über die Lagerungsverhältnisse und die Ausdehnung der granitischen Gesteine, die sich in der Fortsetzung dieses Massivs nach Westen, nördlich vom Tüss-aschu-Paß finden, kann ich nur wenige Angaben machen. Zwischen der Endzunge des Muschketow-Gletschers und dem oberen Teile des Tüss-aschu-Tals ist das Gebirge zum Teil noch unbekannt,[1]) und zwischen dem unteren Teile des Adùr-tör-Tals und dem unteren Teile des Tüss-aschu-Tals befinden wir uns innerhalb der mehrfach erwähnten großen Brüche, die den östlichen und den südlichen Rand der beckenartigen Erweiterung des Sary-dschass-Tals begleiten. Hier liegen die granitischen Gesteine und die paläozoischen Sedimente, worunter auch unterkarbonischer Kalk, unter der Decke der horizontal geschichteten roten, sehr jungen Konglomerate (S. 118), die ihrerseits wieder von mächtiger Moräne überlagert werden. Hier, zwischen dem nördlichen Fuße des Sary-dschass-Tau und dem Sary-dschass-Fluß befindet man sich daher am Beginne eines durchschnittlich 10 km breiten und mehr als 50 km talabwärts reichenden Streifen von niedrigen, gerundeten Hügeln, die aus jungem Konglomerat und alter Moräne bestehen. In den dazwischenliegenden Wannen trifft man auf versumpftem Boden Moränenseen.[2])

Der Tüss-aschu-Fluß hat sich in dieses Hügelland 120—150 m tief eingeschnitten, und in seiner Furche ist im Süden nahe am Rande des eigentlichen Gebirges die aus paläozoischen Sedimenten bestehende Unterlage aufgeschlossen und zwar zum ersten Male 1 km westlich von der Öffnung des Nebentals zum Haupttal. Es sind hauptsächlich dunkle Tonschiefer, hier und dort mit Kalkschiefern wechsellagernd, also im allgemeinen dieselben Bildungen, wie wir sie aus dem südlichen Teile der Schieferzone des Bayumkol-Tals und aus der Talleiste auf dem linken Ufer des oberen Sary-dschass-Tals kennen. Am Tüss-aschu erscheinen sie gefaltet, aber auch von Brüchen durchschnitten; Streichen und Fallen ändern sich auf kurzen Entfernungen. Wir treffen die gleichen Schiefer also auch noch weiter talaufwärts, wo sie den äußersten Saum des Sary-dschass-Tau zusammensetzen (siehe Profil XIII, Taf. IV) und den Granit begrenzen, aus dem die nördlichen Abhänge des Sary-dschass-Tau zusammengesetzt sind. Man findet auch hier Tonglimmerschiefer; aber irgendwelche unzweifelhafte Spuren der Kontaktmetamorphose habe ich bei der Kürze der mir zur Verfügung stehenden Zeit nicht entdecken können. Weiter talaufwärts trifft man längs des Weges zum Tüss-aschu-Paß die folgenden Verhältnisse: Das Tüss-aschu-Tal durchschneidet die nördlichen Abhänge des Sary-dschass-Tau von Norden nach Süden. Eine Strecke weit sieht man zu beiden Seiten des Weges nur granitische Gesteine, die eine nach O.S.O. streichende Zweigkette zusammen-

[1]) Siehe darüber Merzbacher, l. c., S. 69.

[2]) Friederichsen, l. c., S. 123 und Karte Bl. I; Merzbacher, l. c., S. 22.

setzen. Schon auf der südlichen Seite dieser Kette wird die Öffnung eines großen Längstales passiert, das ein wenig schräg zum Streichen des Sary-dschass-Tau verlaufend, fast ganz in Granit eingeschnitten zu sein scheint. Bei der Ausmündung dieses Tales in die Furche des Tüss-aschu findet man aus Moräne und Schutt herausragenden — und deshalb nur wenig mächtig aufgeschlossen — kristallinischen Schiefer, der zum Teil hornfelsartige Beschaffenheit zeigt. auf der südlichen Seite des Längstales tritt wieder Granit auf, so daß die Schiefer im Norden und Süden von ihm eingeschlossen werden. Den Granit kann man eine ziemliche Strecke weit im Längstal aufwärts verfolgen: nach der Gestalt der Felsen zu schließen, bildet er auch dessen Hintergrund, wo sich große Firnfelder ausbreiten. Auf der linken Seite des Tüss-aschu mündet auch von Westen her ein Längstal, das aber kürzer ist als das östliche; auch dort setzen granitische Gesteine die Talumwallung zusammen. Beim Aufstiege zum Tüss-aschu-Passe machen sich zu beiden Seiten der Hochtalfurche zunächst granitische Wände bemerkbar, dann aber trifft man auf Kalk (siehe S. 108 und Profil XIII). Die Grenze zwischen Granit und Kalk ist leider durch eine große Schutthalde teilweise verdeckt, so dass man sie in der Höhe des Paßwegs nicht genau verfolgen kann. In den Schutthalden, die nach ihrer Lage und Zusammensetzung zu schließen, zweifellos ganz aus der Nähe der Grenze stammen, befinden sich große Blöcke, die zum Teil aus hellgrauem Kalk, zum Teil aus sandfarbenem dolomitischen Kalk bestehen. Der Kalk ist verändert und ist es um so mehr, je näher man ihn an der Grenze gegen den Granit findet.[1]) An den oberen Teilen des Gehänges erkennt man, daß er massig ist, aber mit der zunehmenden Entfernung vom Granit immer deutlicher bankig wird. Die Bänke stehen steil und etwas weiter aufwärts gegen den Paß bilden sie eine überaus klare, ein wenig nach Norden geneigte Falte. Unmittelbar südlich von dieser Falte kommt man auf der Höhe des Passes auf einen nach Westen steil abbrechenden Gletscher, in dessen Moräne sich viel körniger, hellgrauer Crinoideenkalk und dunkler Kalk finden. ferner Blöcke eines Kalkkonglomerats, das außer Kalkgeröllen auch Bruchstücke von hartem, fast schwarzem Tonschiefer enthält. In der Umgebung des Gletschers, besonders südlich davon, ist der Kamm des Sary-dschass-Tau stark abgetragen worden und mit einer mächtigen Decke von Moräne und Schutt bedeckt. Aus diesem Schutt ragt in steil gestellten Bänken zerrütteter, gelbgrauer, zum Teil dolomitischer Kalk heraus, der von der Erosion in abenteuerliche Gestalten zerschnitten worden ist. Diesen Kalk sieht man noch eine Strecke weit nach Süden nahe am Wege, der von der Paßhöhe in das Inyltschek-Tal hinabführt, trifft aber dann bald auf einen dunklen, zum Teil plattigen Crinoideenkalk, dessen Bänke steil nach Süden einfallen, also mit den Bänken des ebenerwähnten Kalks konkordant liegen. Dieser Crinoideenkalk bildet ein breites Band in der Höhe der nördlichen Talseite des Inyltschek-Tals, wo man ihn in der Fortsetzung der Streichrichtung nach W.S.W. und O.N.O. weithin an seiner dunklen Färbung erkennen kann; er ist sehr fossilreich und geht an einigen Stellen in Crinoideenbreccie über. Man findet darin außer anderen Fossilien namentlich große Einzelkorallen und zahlreiche Stücke des Productus giganteus.

Tiefer abwärts am Wege zum Inyltschek-Tal macht sich ungefähr in der Mitte des Gehänges die Grenze des Kalks gegen den Granit bemerkbar. Ehe man aber diese Grenze erreicht. sieht man ein in den dunklen Crinoideenkalk eingeschaltetes Konglomerat, das

[1]) Merzbacher, l. c., S. 24.

nur wenige Meter mächtig ist und außer Kalkgeröllen auch solche kristallinischer Gesteine, hauptsächlich stark zersetzter granitischer Gesteine enthält. Zwischen diesem Konglomerat und dem Granit liegt noch körniger Kalk, der rot und violett gefärbt ist. Aber auch hier ist die Veränderung des Kalks nicht am Anstehenden in ihrem Verlauf genauer zu beobachten, da gerade die Grenze zwischen dem veränderten Kalk und dem Granit durch den Schutt des dunklen Crinoideenkalks großenteils verdeckt wird. Immerhin läßt sich die Grenze in der geradlinigen Fortsetzung des Streichens auf beiden Seiten des Weges eine beträchtliche Strecke weit an der lebhaft roten Färbung des veränderten Kalks verfolgen. Wir treffen also in dem breiten Streifen des Kalks, der hier den Kamm des Sary-dschass-Tau zusammensetzt (siehe Profil XIII) von Norden nach Süden die folgenden Verhältnisse:

Im Norden Granit; an der Grenze gegen diesen Granit ist der Kalk körnig und massig. Dann sieht man deutlich die Bankung des Kalks und eine große Falte, die beinahe an den nördlichen Rand des Paßgletschers reicht. Hier zeigen sich in der Moräne Blöcke eines Kalkkonglomerates, das Bruchstücke von schwarzem Tonschiefer enthält, weiterhin südlich sehen wir gelblichen, zum Teil dolomitischen Kalk, dann bankigen und plattigen, dunklen Crinoideenkalk mit Productus giganteus, darauf ein Konglomerat mit zersetzten granitischen Gesteinen, zuletzt einen Streifen von massigem, körnigem Kalk, der an Granit grenzt.

Hiezu möchte ich bemerken, daß sich aus der an den Rändern der Kalkzone auftretenden allmählichen Veränderung des Kalks, die von innen nach außen stärker wird, ergibt, daß auf beiden Seiten Primärkontakt des Kalks mit den granitischen Gesteinen vorhanden ist. Bemerkenswert ist auch, daß Konglomerate vorkommen, die in die Schichtenfolge des Kalks eingeschaltet sind. Das Konglomerat in der Moräne des Paßgletschers, das Bruchstücke von schwarzem Tonschiefer enthält, ist allerdings nicht anstehend gefunden worden, wohl aber das Konglomerat mit Geröllen kristallinischer Gesteine auf der südlichen Seite der Kalkzone, das in konkordanter Lagerung mit dem umgebenden Kalk steil nach Süden einfällt. Es muß ferner nochmals hervorgehoben werden, daß die granitischen Gesteine dieses Konglomerats zum Teil zersetzt oder zum Teil in der Zersetzung begriffen sind, daß aber dagegen der südlich davon anstehende Granit, soweit ein Vergleich noch möglich ist, anders beschaffen, jedenfalls aber noch frisch ist. Eine Wiederholung derselben Schichten durch Stauchung oder Faltung ist für den nördlichen Teil der Kalkzone bis zu einem gewissen Grade sicher, wie weit dies aber für die dunklen Crinoideenkalke zutrifft ist ungewiß; jedenfalls läßt es sich mit Hilfe der bisherigen Beobachtungen nicht entscheiden. An demjenigen Teil des Gebirges, der im Profil als unter dem Paßgletscher liegend eingezeichnet ist, waren keine Aufschlüsse sichtbar.

Ich halte die ganze Schichtenfolge von Kalk und dolomitischem Kalk, die wir hier am Tüss-aschu-Paß treffen, für unterkarbonisch, hauptsächlich auf Grund der Erfahrungen in anderen Teilen des Gebirges. Die Konglomerate, die darin vorkommen, scheinen Konglomerate der Transgression zu sein: sie enthalten Bruchstücke von altpaläozoischen Sedimenten und von granitischen Gesteinen, die älter sind als die in der Umgebung anstehenden Granite. Die Lagerungsverhältnisse sind aber schwer zu erklären, da die Unterlage des unterkarbonischen Kalks nicht sichtbar ist.

Ich möchte noch hinzufügen, daß im nördlichen Teile der Kalkzone eine gewisse Veränderlichkeit des Streichens hervortritt; man kann dort ganz deutlich beobachten, daß die Grenze des Granits leicht spitzwinklig zum Streichen des gefalteten und gestauchten

Kalks verläuft. Es hat fast den Anschein, als sei hier am Tüss-aschu-Paß für das Gesamtstreichen der Kalkzone nicht sowohl die hier zu beobachtende Streichrichtung des Kalks als vielmehr die Richtung der Längsachsen der auf den Gebirgsseiten vorherrschenden granitischen Massen maßgebend.

Der Granitzug auf der Nordseite des Tüss-aschu-Passes ist im Streichen nur eine kurze Strecke weit bekannt; er besteht dort, wie bereits mehrfach erwähnt, in der Hauptmasse aus Amphibolbiotitgranit, der große fleischrote Einsprenglinge von Feldspat enthält. Dieses Gestein ist, wie ich schon hervorhob, dem Granit sehr ähnlich, der im oberen Teil des Bayum-kol-Tals auf der linken Seite der Endzunge des Bayum-kol-Gletschers ansteht.[1]) Der auf der südlichen Seite des Tüss-aschu-Passes auftretende Granit setzt auch den unteren Teil der rechten Talseite des Inyltschek-Tals zusammen und ist mir von der Endzunge des Inyltschek-Gletschers bis zu der Stelle bekannt, wo der Inyltschek in den Sary-dschass mündet, also auf einer mehr als 50 km langen Strecke. Man sieht auf dem Wege talabwärts deutlich, daß der unterkarbonische Kalk vom Tüss-aschu-Paß, nach W.S.W. streichend, den Kamm des Sary-dschass-Tau zusammensetzt, sodaß sich auf der ganzen rechten Talseite des Inyltschek-Tals dieselben Verhältnisse finden, die wir in dem Profile des Tüss-aschu-Passes auf der südlichen Seite des Passes kennen gelernt haben. Im Meridian des Tüss-aschu-Passes treffen wir aber nur die wenigen Bestandteile der inneren Ketten des nördlichen zentralen Tian-Schan, die der zentralen Kette im Osten und dem Granitzug der Zwischenkette an ihrem nördlichen Fuße entsprechen. Die westliche Fortsetzung der granitischen Gesteine des obersten Bayum-kol-Tals und des Semonow-Gletschers sowie der südliche Teil der Schieferzone des Bayum-kol-Tals liegen unter den jungen Bildungen der beckenartigen Erweiterung des Sary-dschass-Tals begraben (siehe S. 163 und 164). Es macht sich also am Tüss-aschu-Paß in den Verhältnissen gegenüber denen, die wir im Osten beobachten konnten, insoferne ein Unterschied bemerkbar, als die Zone der Phyllite und Tonschiefer, die wir im Hintergrund des Bayum-kol-Tals in der Einsenkung des Bayum-kol-Gletschers am Fuße der zentralen Kette feststellen konnten, nicht mehr vorhanden ist, daß dagegen die Masse der granitischen Gesteine sehr zugenommen hat. Die große Länge des Granitzugs auf der rechten Seite des Inyltschek-Tals und die Tatsache, daß er noch etwas über die Endzunge des Inyltschek-Gletschers hinaus nach Osten reicht, rechtfertigen die Vermutung, daß auch die südlichen Abhänge der zentralen Kette zwischen dem nördlichen Arm des Inyltschek-Gletschers und dem Muschketow-Gletscher ähnlich zusammengesetzt sind, wie die rechte Talseite des Inyltschek-Tals (siehe S. 95, 97 und 143).

Nachdem nun das Wesentlichste von den geologischen Verhältnissen der inneren Ketten, soweit sie untersucht werden konnten, gesagt ist, wollen wir auch die tektonischen und morphologischen Verhältnisse der äußeren Gebirgszüge näher betrachten:

Die tektonischen Verhältnisse der äußeren Gebirgszüge.

Es wurde bereits eingehender darüber berichtet, daß diese Teile des nördlichen zentralen Tian-Schan hauptsächlich aus granitischen Gesteinen bestehen, und daß diese Gesteine in zwei großen Zügen, die durch einen Streifen von paläozoischen Sedimenten getrennt werden, angeordnet sind. Es sei auch in Erinnerung gebracht, daß paläozoische

[1]) Siehe die Fußnote S. 163.

Sedimente auch auf der nördlichen Seite des nördlichen Granitzugs, z. B. am Issyk-kul und weiter östlich am Santasch-Paß vorkommen, und daß sie auch auf der Südseite des südlichen der äußern Granitzüge, wo wir sie in der Schieferzone des Bayum-kol-Tals kennen gelernt haben, vorhanden sind. Unter den paläozoischen Bildungen ist der unterkarbonische Kalk, abgesehen von den Mergeln und Sandsteinen des Sart-dschol-Passes, das jüngste und das am weitesten verbreitete Glied und überall, wo man seine Unterlage sehen konnte, beobachteten wir, daß er transgressiv liegt. Sowohl in den Massiven der beiden Granitzüge als auch im Gebiet der paläozoischen Sedimente konnte die transgressive Lagerung festgestellt werden, und zwar über Granit am Sart-dschol-Paß, über altem Phyllit am Kaschka-tur-Paß und ähnlich an andern Orten. Später werden wir das gleiche Verhältnis am südlichen Rande der Tekes-Ebene kennen lernen und darauf, daß es sehr wahrscheinlich auch zwischen dem Sary-dschass und dem Bayum-kol-Tal vorherrscht, haben wir schon hingewiesen. Was aber für diese zum Teil beträchtlich voneinander entfernten Stellen gilt, können wir auch mit Recht für den ganzen Raum des Gebirgsteils, der in dieser Arbeit unter den Begriff der äußeren Gebirgszüge fällt, annehmen. Indem wir nämlich von den Verhältnissen am Sart-dschol-Paß und Kaschka-tur-Paß ausgegangen sind, sind wir zu der Vorstellung einer ausgebreiteten unterkarbonischen Transgression gekommen, die vor sich gegangen ist, als die granitischen Massen schon zum größten Teil abgetragen und als die altpaläozoischen Bildungen schon disloziert gewesen sind (siehe S. 115 f. und 161).

Wir haben also in den äußeren Gebirgszügen des nördlichen zentralen Tian-Schan den zum Teil noch sichtbaren Rumpf eines alten Gebirges vor uns.

Die Längs- und Querbrüche, durch die am Kaschka-tur-Paß und in der Schieferzone des Bayum-kol-Tals der unterkarbonische Kalk verschoben worden ist, die großen Brüche auf der Nordseite des Gebirges, die flexurartigen Biegungen des unterkarbonischen Kalks auf der südlichen Seite des Sart-dschol-Passes und noch manche andere Beispiele, die bisher noch nicht besprochen worden sind, zeigen aber, daß auch nach der unterkarbonischen Transgression gebirgsbildende Bewegungen eingetreten sind. Fassen wir der Übersichtlichkeit wegen die S. 118 f., 126 f. und 159 f. hervorgehobenen Bewegungsreihen zusammen, so handelt es sich 1. um die intrakarbonischen Bewegungen, deren Spuren sich in der Regression des unterkarbonischen Meeres auf der Nordseite und in den Diskordanzen der karbonischen Serie auf der Südseite des zentralen Tian-Schan zu erkennen geben, dann 2. um postkarbonische Bewegungen, in die Zeit des jüngsten Paläozoicums oder ältesten Mesozoicums fallend, wahrscheinlich verbunden mit der Intrusion und Effusion großer Lager und Decken von Quarzporphyr. In diese Phase der Bewegungen fällt sehr wahrscheinlich auch zum größten Teil die Intrusion der großen granitischen Massen der inneren Ketten und die Bildung der granitischen Achsen in den Faltenbögen auf der Südseite des zentralen Tian-Schan;[1]) 3. um die verschiedenen tertiären Bewegungen, deren Spuren in den Diskordanzen der Gobi-Serie sichtbar sind, und durch die noch die pliozänen Bildungen des Karkara-Beckens disloziert worden sind; 4. um die sehr jungen Bewegungen, welche an den Dislokationen der zum Teil postpliozänen, präglazialen Konglomerate in vielen Teilen des Gebirges kenntlich sind.

---

[1]) In dieser Hinsicht verweise ich nochmals auf meine (Fußnote S. 111) angekündigte Arbeit über den südlichen Tian-Schan.

Wir haben gesehen, daß in dem Gebiet des nördlichen zentralen Tian-Schan bisher außer den tertiären Gobi-Sedimenten und den noch jüngeren, nur wenig dislozierten Konglomeraten keine Bildungen gefunden worden sind, die jünger wären als die karbonischen Mergel und Sandsteine des Sart-dschol-Passes und vor allem, daß keine mesozoischen Bildungen bekannt geworden sind, weder marine Sedimente noch Landpflanzen und Kohle führende Sandsteine und Konglomerate, die sonst in gewissen Gebieten des Tian-Schan mächtig entwickelt sind. Aus diesem Grunde ist es, ganz abgesehen von der Unzulänglichkeit der bisherigen Beobachtungen, nicht möglich, an unserem Gebirgsteile die tektonischen Vorgänge einiger Zeitabschnitte, namentlich die des jüngeren Paläozoicums und älteren Mesozoicums, auch nur in den äußersten Umrissen zu ermitteln. Außer der unterkarbonischen Transgression, die in so großer Deutlichkeit an den verschiedenen Stellen der äußeren Gebirgszüge sichtbar ist, können wir daher erst wieder die Vorgänge der tertiären Zeit mit einiger Sicherheit erkennen. Ich habe schon (S. 104) gesagt, daß es wenig wahrscheinlich ist, daß mesozoische Landpflanzen führende Sandsteine und Konglomerate in dem nördlichen Teile des zentralen Tian-Schan abgelagert und dann wieder entfernt worden sind.[1]) Das Gebirge hat wohl, nachdem es vor der unterkarbonischen Transgression schon stark abgetragen worden war, in diesem Zustand lange Zeiträume an den Bewegungen der karbonischen Zeit teilgenommen, ist sodann durch die postkarbonischen Bewegungen hauptsächlich als eine starre Masse verändert und dann in stetem Zuge bis in die tertiäre Zeit hinein abgetragen, dann nochmals verändert und abermals abgetragen worden. Gegen die Ablagerung von mesozoischen Bildungen, limnischen oder kontinentalen Ursprungs, die eine gewisse Tiefe des Niveaus der Unterlage voraussetzt, spricht neben den Verhältnissen, die wir sogleich betrachten werden, vor allem die Tatsache, daß die bisher aus dem Tian-Schan bekannt gewordenen mesozoischen Bildungen in einer bisher nicht beachteten, aber sehr beachtenswerten Gesetzmäßigkeit nur in den nach N.W. streichenden Gebirgszügen, die erst während der tertiären Zeit entstanden sind, vorzukommen scheinen. In Übereinstimmung hiemit ergibt sich bei einer genaueren Verfolgung der Verbreitung und Lagerungsverhältnisse der Gobi-Sedimente, daß diese tertiären Bildungen in den wirklich alten Teilen des Tian-Schan, also in dem Gebiet der nach N.O. streichenden Gebirgszüge überall, wo ihre Unterlage sichtbar ist, diskordant auf abgetragenen paläozoischen Sedimenten lagern.

Wegen der großen Lücken in der Sedimentfolge muß die Frage nach Art und Größe der Veränderungen, welche die postkarbonischen Bewegungen im Gebiet der äußeren Gebirgszüge hervorgerufen haben, unbeantwortet bleiben; es ist aber gewiß, daß, wenn das Gebirge seit jenen Bewegungen bis in die Tertiärzeit hinein abgetragen worden ist, die Spuren der Abtragung noch sichtbar sein müssen, wenn anders sie nicht durch später vor sich gegangene tertiäre Bewegungen wieder verwischt worden sind. Dies führt uns zu der Frage nach der Art, Lage und Ausdehnung der Dislokationen, die durch diese Bewegungen verursacht worden sind.

Wir wollen nicht jetzt schon diese Dislokationen einzeln nacheinander betrachten, wozu die bisherigen Beobachtungen zum Teil noch nicht ausreichen, sondern wollen

[1]) Friederichsen, l. c., S. 156 und 157 spricht von einer kontinentalen Periode und meint, daß während dieser Periode tektonische Vorgänge eingetreten und Binnenablagerungen gebildet wurden.

zunächst sehen, ob es wirklich Abtragungsflächen gibt, die derart enge mit den tertiären Dislokationen in Verbindung treten, um es klar zu machen, daß sie älter sind als diese. Dadurch erhalten wir am besten einen Überblick über das Maß der Abtragung und der später durch die tertiären Dislokationen eingetretenen Veränderung.

Es ist Friederichsens[1]) Verdienst, daß er als Erster auf die in morphologischer Beziehung eigentümlichen, zum Teil fast ebenen Hochflächen, die sich in der Umgebung des Sary-dschass-Tals nnd weiter westlich in der Umgebung der Hauptwasserscheide ausdehnen, mit dem Hinweise aufmerksam gemacht hat, daß diese Flächen wahrscheinlich alte Denudationsflächen seien, entstanden während einer kontinentalen Periode.

Nur wenig später hat Davis[2]) die ausgedehnten, hoch liegenden Flächen, die er südlich vom Issyk-kul und in der Umgebung des Son-kul gesehen hat, beschrieben und mit großem Nachdruck die Ansicht geäußert, daß diese Flächen Teile einer wahren peneplain seien. Davis meint, daß diese peneplain seit der Zeit der starken gebirgsbildenden Bewegungen, die er ins Mesozoicum setzt, durch eine lange dauernde Abtragung, die wenig oder gar nicht durch Bodenbewegungen gestört worden sei, entstanden sei. Für ihre Entstehung kämen die verschiedenen Vorgänge der subärilen Erosion, weniger die seitliche Erosion der Flüsse in Betracht. Diese Ansicht ist unzweideutig. Um aber die verschieden hohe und vor allem sehr hohe Lage solcher Flächen zu erklären, meint Davis, sei es am besten anzunehmen, daß die Abtragungsfläche, nachdem sie das untere Denudationsniveau erreicht oder doch nur kurze Zeit, bevor sie es erreicht hatte, durch Bodenbewegungen zerstückelt worden sei, und zwar durch eine ungleichmäßige Hebung der Massen, welche die Flächen trugen. Dabei schließt Davis fast ausschließlich aus der Gestalt der südwestlich und westlich vom Issyk-kul liegenden Gebirgszüge, daß diese Hebung an großen Verwerfungen (fault) vor sich gegangen sei.

Diese Ansicht unterscheidet sich aber, indem sie eine Bewegung der Horste gegenüber der Umgebung voraussetzt, sehr wesentlich von der Ansicht, die Suess vertreten hat: daß nämlich die Horste stehen blieben und die Umgebung gesenkt wurde. Wir wollen hier keine Spekulation über diese Frage beginnen, obwohl die Umrandung des Tian-Schan die Gelegenheit hiezu bieten würde, sodaß z. B. bei Vergleichung der Lage und der Lagerungsverhältnisse der tertiären Bildungen der westlichen Abhänge des Gebirges mit denselben Bildungen der aralo-kaspischen Niederung eine Massenbewegung der heute höher liegenden Teile sehr wahrscheinlich erscheint. Für unseren Zweck hat aber diese grundsätzliche Frage keine Bedeutung, denn es handelt sich für uns nur darum, festzustellen, ob wirkliche Teile einer peneplain, also einer Destruktionsfläche aus mesozoischer Zeit, heute in so hoher Lage sichtbar sind, wie Davis dies annimmt, und ob diese Flächen mit späteren Dislokationen so in Verbindung treten, daß es klar wird, sie verdanken diesen ihre heutige Lage. Es ist für uns dabei einstweilen gleichgültig, ob dieses Niveau durch Senkung der Umgebung oder durch Hebung der Massen, welche die Flächen tragen, verursacht worden ist. Es ist von vorneherein klar, daß bei der Entstehung der Höhenunterschiede Faltung nicht in Frage kommen kann, wenn anders so große Teile der alten

[1]) Friederichsen, l. c., S. 163.

[2]) Davis: Exploration in Turkestan. Expedition of 1903 under Direction of Raphael Pumpelly. Washington 1905, S. 73 f. und 80 f.

peneplain erhalten geblieben sein sollen, sondern daß der vorherrschende oder alleinige Typus der Dislokation die Verschiebung sein muß.

Die Flächen, die Friederichsen erwähnt und die ich selber an vielen Stellen der äußeren Gebirgszüge gesehen habe, tragen alle die Merkmale wie sie Davis hinsichtlich der merkwürdigen Hochflächen in der westlichen Umrandung des Issyk-kul beschrieben und zum Teil abgebildet hat; sie dehnen sich, was schon (S. 102 f.) bei Besprechung des südlichen Granitzugs hervorgehoben worden ist, hauptsächlich in der Umgebung der Wasserscheide aus, soweit diese in dem Bereich der östlichen Ausläufer des Terskei-Ala-Tau liegt. Die Beständigkeit der Abdachung des Gebirges, die weiter im Osten sich in der Umgebung der großen, in das Tekes-Becken mündenden Quertäler zeigt, ist hier verschwunden und die scharfen Formen, die wir in unseren europäischen Alpen zu sehen gewohnt sind, bleiben ein großes Stück südlich vom Issyk-kul und auch noch etwas weiter östlich davon auf den nördlichen Abhang des Terskei-Ala-Tau beschränkt. Man ist erstaunt, wenn man, durch die waldreichen Quertäler dieses Abhangs, z. B. im Turgen-Aksu- oder im Souka-Tal nach Süden reisend, den wasserscheidenden Kamm überschreitet und nun vor sich im Inneren des Gebirges die weiten, an vielen Stellen fast ebenen Hochflächen sieht.

Die Flächen liegen hier in der Nähe der Schneelinie, an einigen Stellen auch darüber und sind dann mit Firn und Eis bedeckt. Wo sie darunter gehen, tragen sie eine Decke von alter Moräne und Schutt. Auch an Stellen, wo ihre Höhe noch geringer ist, sind sie meistens steril, und nur im Osten, wo sie in der Umgebung der Mukur-Mutu-Täler beinahe bis an die obere Baumgrenze herabgehen, sieht man auf ihnen prächtige Matten.

Huntington ist zu derselben Zeit wie Davis, zum Teil mit ihm zusammen, im Tian-Schan gewesen; er hat, vom Issyk-kul ausgehend, den westlichen Teil des zentralen Tian-Schan in südlicher Richtung bis an den Rand der Kaschgarischen Niederung überschritten. Auch er beschreibt solche hochgelegene Flächen wie Davis und betrachtet sie wie dieser als Reste einer großen peneplain.[1])

Huntingtons Profil durch diesen Teil des Tian-Schan beginnt im Norden am südlichen Ufer des Issyk-kul, an der Mündung eines Flusses, der Juuka-Su genannt wird und verläuft nach Süden über einen Paß, der Jukuchak-Paß heißen soll.[2]) Der nördliche Teil dieses Profils verläuft also beiläufig längs derselben Linie, wie das Profil Figur XIV in dieser Arbeit. Ein Blick darauf zeigt, daß in der Tat südlich von diesem Paß eine bedeutende Abtragung des Gebirges erkennbar ist und ich habe schon S. 103 erwähnt, daß sich südwestlich vom Souka-Paß große, schwach nach Süden geneigte Eis- und Firnfelder ausdehnen, und daß deren Unterlage als eine große Fläche sichtbar ist.

Die äußersten im Norden liegenden Reste solcher Flächen (siehe S. 102 f.) sieht man noch in der unmittelbaren Umgebung des Souka-Passes. Indem sie sich sanft nach Süden senken, nach Norden aber durch einen steilen Abfall begrenzt werden, bilden sie gleichsam in einem zwar zerschnittenem, aber scharfem Rande den Kamm des Terskei-Ala-Tau; sie liegen hier in der Nähe des Kammes beiläufig 4000 m hoch, senken sich aber nach Süden, soweit anstehendes Gestein noch sichtbar ist, das ist auf einer Strecke von 15 bis 20 km, nur wenige hundert Meter. Der Höhenunterschied zwischen dem Kamm des Terskei-

[1]) l. c., S. 167 f. und 172 f.

[2]) Juuka-Su ist sehr wahrscheinlich die Souka und der Jukuchak-Paß der Souka-tschak-Paß.

Ala-Tau und dem Fuß seines nördlichen Abhangs beträgt aber auf einer nicht viel größeren Strecke mehr als 2000 m. Auf dieser Strecke sieht man keine Spur der Flächen mehr, sondern das Gebirge zeigt dort die scharfen Formen, die wir in den Alpen zu sehen gewohnt sind. Wie weit die Flächen vom Kamm des Terskei-Ala-Tau gegen Süden reichen, läßt sich kaum angeben; denn sie verschwinden dort unter tertiären Gobi-Sedimenten, den noch jüngeren Bildungen und vor allem unter den ausgedehnten, ungemein mächtigen Massen der alten Moränen.[1]) Auf diesen Aufschüttungen dehnen sich, mehr als 3000 m hoch gelegen, die weiten Sommerweideplätze der Kirgisen aus. Wo sich aber Teile des Gebirges jenseits davon im Süden darüber erheben,[2]) bestehen sie zumeist, wie z. B. im Quellgebiet des Kara-sai, aus alten Schiefern und Kalk und sind dann so mit Eis und Firn und vor allem mit Schutt bedeckt, ja geradezu darunter begraben, daß es fast ganz unmöglich ist, ihren Bau im Ganzen zu erkennen. Aus diesen Gründen kann auch ich nur wenig über den Bau dieser Teile des Gebirges sagen, und es ist deshalb kaum nötig hervorzuheben, daß Huntingtons Profil (Fig. 124), wenigstens was den zwischen seinem „Jukuchak-Paß“ und dem „Kara-kul-R.“ gelegenen Teil betrifft, im Wesentlichen nur eine Konstruktion ist, die auf verhältnismäßig wenigen, oft weit auseinanderliegenden, und selten deutlich erkennbaren Aufschlüssen beruht. Die Aufschlüsse reichen außerdem in den meisten Fällen nur sehr wenig unter die Oberfläche. Deshalb mag vielleicht der Bau des Tian-Schan sein, so wie ihn Huntington in seinem Profil darstellt; es ist aber auch ebenso gut möglich, daß er anders ist. Dies zu bemerken ist notwendig, denn erstens wissen wir nicht, wie tief die Aufschüttungen zwischen den verschiedenen noch sichtbaren Teilen des Gebirges hinabreichen, und zweitens ist es sehr wahrscheinlich, daß die Einheitlichkeit des Baues, die Huntington für die Linie seines Profiles annimmt, in Wirklichkeit ebensowenig vorhanden ist, wie weiter im Osten, wo die Verhältnisse dem Beobachter Einsicht in den Gebirgsbau wirklich gestatten, z. B. auf irgend einer meridionalen Linie im Sary-dschass-Tal. Davis[3]) meint, daß die Bildung der peneplain in dem Gebiet des Issyk-kul schon in der mesozoischen Zeit begonnen habe; Huntington,[4]) der ausdrücklich die Einheitlichkeit der Abtragung und ihren Zusammenhang über einem großen Raum hervorhebt, ist überzeugt, daß die peneplain in den von ihm besuchten Teilen des Gebirges tertiäres Alter habe.

Es kann nun ohne weiteres die Wahrscheinlichkeit zugegeben werden, daß eine Abtragung in der tertiären Zeit vor sich gegangen sei; wir wollen aber das Schema vermeiden, das heißt eine Ansicht, die für gewisse Teile des Gebirges richtig sein mag, wollen wir nicht gleich auf das ganze Gebirge ausdehnen, bevor dieses genauer erforscht ist. Soweit wir es aber kennen, beobachtet man mit Sicherheit, wie aus den früheren Ausführungen auch hervorgeht, daß seine einzelnen Teile verschiedenartig sind: In dem Gebiet des eigentlichen zentralen Tian-Schan, im Gebiet des Sary-dschass-Tals und noch weiter westlich sieht man die Denudationsflächen in einem ganz bestimmten Teile der äußeren Gebirgszüge, dessen morphologische Verhältnisse deutlich verschieden sind von denen der inneren Ketten.

---

[1]) Merzbacher, l. c., S. 63.

[2]) Huntington, l. c., S. 173. Die dort in Figur 125 gegebene Abbildung zeigt einen Teil des Gebirges aus dieser Gegend. Im Vordergrunde sieht man ein Stück der Aufschüttungsflächen, im Hintergrunde die sanften Formen einer unter Schnee und Schutt fast ganz begrabenen Erhebung.

[3]) l. c., S. 72. [4]) l. c., S. 167 und 168.

Die Abtragung mag auch in diesen Ketten weit vorgeschritten sein, sicher aber lange nicht so weit, wie in den äußeren Gebirgszügen. Ich bin der Ansicht, daß diese Verschiedenheit auch in den Teilen des Gebirges vorhanden sein muß, die Huntington gequert hat, daß also die Hochflächen, die wir unmittelbar südlich vom Souka-Paß beobachten, nicht ohne weiteres mit der tertiären peneplain zusammenhängen, die weiter im Süden vorhanden sein soll. Wären die Tiefen, die im Meridian des Souka-Passes die verschiedenen Teile des Gebirges trennen, nicht mit so mächtigen Aufschüttungsmassen erfüllt, so würden wir wahrscheinlich einen ähnlichen, wenn auch vielleicht nicht so starken Gegensatz in den morphologischen Verhältnissen wie auf den beiden Seiten des oberen Sary-dschass-Tals feststellen können.[1]) Ein großes hohes Gebirge wird in langen Zeiten verhältnismäßiger Ruhe abgetragen: es mag schließlich eine wahre peneplain entstehen; nicht wahrscheinlich ist es jedoch, daß diese peneplain, die sich über sehr verschiedene Teile des Gebirges gleichmäßig ausbreitet, in solchem Zusammenhang 3000 oder 4000 m hoch gehoben wird, wie Huntington dies annimmt.[2])

Aber abgesehen von diesen sich aufdrängenden Erwägungen zeigt auch die mehrfach hervorgehobene Tatsache, daß in der Serie der Gobi-Sedimente Diskordanzen vorkommen, die eine mehrmalige Wiederholung der gebirgsbildenden Bewegungen anzeigen, daß die notwendigste Voraussetzung für die Abtragung eines sehr großen und hohen Gebirges: nämlich eine lange Zeit verhältnismäßiger Ruhe für die tertiäre Zeit wenigstens nicht zutrifft. Über andere Gründe, die hiefür sprechen, werde ich mich bei der Beschreibung der großen Faltenbögen der Südseite des Gebirges in einer demnächst erscheinenden Arbeit noch äußern.[3])

Wir halten also zunächst die Tatsache fest, daß die Hochflächen in der Umgebung des Souka-Passes nach Norden bis an den Kamm des Terskei-Ala-Tau reichen, daß sie dort zum Teil in einer scharfen Kante an den jähen Abstürzen der nördlichen Seite endigen, daß sie dagegen nach Süden mit allmählicher Senkung unter Aufschüttungen, hauptsächlich unter alter Moräne, verschwinden (siehe S. 103). Wenn wir es nun auch für nicht erwiesen erachten, daß diese Flächen Teile einer großen tertiären peneplain sind, so müssen wir doch anderseits auf die Verschiedenheiten in morphologischer Beziehung hinweisen, die sich hier ähnlich wie im Sary-dschass-Tal, wenn auch durch die Aufschüttungen zum großen Teil verdeckt, zwischen dem Gebiet der Flächen und den südlich davon liegenden Teilen des Gebirges zeigen.

Man sieht, südlich vom Souka-Paß stehend, die Flächen eine Strecke weit sich nach Osten und Westen ausdehnen. Bei einem Blick nach Osten kann man ihre Fortsetzung über die Mündung des großen Kolpakowsky-Gletschers hinaus[4]) weit in den Oberlauf des Irtasch hinein verfolgen; doch ist die morphologische Beschaffenheit dieses Gebirgsteils im ganzen so gut wie unbekannt. Erst jenseits vom Kulu-Paß kennen wir

---

[1]) Wie verschiedenartig die tektonischen Verhältnisse in den verschiedenen Teilen des Tian-Schan und auch auf dessen Südseite sind, wie sehr sie an anderen Stellen von dem Profile Huntingtons abweichen, kann am besten aus einem Profile durch eines der größten südlichen Quertäler, durch das südliche Musart-Tal, ersehen werden, welches demnächst als weiterer Teil der „Wissenschaftlichen Ergebnisse der Merzbacher'schen Tian-Schan-Expedition" unter dem Titel: „Die Gesteine des Südlichen Musart-Tales", von P. Kleinschmidt und P. Limbroek in diesen Abhandlungen erscheinen wird, nachdem die Arbeit schon jetzt druckfertig vorliegt. G. Merzbacher.

[2]) Huntington, l. c., S. 169. [3]) Siehe Anmerkung unter Text S. 111.

[4]) Siehe die Karte bei Merzbacher, l. c. und Friederichsens.

sie wieder besser, denn für den östlich von diesem Paß liegenden Teil des Gebirges haben wir die Beobachtungen Ignatiews und die von Friederichsen,[1]) der von Norden kommend durch das Turgen-aksu-Tal und über den Kara-kür-Paß in das Gebirge am Kulu gelangt ist. Ich bin ein Jahr später denselben Weg in der entgegengesetzten Richtung gegangen und war ebenso erstaunt wie Friederichsen über die Deutlichkeit, welche die Flächen hier zeigen und über ihre Ausdehnung, obgleich ich solche Bildungen schon vorher am südlichen Rande der Tekes-Ebene, am oberen Laufe des Sary-dschass- und am Souka-Paß gesehen hatte. Man findet sie hier in dem Streifen des Gebirges, der im Norden von dem wasserscheidenden Kamm des Terskei-Ala-Tau, im Süden von den nördlichen Abhängen des Kulu-Tau begrenzt wird, das ist also im Gebiet der äußeren Gebirgszüge, worin der westliche Teil des südlichen Granitzugs liegt. Kommt man von Norden und quert das Gebirge über den nahezu 4000 m hoch liegenden Kara-kür-Paß, so steigt man auf dem Weg nach Süden in das Ottuk-Tal hinunter. Schon am oberen Laufe des Ottuk zeigt sich, daß das Gebirge auf beiden Seiten des Flusses stark abgetragen worden ist. Die Flächen sind hier, wie es scheint, nicht mehr sehr deutlich erhalten; sie treten aber um so deutlicher hervor, sobald man das zum Berkut-Paß führende Nebental erreicht hat. Dort dehnen sie sich nun nach Osten weit aus; ihr scharfer südlicher Rand ist auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals mehr als eine Tagereise weit talaufwärts, fast immer in derselben Höhe bis in die Gegend des Kaschka-tur-Passes sichtbar. Im Norden werden sie eine Strecke weit östlich vom Kara-kür-Paß, von dem Kamm des Terskei-Ala-Tau begrenzt, dann bilden sie selbst die Wasserscheide und erreichen den mittleren und oberen Teil des Kok-dschar-Tals.

Der geschlossene Kamm des Terskei-Ala-Tau reicht, soweit bei der großen morphologischen Verschiedenheit der südlichen und nördlichen Abhänge[2]) überhaupt von einem zusammenhängenden Kamme die Rede sein kann, nach Osten noch etwas über den 3900 m hohen Turgen-Aksu-Paß hinaus, erreicht aber nicht die linke Seite des Kok-dschar-Tals. Die Karten geben darüber verschiedenerlei Auskunft. Auf Friederichsens Karte sieht man den mit Schnee und Eis bedeckten Kamm östlich vom Turgen-Aksu-Paß endigen, auf der Karte Merzbachers verläuft er, indem er aus der N.O.-Richtung nach Osten abschwenkt, bis in die Gegend des Kaschka-tur-Passes. Wir haben bei der Besprechung der beiden Granitmassive der äußeren Gebirgszüge (S. 97 f.) gesehen, daß sie in der geraden Fortsetzung der Streichrichtung nach N.O. bis an den südlichen Rand der Tekes-Ebene reichen, daß also die Richtungsänderung des Terskei-Ala-Tau östlich vom Turgen-Aksu-Paß nicht mit einer Veränderung der geologischen Verhältnisse zusammenhängt. Das erste große Quertal, östlich davon, das Kok-dschar-Tal, schneidet tief in das Gebirge ein und zieht mit seinem Quellgebiet weit nach Süden bis in die Nähe der inneren Ketten. Indem das Gebirge sich zu erniedrigen beginnt und gleichzeitig in seiner Kammregion sich wesentlich verbreitert und abplattet, wird hier der Terskei-Ala-Tau in östlicher Richtung in eine Anzahl getrennter Gebirgsstücke zerlegt, die von tiefen Quertälern begrenzt werden. Es zeigen sich aber in der unmittelbaren Fortsetzung des Kammes, westlich vom Turgen-Aksu-Paß solche Hochflächen sogar auch östlich vom Sart-dschol-Paß, wo sie allerdings nicht näher erforscht wurden; aber genau bekannt

[1]) Friederichsen, l. c., S. 87 f. [2]) Merzbacher, l. c., S. 64.

sind diese Denudationsflächen in der Umgebung des Berkut-Passes, weiter im Osten am Mün-tör-Paß und am Kapkak-Paß; sie reichen sogar nach Osten bis zum Kaschka-tur-Paß und darüber hinaus und bilden auf dieser langen Strecke einen jetzt durch Erosion allerdings verhältnismäßig vielfach zerlegten Streifen, der aber zweifellos früher Zusammenhang hatte.

Wenn wir nun die nördlichen und südlichen Ränder der Flächen in dem bisher besprochenen Gebiet genauer verfolgen, so zeigt sich das Folgende: Am Souka-Paß ist der nördliche Rand sehr scharf durch den steilen Absturz der nördlichen Seite des Terskei-Ala-Tau bezeichnet; er verliert aber weiter nach Osten an Schärfe. Dennoch können wir auch dort einen ähnlichen Gegensatz zwischen der nördlichen und südlichen Seite des Terskei-Ala-Tau erkennen. Friederichsen hat ihn geschildert; ein Unterschied gegenüber den Verhältnissen am Souka-Paß ist nur insofern vorhanden, als in der Umgebung des Turgen-Aksu-Tals und weiter nach Osten die nördliche Seite des Terskei-Ala-Tau nicht mehr so steil ist und als die Flächen auf seiner südlichen Seite nicht mehr so zusammenhängend sind, sondern durch Erosion zerschnitten worden sind. Noch weiter im Osten verschwindet der Rand, sobald man sich dem Kok-dschar-Tal nähert, und die Flächen werden nach Norden durch dieses Tal und seine Quelltäler begrenzt.

Im Osten der vorhin erwähnten Hochflächen des Irtasch-Oberlaufes wird auf der rechten Seite des unteren Kulu-Tales an dessen südlichen Rande noch ein Stück hohen Denudationsgebietes, das sogenannte Arpa-töktyr-Plateau sichtbar, eine „tischförmig ebene Hochfläche“[1]) und, von ihm nur durch den tiefen Einschnitt des Kulu getrennt, Friederichsens sogenannter Törpu-Syrt. Noch weiter östlich ist als der heute noch sichtbare südliche Rand dieser Zone der steile Absturz des unterkarbonischen Kalks anzusehen, den Friederichsen erwähnt und den wir bei Betrachtung der Längsbrüche des Sary-dschass-Tals kennen gelernt haben (s. S. 160). Sehr wahrscheinlich haben dort einst die Flächen[2]) noch weiter nach Süden gereicht, und Friederichsens Vermutung, daß sie an großen Brüchen abgesunken seien, mag richtig sein. Östlich vom Kaschka-tur-Paß treffen wir noch einige zerstreute Reste der Flächen auf der rechten Seite des Sary-dschass- und des Kara-kol-Tals. Der Verlauf der Grenze der ganzen Zone zeigt uns deutlich, daß die Denudationsflächen von Westen nach Osten bedeutend an Breite verlieren und zuletzt auf das schmale, zwischen dem Kok-dschar- und dem Sary-dschass-Tal liegende Gebirgsstück beschränkt bleiben.

---

[1]) Friederichsen, l. c., S. 91 und siehe die Karte Bl. I.

[2]) Nach meinen Informationen ist es nicht mit Sicherheit festzustellen gewesen, ob die Kirgisen nicht nur die ausgedehnten Weidegründe im Hintergrunde der Hochtäler, sondern auch die sterilen Hochflächen, von denen hier die Rede ist, als Syrt bezeichnen. Nach den Angaben Almasys und Friederichsens (l. c., S. 151 f.) wäre dies der Fall. Dann wäre es aber auch gewiß, daß unter der Bezeichnung Syrt sehr verschiedene Arten von Flächen zusammengefaßt würden: nämlich sowohl Destruktionsflächen, die uns hier ausschließlich beschäftigen, als auch die meist etwas tiefer liegenden Aufschüttungsflächen an den Ufern des Oberlaufes der Flüsse. Es ist aber ganz klar, daß diese beiden Arten von Flächen durch ganz verschiedene Vorgänge entstanden sind: die Destruktionsflächen durch Abtragung des Gebirges, die tiefer liegenden Flächen in den höchsten Teilen der Täler aber durch Auffüllung der dicht benachbarten weiten und flachen Becken des Gebirges mit den sehr jungen roten Sanden und Konglomeraten und mit altem Moränenschutt. Für die Destruktionsflächen finden wir Beispiele auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals, für die Aufschüttungsflächen dicht daneben auf dessen linker Seite. Es empfiehlt sich also die Bezeichnung Syrt, die doch wohl hauptsächlich für die Weidegründe der Aufschüttungsflächen gilt, nicht ohne weiteres als morphologische Bezeichnung für die Destruktionsflächen zu verwenden.

Betrachten wir nun die Höhen,[1]) welche die Denudationsflächen an den verschiedenen Stellen des eben begrenzten Gebietes einnehmen: Die vorläufige Karte Merzbachers gibt für den Souka-Paß 4270 m Höhe an; der Wert Semonows beträgt 3360 m. Das ist ein erheblicher Unterschied. Es gibt aber Gründe dafür, daß die von Semenow ermittelte Höhe zu gering ist.[2]) Die Vorberge des Terskei-Ala-Tau erreichen nach Sewerzow im Mittel schon 3300 m, einzelne Gipfel darin 3600—3900 m Höhe. Man sieht, daß diese Gipfel an Höhe bedeutend hinter denen der Kammlinie des Terskei-Ala-Tau zurückbleiben, und daß die Gipfel der Vorberge auch zum großen Teil tiefer liegen als die Scharte des Souka-Passes, dessen Umgebung ganz vergletschert ist. Westlich davon liegt der Barskoun-Paß, ungefähr 3700 m hoch. Selbst wenn wir nun für den Souka-Paß nur einen ähnlichen Wert annehmen würden, so erhielten wir, indem wir die Höhe der Gipfel in der Umgebung des Passes hinzufügen, für die auf diesen Gipfeln noch sichtbaren Reste der Denudationsflächen (siehe Profil Fig. XIV) mehr als 4000 m Höhe. Die Flächen senken sich allmählich nach Süden, und wenn wir dies in Betracht ziehen, so ergibt sich, daß sie im Mittel in der Umgebung des Souka-Passes mindestens 3800 bis 4000 m hoch liegen müssen.

Die Höhe des Kara-kür-Passes beträgt nach Merzbachers Karte rund 3900 m, nach Friederichsen 3932 m. Hier stimmen also die Angaben überein. Der Turgen-Aksu-Paß hat nach Alexandrows[3]) Messung 3876 m, der Törpu-Paß nach Friederichsen 3708 m, der Berkut-Paß nach Alexandrow 3903 m Höhe. Sowohl der Törpu-Paß als der Berkut-Paß liegt im Gebiet der Denudationsflächen; beide sind flach muldenförmig eingesenkt und werden von den Flächen ihrer Umgebung nur wenig überragt. Der Höhenunterschied zwischen diesen Sary-dschass-Hochflächen und denen am Souka-Paß ist also nicht bedeutend.

Eine gewisse Unklarheit kommt dadurch in diese Verhältnisse, daß sich etwas westlich vom Kara-kür-Paß im Quellgebiet des Turgen-Aksu-Flusses einige Gipfel erheben, die nach Saposchnikows Vermessungen zum Teil mehr als 5000 m hoch sein sollen. Es ist klar, daß dies gegenüber der Lage der Denudationsflächen einen derartigen Höhen-

[1]) Ein Teil der Höhenangaben sind der übersichtlichen Tabelle entnommen, die Friederichsen in dem IV. Anhang seines Berichtes gibt.

[2]) Die in meinem Berichte (Peterm. Mitteilg.) verwerteten Koten sind, wie ich dort (S. 100) hervorgehoben habe, nur beiläufige, weil sich das gesamte hypsometrische Beobachtungsmaterial noch in wissenschaftlicher Bearbeitung befindet. Immerhin kann bei der Güte der benützten Instrumente und bei der großen Sorgfalt, welche den Beobachtungen zugewendet wurde, behauptet werden, daß schon diesen vorläufigen Werten eine annähernde Richtigkeit zukommt. Der große Unterschied zwischen meiner und der Kote Semonows mag seine Erklärung darin finden, daß, wie ich mit hoher Wahrscheinlichkeit annehmen darf, Semonow nicht die sehr weit nach Süden zurückliegende, schwer erreichbare höchste Paßhöhe betrat, sondern nur eine Einsattlung im nördlichen Rand der Kette. G. Merzbacher.

[3]) Die Werte, die Borgheses Expedition (Brocherel, In Asia Centrale. Una esplorazione nel Tien Scian Centrale; Spedizione d. Principe Don Scipio Borghese nel 1900, B. d. S. G. Italiana, 4. Ser., Bd. V, S. 451—90, 574—603, davon getrennt ein Kartenblatt: Carta d. T. S. Centrale con l' itinerario d. spedizione d. Princ. Sc. Borghese secondo lo note ei relievi d. Prof. G. Brocherel 1 : 600000, Rom 1904) erhalten hat, scheinen mir, was auch schon Friederichsen (l. c., S. 231) für einige Punkte hervorgehoben hat (siehe auch Literaturbericht, Peterm. Mitteil. 1905, Heft VII, Nr. 381) zu niedrig zu sein: sie bleiben, abgesehen von anderen Punkten des Gebirges, für den Turgen-Aksu-Paß hinter den Werten Alexandrows und für den Törpú-Paß hinter dem Werte, den Friederichsen angibt, um rund 700 m zurück.

unterschied ergibt, daß keine Rede davon sein kann, die Denudationsflächen hätten sich ähnlich wie am Souka-Paß unter allmählicher Erhebung nach Norden bis zu der Höhe dieser Gipfel erstreckt. Wahrscheinlicher ist, daß der Unterschied durch spätere Bewegungen entstanden sei. Soweit ich die Flächen dieses Gebiets gesehen habe, konnte ich nirgends ein allmähliches Ansteigen nach Norden deutlich erkennen. Man beobachtet sie vielmehr in getrennten Stücken, die fast wagerecht verlaufen. Demnach gewinnt es den Anschein, als lägen sie dort als ein nach N.O. verlaufender Streifen, eingesenkt zwischen steil aufragenden Rändern. Besonders deutlich tritt dies hervor auf der südlichen Seite des Kulu-Tals, am Südrande des Arpa-töktyr-Plateaus, das, völlig eben und 3800 m hoch gelegen, im Süden zuerst von 4300 m hohen, dann im Kulu-Tau von fast 6000 m hohen Gipfeln überragt wird. Auch weiter im Osten bemerkt man ähnliche Verhältnisse: der schmale Streifen der Denudationsflächen auf der rechten Seite des Sary-dschass-Flusses liegt in der Gegend des Mün-tör-Passes 3800 m, am Kapkak-Paß 3900 m und auf der rechten Seite des Kara-kol-Tals 3800 bis 3900 m hoch. Gegen Norden hin würde die Fortsetzung der Flächen höher liegen als alle Gipfel des Gebirges, vielleicht mit Ausnahme einiger Erhebungen auf der rechten Seite des Kok-dschar-Tals und im obersten Kapkak-Tal, die das Niveau der Flächen ein wenig überragen mögen; nach Süden würde dagegen die Fortsetzung der Flächen auf die Gehänge der hohen inneren Ketten[1]) treffen. Dies wäre ein in seinen Hauptzügen ähnliches Bild wie am Arpa-töktyr-Plateau.

Aus den Vergleichungen der bisher ermittelten Höhen ergibt sich nun ganz deutlich, daß die Denudationsflächen, vom Souka-Paß im Westen bis zum Aschu-tör-Paß im Osten, im Durchschnitt 3900 m hoch liegen. Gegenüber der Beständigkeit des Niveaus der Flächen treten einige Verschiedenheiten in ihrem sonstigen Verhalten hervor. Am Souka-Paß sieht man deutlich, daß sich die Flächen von den Gipfeln des Kammes allmählich nach Süden senken, was besonders gut an den ausgedehnten Firnfeldern südwestlich vom Passe sichtbar wird; in der Umgebung des Kulu-Tals, am Törpu-Paß, aber namentlich am Arpa-töktyr-Plateau und auf der rechten Seite des Sary-dschass- und des Kara-kol-Tals liegen die Flächen dagegen mehr oder weniger wagerecht, wie eingesenkt zwischen höher aufragenden Rändern. Im oberen Teile des Sary-dschass-Tals kann man wahrnehmen, daß einzelne, dicht benachbarte Stücke des südlichen Randes der Denudationsflächen, soweit er erhalten ist, in verschiedener Höhe liegen, wenn der Höhenunterschied auch nur gering ist: Die Hochfläche am Kaschka-tur-Paß liegt auf unterkarbonischem Kalk ein wenig tiefer, als das Stück der Hochfläche auf dem Phyllitzug östlich davon, und der Unterschied beginnt ganz deutlich an den Stellen, wo die großen Querverschiebungen, die den Phyllitzug zerschnitten haben, verlaufen (siehe S. 96, 107, 155 f. und 159).

Es dürfte deshalb die Annahme berechtigt sein, daß diese Querverschiebungen später als die Flächen entstanden sind.

---

[1]) Friederichsen, l. c., Abbildung 42 auf Tafel 26. Diese Abbildung gibt eine gute Vorstellung hiervon; man sieht im Vordergrunde zur Rechten ein Stück aus dem südlichen Rande der Denudationsflächen. Es ist fast eben und wagerecht. Im Hintergrunde sind die Teile der inneren Ketten, die zwischen dem Khan-Tengri und dem Tüss-aschu-Paß liegen, sichtbar. Die Fortsetzung der Denudationsfläche im Vordergrunde nach Süden träfe die nördlichen Abhänge der inneren Ketten noch unterhalb der Schneelinie.

Wenn dies aber richtig ist, so ist es sehr wahrscheinlich, daß die heute sichtbare Lage und Verbreitung der Denudationsflächen in einem hohen Grade von Dislokationen beeinflußt worden ist, und dadurch ließe sich erklären, weshalb diese merkwürdigen, ausgedehnten Flächen nur in gewissen Teilen des Gebirges vorkommen und zwar an manchen Stellen in einer niedrigeren Lage als die umgebenden Teile des Gebirges, die keine Spur der Flächen zeigen oder mehr erkennen lassen.

Alles dies führt zur Frage nach dem Alter, der Lage und der Bedeutung der Dislokationen, die hier in Betracht kommen könnten. Um eine solche Frage zu beantworten, müssen wir uns nochmals zum nördlichen Rand der Denudationsflächen wenden.

Auf der linken Seite des Kok-dschar-Tals können wir deutlich wahrnehmen, daß die Hochflächen in dem Sedimentstreifen zwischen den beiden Granitzügen den steil gestellten unterkarbonischen Kalk ebenso abschneiden wie den Phyllit der Schieferzone des Bayum-kol-Tals auf der rechten Seite des Sary-dschass. Auch westlich vom Kaschkatur-Paß und am Kapkak-Paß läßt sich ähnliches beobachten. Die Denudationsflächen, die dort auf unterkarbonischem Kalk liegen, breiten sich nach Osten auf der rechten Seite des Kara-kol-Tals auch über den Granit aus, der diesen Kalk im Kontakt verändert hat. Hieraus ergibt sich, daß die Abtragung des Gebirges, die schließlich bis zur Bildung von Denudationsflächen vorgeschritten ist, erst begonnen hat, nachdem die intrakarbonischen und sehr wahrscheinlich auch die postkarbonischen Bewegungen vor sich gegangen waren, durch welche die steile Stellung des unterkarbonischen Kalks verursacht worden ist.

Wir haben bei Betrachtung der orographischen Verhältnisse des nördlichen zentralen Tian-Schan gesehen (S. 92), daß das Gebirge östlich vom Aschu-tör-Paß, wo die Wasserscheide von den östlichen Ausläufern des Terskei-Ala-Tau, nämlich vom Gebiet des südlichen äußern Granitzugs, also auch von dessen Denudationsflächen auf die hohe zentrale Kette übergeht, anders beschaffen ist, als westlich davon. Die genauere Betrachtung ergibt nun einen Unterschied insoferne, als die Quertäler im Westen auf der Nordseite nur bis an den Kamm des Terskei-Ala-Tau reichen und auf der südlichen Seite im allgemeinen nur wenig entwickelt sind, daß sie sich dagegen östlich vom Aschu-tör-Paß bis in die Nähe der zentralen Kette erstrecken und dort, dicht nebeneinander liegend, das Gebirge tief zerschnitten haben (S. 95 f.). Wir haben ferner (S. 103, 171, 173) gesehen, wie groß der Unterschied in morphologischer Beziehung zwischen den nördlichen Abhängen des Terskei-Ala-Tau und dem Gebiet der Denudationsflächen ist: daß nämlich die nördlichen Abhänge Formen zeigen, die an unsere Zentralalpen erinnern,[1] und daß die Denudationsflächen in dem Gebiet der Wasserscheide mitten im Hochgebirge einen überaus lebhaften Gegensatz dazu bilden. Dieselben scharfen Formen wie an den nördlichen Abhängen des Terskei-Ala-Tau finden wir nun auch östlich vom Aschu-tör-Paß in der geraden Fortsetzung der Denudationsflächen der Wasserscheide nach O.N.O., und die Veränderung geht plötzlich vor sich, gerade an der Stelle, wo das Aschu-tör-Tal bis nahe an die zentrale Kette nach Süden reicht. So sehen wir also auch von Westen nach Osten, in Gebieten von derselben Zusammensetzung und demselben Bau, ganz denselben

[1]) Merzbacher, l. c., S. 64.

Gegensatz der morphologischen Verhältnisse wie auf irgend einer meridionalen Linie des Terskei-Ala-Tau. Der Übergang ist allerdings nicht ganz so deutlich sichtbar wie am Kamme dieses Gebirgszuges, weil die Denudationsflächen schon westlich vom Aschu-tör-Paß allmählich verschwinden oder an Deutlichkeit verlieren und zuletzt nur noch in einem schmalen Streifen auf der rechten Seite des oberen Sary-dschass- und des Kara-kol-Tals erhalten geblieben sind. Östlich vom Aschu-tör-Paß verschwindet auch dieser Streifen, und erst in der Nähe des Bayum-kol-Tals sieht man wieder Reste der Flächen. Diese Verhältnisse sind so auffällig, daß sie fast allein schon genügen, um zu zeigen, daß die Denudationsflächen älter sind als die Quertäler, und daß sie von diesen zerschnitten und zum Teil vernichtet worden sind. Eine Bestätigung dessen finden wir in dem Vorkommen der eben erwähnten Reste der Denudationsflächen, die in der Nähe des Bayum-kol-Tals und weiter östlich nur in kleinen Stücken noch erhalten sind, aber sonst ganz die Beschaffenheit der Flächen des Sary-dschass-Tals haben. Ein besonders deutliches Beispiel bietet das Quellgebiet der Mukur-Mutu-Flüsse.[1]) Es kann demnach nicht mehr zweifelhaft sein, daß sich die Denudationsflächen über das ganze, heute noch sichtbare Gebiet des südlichen äußeren Granitzugs ausdehnen, daß sie aber nach Osten mehr und mehr bis auf wenige, voneinander entfernte Stücke vernichtet worden sind. Erst die später eingetretene Bildung der großen Quertäler hat diese Erscheinung verursacht, und es liegt daher nahe anzunehmen, daß die Entstehung dieser Quertäler, das heißt die hiezu erforderliche Veränderung der Gefällsverhältnisse durch Bodenbewegungen von bedeutendem Ausmaß verursacht worden ist.

Es ist nunmehr unsere Aufgabe nachzuweisen, daß solche Bodenbewegungen stattgefunden haben, daß sie jünger sind als die Denudationsflächen und daß die Lage der großen Quertäler einen gewissen Zusammenhang mit der Lage der Dislokationen, welche durch diese Bewegungen hervorgerufen worden sind, zeigt. Der erste Teil der Aufgabe erledigt sich leicht. Es genügt noch einmal, wie S. 177, darauf hinzuweisen, daß die Verschiebungen und Längsbrüche am Kaschka-tur-Paß, um nur ein sicheres Beispiel anzuführen, die Denudationsflächen im Gebiet des Phyllitzugs zerschnitten haben, und daß der steile Abfall des unterkarbonischen Kalks auf der rechten Seite des Sary-dschass-Tals, woran die Denudationsflächen nach Süden endigen (S. 160), höchst wahrscheinlich durch einen Längsbruch gebildet worden ist.

Die verschiedenen Teile der äußeren Gebirgszüge zeigen, soweit sie bekannt geworden sind, in der Richtung des Streichens im ganzen den gleichen Bau und gleiche Zusammensetzung; sie endigen im Osten an den südlichen Rändern des Karkará- und des Tekes-Beckens, indem sie daran nacheinander spitzwinklig abschneiden (S. 98 und 101). Also nähern sie sich, aus dem Innern des Gebirges nach O.N.O. streichend, gegen Osten allmählich dessen Rande, der schräg zu dieser Richtung verläuft. Dies ist namentlich für das Gebiet des südlichen äußeren Granitzugs deutlich, somit auch für seine Denudationsflächen, die dorten bis auf wenige Reste verschwinden, wo sie in den Bereich der Abdachung geraten. Die Richtung dieser Abdachung ist also unabhängig vom Streichen der alten Sedimente und von der Längsrichtung der graniti-

[1]) Merzbacher, l. c., S. 6.

schen Massive (siehe auch S. 96). Es bliebe nun noch zu prüfen, ob sie im Zusammenhang mit Dislokationen steht, die jünger als die Denudationsflächen sind.

Muschketow[1]) hat zu zeigen versucht, daß im Transilensischen Ala-Tau und im Kungei-Ala-Tau sehr wahrscheinlich große Längsbrüche vorhanden seien; und er hat auch die Erdbeben, die wiederholt den nördlichen Fuß des Transilensischen Ala-Tau betroffen haben, darunter das starke Erdbeben von Wernoje am 28. Mai 1887, in Zusammenhang mit den großen Brüchen gebracht, die den Fuß des Gebirges begleiten. Davis[2]) meint, daß das östliche Ende des Alexander-Gebirges sowie die Gebirgszüge um das westliche Ende des Issyk-kul, die noch Teile der großen peneplain tragen, als durch Verwerfungen begrenzte Massen anzusehen seien.

Wir erinnern uns hier an die bei der Besprechung des nördlichen Granitzugs schon (S. 100 f.) erwähnte Tatsache, daß der Kamm des östlichen Teils des Terskei-Ala-Tau auf seiner Erstreckung östlich vom Souka-Paß unter einem deutlichen Winkel plötzlich aus der W.O.-Richtung nach O.N.O. abschwenkt und daß seine Richtung von dort bis in die Gegend des Kok-dschar-Tals, wo er allmählich verschwindet, mit dem Streichen der Sedimente übereinstimmt. In dieser Richtung streichen aber auch die Sedimente im Souka-Tal, während die Achse der granitischen Vorberge des Terskei-Ala-Tau nach W.S.W. gerichtet ist. So kommen wir zu dem nahe liegenden Schluß, daß diese Streichrichtung auch weiter im Westen vorhanden ist, und daß der nördliche Abhang des Terskei-Ala-Tau nicht die Abdachung eines selbständigen Gebirgsbogens, sondern der nördliche Abfall einer aus dem Rumpfe des alten, abgetragenen Gebirges herausgeschnittenen Masse ist, und damit dehnen wir die Ansicht, die Davis aus den auffallenden Formen der Gebirgszüge am Westende des Issyk-kul gewonnen hat, auch auf den größten Teil des Terskei-Ala-Tau aus: daß nämlich große Brüche vorhanden sind, so daß der nördliche Abhang dieses Gebirgszugs in seinem südlich vom Issyk-kul von W. nach O. gerichteten Laufe auch die Richtung dieser Brüche anzeigt.

Diese Verhältnisse verraten eine überraschende Ähnlichkeit mit den Verhältnissen am südlichen Rande der Tekes-Ebene. Da ich diese auf einer längeren Strecke aus eigener Anschauung kenne, wogegen über die tektonischen Verhältnisse des mittleren Teils des Terskei-Ala-Tau nur sehr wenig bekannt ist, so wollen wir zuerst den südlichen Rand der Tekes-Ebene kurz betrachten.

Den südlichen Rand der Tekes-Ebene begleitet vom oberen Laufe des Tekes im Westen bis über die chinesische Grenze nach Osten hinaus ein breiter Saum der roten, sehr wenig dislozierten jungen Bildungen. Diese setzen am Fuße des Gebirges niedrige Hügel zusammen, die zum großen Teil nur mit spärlicher Vegetation bedeckt sind, schon aus großer Entfernung durch ihre rötliche Färbung auffallen und dadurch in einem lebhaften Gegensatz zu den dunklen, mit Wald und Alpenmatten bedeckten Gehängen des Gebirges stehen. Hauptsächlich bestehen sie aus stark eisenschüssigen Lehmen, von lößartiger Beschaffenheit oder locker und bröckelig zerfallend, und darin sind Gerölle von Quarz, von Granit und Kalk enthalten, welche zu undeutlichen Bänken angeordnet sind. An den meisten Stellen fallen die Bänke flach nach Norden ein und bedecken in diskor-

[1]) Muschketow, Mém. Com. Geol., St. Petersburg, X, Nr. 1, 1890, S. 132.
[2]) l. c., S. 74 f.

danter Lagerung den präkarbonischen Granit und die alten Sedimente, die hier hauptsächlich aus unterkarbonischen Kalk bestehen (siehe die Profile Fig. XX und XXI). Die roten Lehme verhüllen den Fuß des Gebirges an manchen Stellen, wie z. B. an der Mündung des Kapkak-Tals; sie reichen aber nur bis zu geringer Höhe und werden in den höheren Tälern nicht mehr sichtbar. An manchen Stellen werden sie von alter Moräne bedeckt und senken sich nach Norden allmählich unter die mächtigen Aufschüttungen hinab, welche die Tekes-Ebene auffüllen. Mitten in diesen Bildungen findet man,

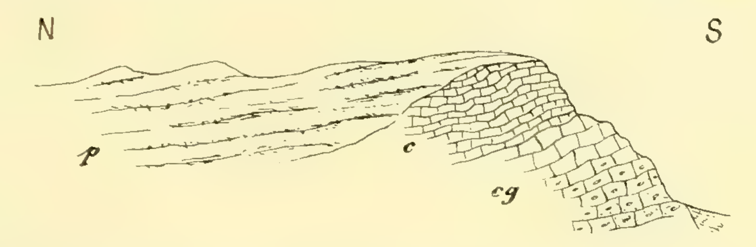


Fig. XX. Profil durch den Bergrücken Kasalusch zwischen Staniza Narynkol und der Mündung des Bayum-kol-Tals. (Länge 150 m.)
cg dunkelgrauer, unterkarbonischer Kalk, in den unteren Bänken Gerölle von rotem Granit, c dünnplattiger Kalk, p pleistozäne Konglomerate, Sande und Lößlehm.

namentlich zwischen der Mündung des Kapkak-Tals im Westen und der Kosakenansiedelung Narynkol (Ochotnitschi) im Osten, getrennte Schollen des unterkarbonischen Kalks. An der Basis einer dieser Schollen zeigt sich die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks auf Granit.

Westlich von der Mündung des Bayum-kol-Tals schließen sich diese Schollen zusammen und setzen einen schmalen, von den jungen Bildungen umgebenen Streifen zusammen, der vom Kapkak-Fluß in einem engen Einschnitt durchbrochen wird. Noch weiter im Westen sieht man in der Nähe der Poststation Ütsch-kapkak in der Fortsetzung der Schollen nach Westen einen zusammenhängenden Zug von unterkarbonischem Kalk, der flach nach Süden einfällt und nach Norden in einer 300—400 m hohen mauerartigen Wand steil abfällt. Am Fuße dieser Wand wird Quarzporphyr in großen Massen sichtbar. Nördlich davon dehnt sich die flache, fast ebene Steppe aus.

Bei genauerer Untersuchung zeigt es sich, daß in diesen Schollen Streichen und Fallen des unterkarbonischen Kalks sehr veränderlich ist. Bei der Station Ütsch-kapkak fallen die Kalke, wie wir eben gesehen haben, flach nach Süden ein; westlich von der Mündung des Bayum-kol-Tals bilden sie mit den jungen Bildungen einen 200—250 m hohen Rücken und stehen hier steil oder fallen ein wenig nach Süden ein bei einem Streichen



Fig. XXI. Profil durch die linke Seite des Kapkak-Tales bei der Mündung des Tales. (Länge 400 m.)
c dunkelgrauer, unterkarbonischer Kalk, p pleistozäne rote und gelbliche, lockere Konglomerate und grusige Sande mit Kalk und Porphyrgeröllen, f fluvioglaziale Schotter, s Gehängeschutt.

nach W.N.W. Der hellgraue unterkarbonische Kalk ist dort außerordentlich stark zertrümmert und wird von zahlreichen Kalkspatschnüren durchzogen. Etwas weiter im Osten sieht man das frühere, vom Bayum-kol-Fluß verlassene Durchbruchstal.[1]) Auf dessen östlicher Seite liegen die Kalkbänke wieder flach, fallen nach Norden ein und streichen zunächst noch nach W.N.W.; aber noch weiter östlich gehen sie an der Stelle, die in dem Profil Fig. XX dargestellt ist, in die östliche Richtung über. Zwischen dem Streifen der Schollen, der ungefähr von Westen nach Osten verläuft, und dem geschlossenen Rande des Gebirges liegt ein 3—4 km breiter Gürtel ebener Steppe, dann folgt ein schmaler Saum von alter Moräne und darauf erreicht man den unterkarbonischen Kalk und den alten Granit des Gebirgsrandes. Zwischen dem Bayum-kol-Tal und dem kurzen Quertal Naryn-kol besteht der Rand des Gebirges zum größten Teil aus Kalk, und erst weiter südlich gegen das Innere des Gebirges treffen wir die großen granitischen Massen des südlichen Granitzugs, die das Profil Fig. III zeigt. Es hat dies seinen Grund darin, daß zwischen den beiden eben erwähnten Tälern der Gebirgsrand noch zum Gebiet des Sedimentstreifens gehört, der die beiden großen Granitzüge trennt. Am Ausgang des Bayum-kol-Tals fällt der unterkarbonische Kalk nach Norden ein und streicht nach N.O.; dann sieht man unmittelbar südlich davon noch einmal Granit; und die Lagerungsverhältnisse sind dort so beschaffen, daß man sie, die transgressive Lagerung des Kalks vorausgesetzt, nur durch das Vorhandensein von Brüchen, die in der Richtung des Gebirgsrandes verlaufen, erklären kann. Solche Brüche sind aber weiter östlich, im Innern und am Rande des Gebirges, wie wir wissen, in großer Deutlichkeit sichtbar.

Östlich von der Mündung des Bayum-kol-Tals besteht der Rand längs einer ungefähr 8 km langen Strecke aus unterkarbonischem Kalk, der 40—50° nach N.O. streicht und ein veränderliches Fallen zeigt, weil er schwach gefaltet worden ist. Ungefähr 4 km südwestlich von Staniza Narynkol tritt wieder Granit auf. An dieser Stelle kommt von Süden her ein kleines Quertal aus dem Gebirge, das die Kirgisen Ak-tasch nennen. Auf seiner linken (westlichen) Seite kann man die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks auf dem Granit ungefähr 3—4 km weit nach Süden in das Innere des Gebirges verfolgen. An dessem Rande gehen die Kalkbänke zur Tiefe (siehe die Skizze Fig. XXII), stehen erst steil, legen sich dann nach außen ein wenig flacher und versinken nach Norden unter dem Saum der alten Moränen. Gegen das Innere des Gebirges steigen sie nach Süden allmählich an und fallen nach N.W. ein. Zunächst ist hier hervorzuheben, daß der Kalk und der darunter liegende Granit nach Osten steil abbrechen. Der Kalk ist wenig disloziert worden und bildet sehr wahrscheinlich den östlichen Flügel einer nach N.O. streichenden Mulde. Die größere Höhe, in welcher der Granit auf der rechten Seite des Quertals liegt, zeigt nun sehr deutlich, daß der steile Abbruch auf der linken Seite durch einen ungefähr von Süden nach Norden verlaufenden großen Bruch verursacht worden ist. Dafür sprechen auch die Harnische, die man im Granit beobachtet.

Die transgressive Lagerung des Kalks ist nur eine kurze Strecke weit zu verfolgen, nämlich nur an der Stelle, wo der Granit fast die Höhe des Talbodens erreicht und die Kalkbänke zur Tiefe biegen. Unmittelbar über der Talsohle ist die Berührungsfläche durch Gehängeschutt verdeckt. Aber ungefähr 20—30 m darüber findet man im Kalk vereinzelte

[1]) Merzbacher, l. c., S. 8.

Bänke von brecciöser Beschaffenheit, die Bruchstücke von Quarz und Feldspat enthalten und dadurch zeigen, daß in der Tat transgressive Lagerung vorhanden ist. Weiter talaufwärts kann man den Granit nur mehr bis in die Nähe der Auflagerungsfläche verfolgen; die unmittelbare Grenze zwischen Granit und Kalk ist dort entweder unerreichbar oder durch Gehängeschutt verhüllt. Der Granit ist bis zu einer Tiefe von 20—30 m unter der Auflagerungsfläche stark verwittert, so daß er bei der Berührung mit dem Hammer zu feinem Grus zerfällt. Weiter talaufwärts, wo die Entfernung von der Auflagerungsfläche immer größer wird, ist das Gestein zwar auch zersetzt, jedoch nicht ganz so mürbe. Der transgressiv liegende Kalk ist hauptsächlich Crinoideenkalk in 0,5—2 m dicken Bänken und in einigen Lagen ein wenig dolomitisch; seine sichtbare Mächtigkeit mag hier 80—100 m betragen. Es ist jedoch sicher, daß sie im allgemeinen weit größer ist. An einigen Stellen ist der Kalk so zertrümmert, daß er unter dem Hammer in kleine eckige Stücke zerfällt.



Fig. XXII. Unterkarbonischer Kalk in transgressiver Lagerung auf Granit im Quertal Ak-tasch südöstlich von Narynkol, Blick nach S.W.
g Granit, c unterkarbonischer Kalk, m alte Moräne.

Wenn man sich nun, im Ak-tasch-Tal aufwärts steigend, nach Süden begibt, so findet man die folgenden Verhältnisse: Am Eingang des Tals und 3—4 km talaufwärts zeigt sich auf der linken Seite die Überlagerung des zersetzten Granits durch den unterkarbonischen Kalk, wie sie in der Skizze Fig. XXII dargestellt ist. Hat man den Hintergrund des kurzen Tals erreicht, so befindet man sich auf der Höhe der ersten Kette, ungefähr 800—900 m über dem Niveau des Bayum-kol-Flusses. Auf der südlichen Seite zieht ein Tal nach S.W. hinab; auf dem Kamme zwischen dem Ak-tasch-Tal und diesem Tal wird noch Granit und Kalk sichtbar, darunter die klippenartige Masse des Kalks, die auf der linken Seite der Skizze Fig. XXIII dargestellt ist. Wenig südlich davon steht aber nur Kalk an, und der Granit ist nicht mehr sichtbar. Verfolgt man die Lagerungsverhältnisse genauer, so zeigt es sich, daß der oberste Teil des nach S.W. verlaufenden Tals in den unterkarbonischen Kalk eingeschnitten ist, daß die Bänke dieses Kalks an manchen Stellen noch deutlich das nordöstliche Streichen bewahren, und an den meisten Stellen, wo sie aus den üppigen Matten hervortreten, bemerkt man, daß sie stark disloziert und daher sehr zerrüttet worden sind. Zum großen Teil liegen sie tiefer als die eben erwähnte klippenartige Masse, aber auch tiefer als der Granit, der auf der Höhe nördlich davon in großer Ausdehnung ansteht. Die Grenze zwischen dem Granit (siehe die Skizze Fig. XXIII) ist nun so scharf und verläuft auch in gerader, mit dem allgemeinen Streichen nicht übereinstimmender Linie von Westen nach Osten, daß kein Zweifel darüber bleibt, es handle sich hier in Wirklichkeit um eine Verschiebung des Kalks gegen den Granit. Es ist eine Bruchlinie vorhanden, die ungefähr von Westen nach Osten, also in

der Richtung des Gebirgsrandes verläuft und 2—3 km weit sichtbar bleibt. Wahrscheinlich reicht sie aber noch viel weiter und besitzt die Bedeutung einer Verwerfung von großem Ausmaß. Spuren davon sind auch noch weiter östlich auf der linken Seite des Naryn-kol-Tals sichtbar; allein es würde zu weit führen alle diese Verhältnisse hier eingehender zu beschreiben. Fassen wir sie also kurz zusammen, so kommen wir zu folgendem Ergebnis: Zwischen der Mündung des Bayum-kol-Tals im Westen und der des Naryn-kol-Tals im Osten besteht der Rand des Gebirges aus einer Kette, die sich 900 bis 1000 m über das Niveau des Bayum-kol-Flusses erhebt. Diese Kette, die auf ihrer nördlichen Seite gegen die ebene Steppe des Tekes-Beckens absinkt, hat ungefähr eine Länge von 9 bis 10 km und besteht aus unterkarbonischem Kalk und Granit. Der Kalk ist hauptsächlich im Westen sichtbar und bildet den Rand bis in die Nähe von Naryn-kol; er erscheint in Mulden und Sätteln, die nach N.O. streichen und am Rande des Tekes-Beckens scharf abschneiden. Wo der Granit zum ersten Male in größerer Ausdehnung sichtbar wird, im Ak-tasch-Tal, zeigt sich ein von Süden nach Norden gerichteter Bruch und im Inneren des Gebirges eine große Bruchlinie, die in der Richtung des Gebirgsrandes von Osten nach Westen verläuft. Östlich vom Ak-tasch-Tal steht in der Umgebung des Naryn-kol-Tals viel Granit an, der auch noch weiter östlich hauptsächlich den Rand des Gebirges bildet.

Als ein weiteres Beispiel für die tektonischen Verhältnisse und die Zusammensetzung des Gebirgsrandes kommt weiter im Osten die Umgebung der Mukur-Mutu-Täler in Betracht:



Fig. XXIII. Unterkarbonischer Kalk durch Bruch von Granit getrennt, zwischen unterem Bayum-kol-Tal und Naryn-kol-Tal, ungefähr 7 km von dem südlichen Rande der Tekes-Ebene entfernt. (Blick nach N.N.O.)
c Unterkarbonischer Kalk, b Bruch, g Granit.

Die Mukur-Mutu-Täler (siehe S. 95, 101, 106, 109) sind drei kurze Quertäler zwischen dem Kleinen und dem Großen Musart-Tal, die, dicht nebeneinander liegend, von Süden nach Norden verlaufen.[1]) Das mittlere etwa 5 km lange Tal mündet ungefähr 25 km östlich von Naryn-kol in die Tekes-Ebene. An seiner Mündung steht Gneis und Sericitschiefer, in seinem unteren Teile grünlicher Phyllit und im oberen Teile Granit an. Den Hintergrund des Tals bildet ein in unterkarbonischem Kalk eingetieftes Kar. Nur der untere Teil des Tals ist tief eingeschnitten, der obere Teil verflacht sich ganz allmählich und bildet zuletzt eine undeutliche Mulde. Der Granit ist sehr stark abgetragen worden und setzt zwischen den drei Tälern breite, kaum gewölbte Rücken zusammen, deren seichte

[1]) Merzbacher, l. c., S. 5 f.

Vertiefungen durch alte Moräne ausgefüllt worden sind. Zwischen dem Kar im Hintergrunde des mittleren Tals und der Mulde an dessen Ende liegt eine niedere Bodenschwelle, die sich mit auffallender Deutlichkeit weit nach Osten und Westen erstreckt. Diese Schwelle, die zumeist mit alter Moräne bedeckt ist, bezeichnet eine in geologischer Beziehung sehr deutliche Grenze. Es zeigen sich nämlich südlich davon weithin von Osten nach Westen verlaufende Schollen des unterkarbonischen Kalks, nördlich davon nur Granit. Die Schollen fallen flach nach Süden ein und brechen steil nach Norden ab. In dem steilen Abfall der nördlichen Seite liegen im Mukur-Mutu-Gebiet einige Kare nebeneinander. Das Kar im Hintergrund des mittleren Tals ist halbkreisförmig, hat einen Durchmesser von 100 bis 120 m Länge und sein Boden ist mit alter Moräne bedeckt. Auch ein Teil der Karwände ist durch Schutt verhüllt; an der westlichen Seitenwand jedoch ist das Gestein gut aufgeschlossen: hauptsächlich grauer Crinoideenkalk, der in der höheren Lage zahlreiche Schalenreste des Productus giganteus enthält. Die darunter liegenden Bänke bestehen aus hartem, dichtem Kalk, sind dünner als die Bänke des Crinoideenkalks und enthalten hauptsächlich verkieselte Korallen. Die flach nach Süden einfallenden Kalkbänke der Karwände werden von zahlreichen O.W. verlaufenden Klüften, welche senkrecht stehen, zerschnitten; sie brechen auch steil nach Süden ab.

Das wahre Streichen ist, soweit es unter diesen Verhältnissen und bei der flachen Lagerung der Kalkbänke sicher zu erkennen ist, im Allgemeinen wahrscheinllch nach N.O. gerichtet. Es ist aber sehr auffällig, daß die Kalkschollen, worin die Kare liegen, einen von Osten nach Westen und der oben erwähnten Bodenschwelle parallel verlaufenden Streifen bilden. Die genauere Untersuchung ergibt, daß der unterkarbonische Kalk nach Norden hin nicht auf dem nahe benachbarten Granit lagert, sondern, daß seine Bänke dagegen abstoßen, und daß in der Linie der Kalkschollen und der Bodenschwelle von Westen nach Osten, in derselben Richtung wie der Gebirgsrand zieht, große Verschiebungen verlaufen. Auch der steile Absturz der Kalkwände der südlichen Seite des Kars am Ende des mittleren Mukur-Mutu-Tals ist durch eine solche Verschiebung verursacht worden, und noch weiter südlich findet man die grabenartigen Versenkungen, die Merzbacher erwähnt,[1] und welchen das Hochtal Maral-tö folgt.

An dieser Stelle ist wegen der Verschiebungen die transgressive Lagerung des unterkarbonischen Kalks auf Granit nicht unmittelbar sichtbar. Unter den Kalkgeröllen, die man in der alten Moräne und im Schotter der Bäche findet, kommen ebensolche von rötlicher Färbung vor, die dunkle Glimmerblättchen und Bruchstücke von Quarz und Feldspat enthalten und dieselbe Beschaffenheit zeigen, wie der Kalk über dem Granit des Sartdschol-Passes (S. 110 und 113 f.).[2]

Die transgressive Lagerung ist daher auch hier vorhanden. Im Gebirge, das den Südrand des mittleren Tekes-Laufes bildet, sind also nahe an dessen Rande große von Westen

[1] l. c., S. 6.

[2] Hiezu möchte ich anfügen, daß ich in einem höheren Niveau, auf dem Plateau südlich vom Hintergrunde des mittleren und westlichen Tals diesen Kalk in einer mächtigen, nur mäßig steil gestellten, durch dünnplattige Schichtung ausgezeichneten Scholle, die nach Süden abbricht, anstehend gefunden habe. Etwas nördlich von dieser Stelle ist der Kalk in einer Senkung stark abgetragen und der Granit ragt in einzelnen schroffen Klippen daraus hervor. G. Merzbacher.

nach Osten verlaufende Störungen sichtbar. Einige davon treten sehr deutlich hervor und können auf beträchtliche Entfernung verfolgt werden, so die Verschiebungen zwischen dem Bayum-kol- und dem Naryn-kol-Tal und in der Umrandung der Mukur-Mutu-Täler. Man kann annehmen, daß sie in den dazwischen liegenden, weniger oder gar nicht bekannten Teilen des Gebirges ebenfalls vorhanden sind; dort, wo sie durch alte Moräne oder durch Vegetation verdeckt werden, läßt sich ihr Vorhandensein durch verschiedene Anzeichen erraten, wie z. B. durch die Harnische im Granit, durch die in der Richtung der Störungen verlaufenden Klüfte und die große, an manchen Stellen sichtbare Zertrümmerung des Kalks. Die Größe und Häufigkeit dieser Störungen führt aber zu dem berechtigten Schluß, daß auch der eigentliche Rand des Gebirges, wo der nach N.O. streichende karbonische Kalk unter spitzem Winkel plötzlich endigt, durch große Brüche gebildet worden ist, und daß auch die zahlreichen Schollen, die im Norden vor dem Rande aus den sehr jungen Bildungen hervortauchen, von der Masse des Gebirges abgetrennte Stücke sind. Schon die Tatsache, daß an der Basis einer dieser Schollen der alte Granit liegt, während am Gebirgsrand, dieser Scholle gegenüber nur der unterkarbonische Kalk sichtbar wird, spricht deutlich hiefür. Es ist jedoch fast unmöglich selbst bei genauerer Untersuchung wegen der mächtigen, verhüllenden Decke der weichen, jungen Bildungen, die Brüche selber zu erkennen. Aber alle die schon erwähnten Anzeichen, z. B. der steile, mauerartige Abbruch des Kalks bei der Station Utsch-Kapkak (S. 181), die große Zerrüttung des Kalks und seine veränderliche Lagerung an der Mündung des Bayum-kol-Tals (S. 182) zeigen, daß sie in Wirklichkeit vorhanden sind. Das Beispiel von der Mündung des Ak-tasch-Tals (S. 183) beweist, daß auch von Norden nach Süden verlaufende Brüche vorkommen. Andere Brüche liegen im Streichen, sind also wahre Längsbrüche, wieder andere sind mehr oder weniger steil dazu gerichtet und treten schräge zum Gebirgsrand aus der Masse des alten Rumpfes heraus; sie endigen an den bedeutenderen Brüchen, welche diesen Rand gebildet haben. Infolgedessen bleibt, obwohl an jenen Brüchen die verschiedenen Teile des Gebirges verschoben worden sind, dennoch der Rand des Gebirges auf einer 50 bis 60 km langen Strecke und auch noch weiter nach Osten über das Große Musart-Tal hinaus ziemlich gerade,[1]) und wo Unregelmäßigkeiten aufzutreten scheinen, ergeben sie sich meist durch das Vorhandensein der Schollen vor dem Rande.

Die Karte zu Merzbachers Bericht zeigt, obgleich sie nur eine vorläufige Darstellung ist, sehr deutlich, daß der gerade, von Osten nach Westen verlaufende Gebirgsrand auf der südlichen Seite der Tekes-Ebene am oberen Laufe des Tekes auf Erhebungen trifft, die nordöstliche Richtung haben und auf der Karte als Basch-oglù-tagh bezeichnet sind. Es sind dies Gebirgszüge, welche den zentralen Tian-Schan mit den Erhebungen des Temurlik-Tau verbinden. Die Poststraße nach Naryn-kol überschreitet sie östlich von Karkara. In der Nähe von Karkara bestehen sie aus altem Schiefer und unterkarbonischem Kalk, weiter östlich aus Dioritporphyr, hauptsächlich aber aus Quarzporphyr. Daß die Masse des Quarzporphyrs, die an der Zusammensetzung dieser Gebirgszüge beteiligt ist.

[1]) Diese auffällige Erscheinung, welche mich auf meinem Wege nach Osten zum Temurlik-Tau beschäftigte, die dort auch mit dem Auftreten von doleritischen und porphyritischen Gesteinen im Temurlik-Tau in Verbindung zu bringen ist, weist auf Brüche älterer und jüngerer Entstehung hin.

G. Merzbacher.

außerordentlich groß sein muß, geht schon aus der weiten Verbreitung der Porphyrgerölle in den jungen Bildungen des Tekes-Beckens hervor. Im Norden dieses Beckens bestehen die zum Teil mächtigen Geröllager dieser Bildungen an den südlichen Gehängen des Dschitürdschal- und des Naryn-Tau fast ganz aus Porphyrgeröllen. Der Quarzporphyr ist jünger als der unterkarbonische Kalk, also jünger als die alten Sedimente und granitischen Gesteine des nördlichen zentralen Tian-Schan; seine Intrusion und Effussion fällt daher auch in eine Phase der gebirgsbildenden Bewegungen, die jünger ist als die Dislokationen, die der unterkarbonischen Transgression vorangegangen waren, vielleicht in die Phase der intrakarbonischen, wahrscheinlicher aber erst in die der postkarbonischen Bewegungen.

Die Spuren der Störungen, die den südlichen Rand der Tekes-Ebene begleiten, sind auch westlich vom Basch-oglù-tagh am südlichen Rande des Karkara-Beckens deutlich sichtbar. Man erkennt sie dort namentlich an der Lagerung der Schollen des unterkarbonischen Kalks, welche schon bei Besprechung der geologischen Verhältnisse des Sart-dschol-Passes erwähnt wurde. Die Brüche, die dort den unterkarbonischen Kalk in Schollen zerschnitten haben, sind wegen der starken Verhüllung durch die roten pliozänen Mergel und mürben Sandsteine nicht sichtbar. Man sieht aber die nach Süden einfallenden Kalkbänke und die nach Norden gekehrten steilen Abfälle der Schollen. Auf der südlichen Seite des Sart-dschol-Passes treten dagegen Brüche, die dem Streichen des unterkarbonischen Kalks folgen oder spitzwinklig dazu verlaufen, deutlich hervor.

Wenn nun auch ein Teil der Höhenunterschiede zwischen dem unterkarbonischen Kalk und dem darunter liegenden Granit durch ingressive Lagerung zu erklären ist, so können dagegen die Unterschiede in der Höhenlage der verschiedenen Kalkschollen nur durch Verschiebungen entstanden sein. Schon während des Abstiegs von der Höhe des Sart-dschol-Passes zum Kok-dschar-Tal (siehe Fig. VII S. 114) trifft man die Schollen in verschiedener Höhe. Ich erinnere hier an die Schichtung in der Nähe der Paßhöhe und an die zerstreut umherliegenden Blöcke des unterkarbonischen Kalks, dann an die Schollen, die weiter gegen das Kok-dschar-Tal abwärts in so ausgezeichneter Weise die transgressive Lagerung zeigen. Die scharfe, noch tiefer am Gehänge sichtbare flexurartige Beugung des Kalks und des roten Sandsteins gegen die Tiefe des Kok-dschar-Tals und die dichte Decke von Schutt und Vegetation verhindern es, die tektonischen Verhältnisse in der unteren Hälfte des Paßabstiegs genauer zu erkennen.

Weiter östlich nimmt der Kalk an Mächtigkeit zu, und der nördliche, liegende Schenkel der Flexur steigt in der Richtung des Streichens nach O.N.O. allmählich an. Der Verlauf der Flexur ist jedoch nicht beständig und ihre Beugung nicht gleichmäßig. Es treten verschiedene Komplikationen in ihrem Bau auf, zum Teil dadurch, daß die flexurartig gebogenen Sedimente an verschiedenen Stellen von Brüchen sowohl im Sinne des Streichens als auch quer dazu, durchschnitten und die verschiedenen Teile gegeneinander verschoben worden sind. Wie die tektonischen Verhältnisse nun aber auch im Einzelnen beschaffen sein mögen, so ist doch das Vorkommen von Brüchen auf der rechten Seite des Kok-dschar-Tals unzweifelhaft. Ein Teil dieser Brüche mag im Granit verlaufen und daher nicht sichtbar sein, ein Teil hat aber auch die Sedimente betroffen und hauptsächlich die eigentümlichen Lagerungsverhältnisse des unterkarbonischen Kalks und der darüber folgenden bunten jüngeren Bildungen geschaffen. Zu erwähnen ist noch, daß sehr große nach O.N.O. streichende Brüche wahrscheinlich auch nordöstlich von Karkara vorhanden sind. Das

Becken von Karkara verlängert sich nach Osten in eine mit Weidegründe bedeckte Hochfläche, die lang aber verhältnismäßig schmal ist und zwischen O.N.O. streichenden Gebirgszügen liegt. Die Abhänge dieser Gebirgszüge begrenzen die Hochfläche als lange, gerade Mauern (S. 108, 122 f. und 181) und ich nehme an, daß es sich hier um Grabenbrüche handelt.

In den östlichen Ausläufern des Kungeu-Ala-Tau, östlich und westlich vom Santasch-Paß und am nördlichen Rande des Terskei-Ala-Tau, südlich und nicht weit westlich von diesem Paß, trifft man auf Porphyr. Genau in der Fortsetzung dieses Randes in der Streichrichtung nach W.S.W. kommt man, wie mehrfach hervorgehoben, an den Mündungen des Dschütü-oguss- und des Souka-Tals in die Zone der roten Konglomerate des Issyk-kul. Die Gerölle dieses Konglomerats bestehen zum großen Teil aus Porphyr. Noch weiter westlich hat Friederichsen[1]) in der geraden Fortsetzung dieser Linie Quarzporphyr am Ausgang des Tosor-Tals gefunden.

Es ist bemerkenswert, daß eine große Masse von Quarzporphyr, fast überall wo Sedimente vorhanden sind in Verbindung mit unterkarbonischem Kalk, von den Bergzügen des Temurlik-Tau im N.O. bis zu der Mitte des südlichen Ufers des Issyk-kul reicht (siehe Bemerkung S. 186). Die östlichen Ausläufer des Kungeu-Ala-Tau in der Umgebung von Preobraschensk bestehen zum großen Teil daraus (S. 100) und wahrscheinlich ist dies auch dort der Fall, wo sich Kungeu-Ala-Tau und Terskei-Ala-Tau in der Nähe des Santasch-Passes fast berühren (S. 108 und 186). Das ist ungefähr die Stelle, wo die alten granitischen Gesteine zurücktreten und die Sedimente, hauptsächlich unterkarbonischer Kalk, in größerer Ausdehnung anstehen. Da der Quarzporphyr jünger ist als der unterkarbonische Kalk und dieser transgredierend auf den alten granitischen Gesteinen und den schon vor der Transgression dislozierten alten Sedimenten liegt, so ist er kein Glied des sehr alten Gebirges. So kommen wir zu dem Schlusse, die langgestreckten Gebirgszüge, die den nördlichen Teil der östlichen Ausläufer des Terskei-Ala-Tau genau in der Fortsetzung des Streichens mit den Gebirgszügen des Temurlik-Tau verbinden, als ein bis zu einem gewissen Grade selbständiges Stück des Gebirges anzusehen, das jünger ist als der größte Teil der äußeren Gebirgszüge des nördlichen zentralen Tian-Schan. Die Brüche, die den südlichen Rand der Tekes-Ebene begleiten, reichen bis in das Gebiet dieses jüngeren Gebirgsstücks. Wahrscheinlich gehören die Grabenbrüche nordöstlich von Karkara dazu; sie werden wieder am südlichen Rande des Beckens von Karkara sichtbar, wiederholen sich südlich davon im Kok-dschar-Tal und dürften auch weiter im Westen vorhanden sein. Es ist natürlich äußerst schwierig diese Brüche auch in den granitischen Gesteinen auf der südlichen Seite des Issyk-kul zu verfolgen; aber einige Anzeichen weisen doch darauf hin, daß sie dort vorhanden sind. Hiezu gehören die heißen Quellen am nördlichen Rande des Terskei-Ala-Tau, von denen ich nur die des Aksu-Tals bei Prschewalsk erwähne, die aber auch an anderen Stellen auftreten,[2]) dann die Erzgänge, die im Gebirge südlich von Prschewalsk vorkommen und auch die Formen, worauf sich Davis stützt. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß sich westlich vom Souka-Paß die Erscheinungen wiederholen, die wir am südlichen Rande der Tekes-Ebene kennen gelernt haben.

---

[1]) l. c., S. 53. [2]) Friederichsen, l. c., S. 61 und 65. Merzbacher, l. c., S. 31.

Hält man sich die mehrfach festgestellten Tatsachen vor Augen, daß die den eigentlichen Gobi-Sedimenten im nördlichen zentralen Tian-Schan diskordant überlagernden jüngeren Bildungen nur schwache Dislokationen erfuhren, die in keinem Zusammenhang mit den oben erwähnten großen Bruchlinien stehen, daß dagegen die ihre Unterlage bildenden älteren grobklastischen Ablagerungen sehr stark disloziert wurden und daß beispielsweise im mittleren Kaündü-Tal die Gobi-Sedimente ebenfalls von den großen Brüchen getroffen wurden, sowie daß im Mittel- und Oberlaufe des größten Längstales, des Inyltschek-Tals, das wir als südliche Begrenzung für den nördlichen zentralen Tian-Schan angenommen haben, große Brüche den Lauf der Talachse begleiten, so ergibt sich die große Bedeutung, welche diese Brüche für die heutige Gestalt des Gebirges haben. Besonders der nördliche Gebirgsrand ist durch weitgedehnte Brüche, deren Verlauf teilweise ein ziemlich regelmäßiger ist, begrenzt worden. Auf der Südseite der Tekes-Ebene, am Südende des Karkara-Beckens und, soweit dies festzustellen bisher möglich war, auch auf der Südseite des Issyk-kul, schneiden die Brüche die O.N.O. streichenden Sedimente unter spitzem Winkel und die aus dem Innern des Gebirges hervortretenden Störungen endigen daran. An anderen Stellen, wie z. B. an einigen Orten zwischen dem Tekes- und Karkara-Becken, scheinen letztere vorzuherrschen und die langen und schmalen, hier gelegenen Gebirgszüge, welche die wahre Fortsetzung des Terskei-Ala-Tau nach O.N.O. sind, haben langgestreckte im Streichen verlaufende Störungen, welche die Merkmale der Grabenbrüche erkennen lassen.

Dieser Teil des nördlichen zentralen Tian-Schan ist aber noch sehr wenig erforscht worden, und der Verlauf der Brüche ist im Einzelnen noch fast unbekannt.

Wie dem nun aber auch sein mag, so genügen doch die bisher über die tektonischen Verhältnisse in den benachbarten Teilen des Gebirges gemachten Beobachtungen, um erkennen zu lassen, daß der Verlauf der nördlichen Abdachung des Gebirges auf der südlichen Seite der Tekes-Ebene und sehr wahrscheinlich auch auf der südlichen und südwestlichen Seite des Issyk-kul von dem Verlauf der Brüche abhängig ist. Damit haben wir auch die Erklärung für die Entstehung und die Lage der großen Quertäler und für das Verschwinden der Denudationsflächen in dem Bereiche dieser Täler.

Indem wir also die Beobachtungen über die Zusammensetzung und den Bau des nördlichen zentralen Tian-Schan in geeigneter Weise mit den Beobachtungen über die morphologischen Verhältnisse verbinden, kommen wir zu folgenden Schlüssen:

Der transgressiv liegende unterkarbonische Kalk ist disloziert worden, ehe die Denudationsflächen gebildet worden sind. Die Denudationsflächen, als ganz bestimmt begrenzte Teile einer großen Destruktionsfläche, sind älter als die großen Brüche, von denen sie an manchen Stellen durchschnitten werden. Die Brüche haben an den Rändern des Gebirges die für die Entstehung der großen Quertäler erforderlichen Gefällsverhältnisse geschaffen. Die Quertäler sind also zum großen Teil jünger als die Brüche.

Wir erkennen solcherweise wenigstens in den Umrissen die mannigfaltigen Vorgänge, durch die der Bau des nördlichen zentralen Tian-Schan so kompliziert geworden ist. Es sind, kurz wiederholt, die folgenden: das alte präkarbonische Gebirge, zusammengesetzt aus mächtigen granitischen Massiven, aus Phyllit, Tonschiefer, verändertem Kalk und Dolomit, ist abgetragen worden, zum Teil durch Abrasion. Es folgten die unterkarbonische Trans-

gression, dann die intra- und postkarbonischen Bewegungen. Die Spuren dieser beiden Phasen der gebirgsbildenden Bewegungen, die verbunden gewesen sind mit der Bildung mächtiger Massen von granitischen Gesteinen in den inneren Ketten und von Porphyr in den nördlichsten Teilen, können aber nicht sicher unterschieden werden. Das so entstandene Gebirge ist von Neuem während einer langen Zeit kontinentaler Verhältnisse ausschließlich durch Denudation bis zu einer ausgedehnten Destruktionsfläche abgetragen worden. Die Entstehung dieser Fläche fällt in die Zeit, in welcher in anderen Teilen des Gebirges die jüngeren Bildungen der mesozoischen Angara-Schichten abgelagert worden sind. Die so entstandene Destruktionsfläche ist während der tertiären Phase der gebirgsbildenden Bewegungen durch große Verschiebungen zerstückelt worden. Die heute noch sichtbaren Reste dieser Destruktionsfläche haben ihre hohe Lage durch diese Verschiebungen erhalten, wobei es aber unentschieden bleiben mag, ob dies durch Hebung der Masse des Gebirges oder durch Senkung seiner Umgebung geschehen ist.

Tangential gerichtete Bewegungen sind während der ersten Phase und sehr wahrscheinlich auch während der intra- und postkarbonischen Phasen erfolgt; der unterkarbonische Kalk der inneren Ketten ist sicher an einigen Stellen gefaltet worden, wobei es aber unentschieden bleiben muß, wie weit daran die Intrusion der granitischen Gesteine beteiligt gewesen ist. Die Bewegungen der tertiären Phase haben sich dagegen fast nur in radialer Richtung geäußert; sie haben das abgetragene Gebirge als eine starre Masse getroffen.

Aus diesem Grunde ist auch der Verlauf des nördlichen Randes des zentralen Tian-Schan in hohem Maße unabhängig von der Streichrichtung der Sedimente und der Längsrichtung der granitischen Massen. Der Terskei-Ala-Tau ist in seinem westlichen und mittleren Teil nur in orographischer Beziehung ein selbständiger Gebirgsbogen, in geologischer Beziehung besteht er aus verschiedenen Teilen, die nach Südwest weit in das Innere des Gebirges reichen; er zeigt fast überall die Merkmale des Horstes. Der Hypothese über das Vorhandensein eines großen selbständigen Bogens, den Muschketow[1]) für diesen Teil des Tian-Schan angenommen hat, kann also meines Erachtens, nicht beigepflichtet werden.

[1]) Muschketow, J. W. Turkestan, I. St. Petersburg 1886, russ., S. 32 f.

Bemerkungen zur Karte.

Die geologische Übersichtskarte zu dieser Arbeit habe ich hauptsächlich zu dem Zweck entworfen, dem Leser die Erkennung und Verfolgung der in geologischer Beziehung verschiedenen Teile des nördlichen zentralen Tian-Schan zu erleichtern. Nur das Mittelstück des Gebietes ist indes dargestellt worden. Die westlichen Teile, wie den Kamm des Terskei-Ala-Tau zwischen dem Souka-Paß und dem Turgen-Aksu-Tal, die Umgebung des mittleren und oberen Kulu-Tals, ferner auch die östlichen Teile, wie die Fortsetzung der zentralen Kette gegen den Musart-Paß und die Umgebungen des Kleinen und des Großen Musart-Tals, habe ich nicht mehr eingetragen. Diese Gebiete sind einesteils in geologischer Beziehung noch nicht genügend erforscht, und andernteils habe ich sie selbst teils nur sehr flüchtig, teils gar nicht gesehen, sodaß ich es nicht wagte, das Kartenbild auf diese Gegenden auszudehnen. Auch ohnedem trägt auf dieser Karte leider noch vieles den Stempel des Kompromisses. Dies trifft in erster Linie für die Signaturen zu, die nur zu sehr die Unsicherheit ausdrücken, welche das bisherige Wissen über die stratigraphischen Verhältnisse der alten Sedimente kennzeichnet. Es wäre zur Erkennung dieser Verhältnisse und für die der Verbreitung der verschiedenen paläozoischen Bildungen vielleicht zweckmäßiger gewesen, die Zahl der dafür in Frage kommenden Signaturen einzuschränken. Ich habe es aber, wie die Verhältnisse einmal liegen, vorgezogen, dies nicht zu tun, dafür aber den Verlauf der verschiedenen Stücke des Gebirges und ihre Bedeutung durch besondere Signaturen recht deutlich zu machen versucht. Infolgedessen sind etwas verschiedenartige Sedimente durch die gleiche Signatur bezeichnet worden und dieselbe Bildungsserie hat verschiedene Signaturen erhalten. Die Signatur für die Schiefer der äußeren Gebirgszüge umfaßt z. B. einen großen Teil der Bildungen, die wir bei der Besprechung der Phyllit- und Tonschiefergruppe unterschieden haben. Hier kam es mir, abgesehen davon, daß es bei der Unzulänglichkeit der vorhandenen Beobachtungen heute noch nicht möglich ist, die Verbreitung dieser verschiedenen Bildungen in den äußeren Gebirgszügen zu übersehen, namentlich darauf an, die Beteiligung der hauptsächlichen Gruppen der Gesteine: nämlich der granitischen Gesteine, der Schiefer im Ganzen und des unterkarbonischen Kalks recht deutlich auszudrücken. Andererseits ist es, um den entgegengesetzten Fall anzuführen, nicht zweifelhaft, daß die Zone der Phyllite und Tonschiefer am nördlichen Fuße der zentralen Kette und die Zone der injizierten Schiefer nördlich davon zum großen Teil aus denselben Sedimenten bestehen. Hier drücken die verschiedenen Signaturen nur den verschiedenen aber bezeichnenden Grad der Veränderung aus.

Für das Gebirge südlich vom Inyltschek-Tal und die Kette des Khan-Tengri habe ich notgedrungen eine zusammenfassende Signatur wählen müssen, denn einmal fallen dort die Schichten nach Süden ein und überdecken sich deshalb, und dann kenne ich das Gebirge dort zu wenig und kann daher die Verbreitung der verschiedenen Bildungen nicht mit der auch für eine Übersichtskarte wünschenswerten Genauigkeit angeben. Über die Zusammensetzung dieses Gebirgsteils läßt sich im Allgemeinen heute nur sagen, daß hauptsächlich die Gesteine der Schieferzone des Bayum-kol-Tals dort vorkommen. Unterkarbonischer Kalk ist, wie das Vorkommen von Productus giganteus sogar im oberen Teile des Inyltschek-Gletschers beweist, sicher auch dort vorhanden. Vielleicht besteht sogar der Gipfel des Khan-Tengri selbst, aus einem umgewandelten Kalk dieser Stufe; da aber in dem

stark verändertem Kalk erkennbare Fossilien nicht gefunden wurden, läßt sich ganz Sicheres hierüber nicht sagen.

Was die granitischen Gesteine anbetrifft, so habe ich vier Signaturen benutzt. Zwei für die präkarbonischen Granite der äußeren Gebirgszüge und zwei für die granitischen Gesteine der inneren Ketten. Hier ist zu bemerken, daß vielleicht die granitischen Gesteine des Sary-dschass-Tau dasselbe Alter haben wie die des Bayum-kol- und Semonow-Massivs. Beweisen läßt sich das heute noch nicht, da das verbindende Stück an der Endzunge des Muschketow-Gletschers noch zu wenig bekannt ist. Ich habe es daher vorgezogen, die Granite dieser beiden Gebiete durch verschiedene Signaturen zu bezeichnen. Wahrscheinlich sind auch alte Granite vorhanden, die denen der äußeren Gebirgszüge entsprechen. Auch ein Irrtum wäre zu berichtigen: das kleine Granitmassiv des mittleren Bayum-kol-Tals gehört, soweit sich dies durch die petrographische Untersuchung hat feststellen lassen, zum präkarbonischen Granit der äußeren Gebirgszüge und nicht zum Granit der inneren Ketten.

Als topographische Unterlage habe ich die Karten von Merzbacher und Friederichsen benutzt, dabei aber die eigenen Aufnahmen verwertet. Für die Einzeichnung des Bayum-kol-Tals hat mir die Aufnahme, die Herr Ingenieur Hans Pfann im Jahre 1902 ausgeführt hat, gute Dienste geleistet; das Ottuk-Tal und das Turgen-Aksu-Tal, das ich selber nicht aufgenommen habe, habe ich aus Friederichsens Karte entnommen.

II. Die Gesteine des Profils durch das Bayum-kol-Tal im nördlichen Teil des zentralen Tian-Schan

von

P. **Steph. Richarz,** S. V. D.

Herr Dr. Merzbacher hatte die große Freundlichkeit mir einen Teil seines im zentralen Tian-Schan gesammelten Gesteinsmaterials zur Untersuchung zu überlassen, und zwar speziell die Gesteine aus dem oberen und mittleren Bayum-kol-Tal. Die Untersuchung führte ich aus im petrographischen Seminar der Universität in München unter Anleitung des Herrn Professors Dr. E. Weinschenk. Zunächst liegt mir nun die angenehme Pflicht ob, Herrn Dr. Merzbacher für die gütige Übergabe des ausgezeichneten Untersuchungsmaterials, sowie Herrn Professor Weinschenk für die freundliche, meiner Arbeit durch seine reiche Erfahrung auf petrographischem Gebiete gewährte Unterstützung, bestens zu danken.

Auch Herrn Dr. Keidel, dem Geologen der Merzbacher'schen Expedition, spreche ich hiermit meinen tiefgefühlten Dank aus. Er hat mir in uneigennützigster Weise sein ganzes Beobachtungsmaterial zur Verfügung gestellt und war so liebenswürdig, mir auf meine Anfragen jede nur erwünschte Auskunft bereitwillig zu erteilen.

Dr. Keidel zerlegt in seiner Arbeit (S. 90—192) unser Profil in fünf Teile:

1. Die Kette des Khan-Tengri,
2. Die zentrale Kette,
3. Das Granitmassiv im oberen Teile des Bayum-kol-Tales,
4. Die Schieferzone des Bayum-kol-Tales,
5. Das Granitmassiv in der nördlichen Hälfte des mittleren Talabschnittes.

Vom ersten Teile lagen keine Gesteine vor; den zweiten behandelt man am passendsten an letzter Stelle. Und somit beginnt die Beschreibung der Gesteine mit dem dritten Teile.

A. Das Granitmassiv im oberen Bayum-kol-Tal.

Dieses große Granitmassiv nimmt fast den ganzen oberen Teil des Bayum-kol-Tales bis zur Gletscherzunge ein. Es besteht der Hauptsache nach aus einem Granit von gewöhnlich mittlerem Korn. Der Habitus ist der eines echten Granites, nähert sich aber stellenweise dem eines Quarzdiorites oder Tonalites. Feinkörnig wird er gewöhnlich in den Apophysen, welche ins Nebengestein eindringen, porphyrisch an beiden Rändern.

Letztere Verhältnisse beschreibt Dr. Keidel auf folgende Weise: „Dicht am Ende der Gletscherzunge sieht man, daß der Glimmerschiefer, von der rechten Talseite herüberstreichend, an einer Stelle neben dem Eis zutage kommt und auf die linke Seite hinübergeht, gerade im Streichen nach W.S.W. Es folgt nun nach N. die Grenze des Granitmassivs in der hier angeführten Ordnung: Zuerst sieht man stark zersetztes, schieferiges Gestein und darin große rote Feldspatkristalle, die stark zerdrückt und an den Enden linsenförmig ausgezogen sind. Eine kurze Strecke weiter nördlich ist der Granit nicht so zersetzt; hier ist der Glimmer lagenweise angeordnet und dazwischen sieht man mit bloßem Auge nur Quarz und Feldspat. Die großen rötlichen Feldspäte sind auch hier noch ausgezogen, einige Kristalle sind Karlsbader Zwillinge. Einige Meter weiter talabwärts verliert der Granit die Lagenstruktur, das Gestein wird frischer und die Feldspatkristalle sind sehr groß, ich habe solche gesehen von 12—18 cm^2 Fläche im Bruch. Aber auch hier sieht man am Quarz noch Spuren des Gebirgsdruckes oder der Protoklase. Nach Norden nehmen die großen Kristalle allmählich an Zahl ab und das Gestein hat mittleres Korn; 2 km nördlich von der Gletscherzunge ist es ganz frisch."

Ein Handstück von dieser linken Talseite lag nicht vor, von der rechten Seite aber wurden mehrere vom südlichen Rande stammende porphyrische Granite untersucht. Nur eines von ihnen zeigte geringe undulöse Auslöschung des Quarzes, Serizitisierung des Plagioklases und Chloritisierung des Glimmers. Roter Feldspat findet sich am Südrande nur auf der linken Talseite.

Weiter berichtet Herr Dr. Keidel: „$2^1/_2$ km vom Gletscherende entfernt sieht man zum ersten Male große Hornblendesäulen, welche von nun an immer mehr zunehmen, bis mit der Annäherung an den nördlichen Rand des Massivs wiederum eine Abnahme der Hornblende und, wie es scheint, auch des Glimmers eintritt. Das Gestein wird gleichmäßig hellgrau und sehr große weiße Feldspäte werden häufig, solche von 10—12 cm Länge sind nicht selten. Dicht an der Grenze gegen die Schiefer zeigt der Granit wieder Lagenstruktur und die Feldspäte sind wie am südlichen Rande ausgezogen (Augengneisstruktur); dicht am Kontakt ist das Gestein dunkel und sehr feinkörnig, was wahrscheinlich durch endogene Kontaktmetamorphose zu erklären ist."

„Pegmatitische und aplitische Ausbildungen finden sich häufig im Nebengestein. Besonders zahlreich sind die Aplitgänge in der südlichen Umrandung des Massivs im oberen Bayum-kol-Tale, sowohl in der Nähe der Grenze als auch weiter südlich im Gneis und in den Kalken unter dem Eise des westlichen Bayum-kol-Gletschers, auch auf der rechten Seite des östlichen Gletschers. Sie haben oft nur geringe Mächtigkeit, einige habe ich beobachtet, die eine Hand breit waren oder darüber. Sie folgen den Schichtfugen oder durchsetzen die Schichten. In der Furche des westlichen Bayum-kol-Gletschers sind sie

in den wenigen Aufschlüssen zwischen den Moränen so zahlreich, daß sie das Gestein durchschwärmen."

„Lamprophyre habe ich nur im Intrusivgestein selbst beobachtet, und zwar besonders häufig dort, wo auch schon im Granit die Hornblende stark hervortritt, d. i. ungefähr in der Mitte der nördlichen Hälfte des Massivs; sie spielen, was ihre Häufigkeit anbetrifft, dieselbe Rolle wie die häufigen basischen Ausscheidungen des Adamello-Tonalites, wovon schon v. Rath berichtet hat. Sie treten aber in allen Fällen, wo ich sie beobachten konnte, nicht als Gänge, sondern nur als lokale Ausscheidung des dazu gehörenden Gesteins auf und bilden Nester von den verschiedensten Größen, deren Grenze gegen das umgebende Gestein stets äußerst scharf ist. Es sind dies Schlieren, oft lang gestreckt und dann schmal endigend, oft aber kurz und dann von rundem Umriß. Zuweilen sind sie einen Meter und mehr mächtig (auf der rechten Talseite wurden zwei von bedeutender Mächtigkeit beobachtet, siehe Profil 1), oft aber nur handbreit."

Für die petrographische Auffassung geht aus all diesem das Gesetz hervor, nach welchem das Granitmassiv aufgebaut ist: die basischsten Bildungen befinden sich in der Mitte. Nach beiden Rändern hin wird das Gestein immer saurer, der Orthoklas tritt immer mehr in großen Einsprenglingen in den Vordergrund, bis endlich im Nebengestein aplitische Gesteine allein herrschen.

Nach diesen Vorbemerkungen möge die genauere Beschreibung der einzelnen Teile folgen.

Der Granit.

Der Granit ist in den meisten Fällen richtungslos körnig. Schieferige Struktur zeigt sich bei den vorliegenden Handstücken einigemale in den porphyrischen Ausbildungen, welche sich dadurch einem Augengneis nähern. Besonders deutlich ist die Schieferstruktur am südlichen Rand des Massivs, worauf später noch zurückzukommen ist.

Makroskopisch erkennt man im Granit neben weißem Feldspat und weißem Quarz, immer schwarzbraunen Biotit und fast immer grüne Hornblende. Es liegt also ein Amphibolbiotitgranit vor, welcher in einigen Fällen in einen Biotitgranit übergeht.

Die mikroskopische Untersuchung ergab eine Fülle von Mineralien, deren Beschreibung nicht ohne Interesse ist. Der Orthoklas zeigt meist große Individuen, häufig in Karlsbader Zwillingen. Er ist gewöhnlich frisch und perthitisch verwachsen mit Plagioklas. Mikroklin findet sich besonders in den porphyrischen Ausbildungen als Einsprengling. Der Plagioklas ist meistens Oligoklas-Andesin, wie die Bestimmung nach der Fouqué'schen Methode und nach der Höhe der Lichtbrechung ergab. Nur selten geht er bis zum Oligoklas. Das Mineral ist vollkommen frisch und wasserklar mit gut ausgebildeten Zwillingslamellen nach Albit- und Periklingesetz. Dazu kommt manchmal noch das Karlsbadergesetz. Fast in jedem Schliff finden sich Verwachsungen von Quarz mit Plagioklas (Quartz vermiculé), genau in derselben Ausbildung, wie sie Weinschenk (Gesteinsbildende Mineralien S. 75) abbildet. Serizitisierung ist selten. Wenn sie auftritt, so geht mit ihr parallel die Chloritisierung des Glimmers und die beginnende Zertrümmerung des Quarzes. Besonders tritt diese Erscheinung hervor an einem porphyrisch ausgebildeten Handstück vom Südrande des Massivs und an einem anderen aus der Mitte desselben.

Der Quarz bildet, wenn er nicht mit Plagioklas in der beschriebenen Weise verwachsen ist, meistens die letzte Ausfüllung. Nicht selten aber zeigt er auch Andeutung von Kristallform. Kataklastische Erscheinungen sind äußerst selten und, wenn vorhanden, nur durch schwach undulöse Auslöschung angedeutet. Flüssigkeits- und Gaseinschlüsse durchziehen den Quarz oft in Schnüren.

Gemeine grüne Hornblende meistens in zerfetzten Lappen, selten mit seitlicher Begrenzung, fehlt fast nie, wenn sie auch, wie schon hervorgehoben, in der Mitte des Massivs besonders hervortritt, sodaß sie dort auch der makroskopischen Beobachtung nicht entgehen kann, wie aus der Beschreibung Dr. Keidels hervorgeht. Der Biotit tiefbraun in ganz normaler Ausbildung, ist vielfach in die Hornblende eingeschlossen. Er zeigt gute seitliche Begrenzung, aber keine Endflächen.

Epidot kommt sowohl in größeren, oft gut ausgebildeten Kristallen, als auch in Form von Mikrolithen und in formlosen Fetzen vor. Man kann ihn in allen wesentlichen Gemengteilen, sowohl im Feldspat als im Quarz, ebenso in der Hornblende wie im Biotit, finden und immer ist das Mineral, indem er eingeschlossen ist, vollständig frisch und zeigt keine Spur von Umwandlung. Er ist also unzweifelhaft primärer Bestandteil und vor den wesentlichen Gemengteilen auskristallisiert. Seine Menge ist sehr wechselnd. Niemals aber fehlt er ganz. Bemerkenswert ist seine gelbe Farbe und der schwache Pleochroismus.

Mit Epidot verwachsen oder selbständig auftretend ist ferner Orthit ein verhältnismäßig häufiger Bestandteil dieses Granites, wie dies ja gewöhnlich ist. Es ist kaum ein Schliff vorhanden, in dem er nicht zu finden wäre. Er ist braun, deutlich pleochroitisch und zeigt pleochroitische Höfe in Biotit und Hornblende. Seine schwache Doppelbrechung und seine schiefe Auslöschung (30—35°), wodurch auch die Zwillingsbildung deutlich hervortritt, machen die Bestimmung sicher. Sind Epidot und Orthit verwachsen, so bildet ersterer wie immer den Rand um letzteren.

Sehr oft ist der Orthit zersetzt und zwar so, daß er aus drei verschieden gefärbten, verschieden pleochritischen und verschieden doppelbrechenden Teilen besteht. Der Rand ist dunkelgelb und zeigt die stärkste Doppelbrechung (zwischen 0,010 und 0,015) und den stärksten Pleochroismus; dann folgt eine Zone von hellgelber Farbe mit schwächerem Pleochroismus und einer Doppelbrechung von etwa 0,005; den Kern bildet endlich eine graulich-gelb gefärbte Masse, welche fast isotrop ist. Die einzelnen Zonen sind zwar scharf, aber in unregelmäßig gewundenen Linien gegeneinander abgegrenzt (Fig. 1 der Tafel V). Außerdem findet sich in jedem Schliff und oft in großer Menge Titanit Nicht selten zeigt dieser die typisch rhombischen Querschnitte und ist in allen anderen Bestandteilen eingewachsen. Der Pleochroismus ist deutlich; oft beobachtet man Zwillinge und selbst Zwillingslamellierung, sodaß man das Mineral im polarisierten Licht leicht mit Calcit verwechseln könnte, wogegen aber die hohe Lichtbrechung und die starke Dispersion der Achsen sprechen.

In einem Granit aus der Mitte des Massivs wurde ein Mineral gefunden, welches in Graniten weniger weit verbreitet ist, nämlich Prehnit. Er tritt, meist im Biotit in größeren Individuen eingewachsen, in zweifacher Ausbildung auf: 1. Faserig, mit starker Licht- und Doppelbrechung und normalen Interferenzfarben. Charakter der Hauptzone positiv. 2. Schuppig, mit schwacher Doppelbrechung und starker Dispersion und infolge-

dessen mit anormalen Interferenzfarben. Die positive Bisektrix halbiert einen kleinen Achsenwinkel.

Apatit kommt nicht nur in feinen Nadeln, sondern auch in großen Kristallen vor. Seine Menge ist ganz beträchtlich. Endlich treten nicht allzu häufig Zirkon, mit pleochroitischen Höfen in Hornblende und Biotit, Titaneisen und Eisenglanz als normale Gesteinsgemengteile auf, während der Pyrit durch die Art seines Vorkommens in Rissen und an der Grenze zweier Mineralien beweist, daß er eine sekundäre Bildung ist. Er hat öfters einen braunen Rostrand.

Die Struktur des Gesteins ist, wie schon bei Beschreibung des Quarzes angeführt wurde, meist echt granitisch, es bildet also der Quarz die letzte Ausfüllungsmasse. Manchmal aber tritt auch das Gegenteil ein: der Quarz zeigt mehr oder weniger vollkommene Kristallform und die Struktur nähert sich damit der granulitischen.

Es kommt vor, daß der Orthoklas, welcher an Menge im allgemeinen etwas hinter dem Plagioklas zurückbleibt, ganz fehlt. Es wird dann auch der Plagioklas basischer, etwa Andesin und zeigt Zonarstruktur. Es ist somit aus dem Granit ein Quarzdiorit geworden. Die übrigen Mineralien zeigen aber keinen Unterschied gegenüber denen des Granites. Ein solcher Quarzdiorit stammt aus der Mitte des Massivs.

Lamprophyre.

Wie schon erwähnt sind basische Ausbildungen des Granites, mit Ausnahme eines einzigen Vorkommens (Profil III), nur im Massiv selbst beobachtet worden. Schon unter den eigentlichen Graniten finden sich einzelne Handstücke, bei welchen die basischen Bestandteile stark hervortreten; außer diesen aber treten auch ganz dunkle eigentliche Lamprophyre auf, teils richtungslos körnig, teils schieferig, bei welchen man mit bloßem Auge nur noch Biotit und Hornblende unterscheiden kann. U. d. M. findet man neben diesen beiden Mineralien, von welchen auch hier der Biotit von der Hornblende umschlossen wird, noch einen Plagioklas, welcher als Oligoklas-Andesin bestimmt werden konnte, während Orthoklas ganz fehlt und Quarz nur in vereinzelten, kleinen Körnern vorkommt.

Die akzessorischen Gemengteile sind dieselben wie im Granit.

Pegmatit und Aplit.

Die sauren Spaltungsprodukte, welche untersucht wurden, stammen fast alle aus Gängen und Adern im Nebengestein, welche in der Nähe des Massivs auftreten.

Die grobkörnigen Pegmatite kommen in verschiedener Ausbildung vor, von denen zwei untersucht werden konnten. Die einen zeigen makroskopisch Orthoklas mit großen Biotitblättern. Die mikroskopische Untersuchung ergibt aber ganz dieselben Mineralien, wie sie im Granit vorkommen. Der Biotit ist fast ganz in Chlorit (Pennin) umgewandelt. Orthit ist besonders häufig und in großen Kristallen, auch Zwillingen, entwickelt. Dazu kommt auch hier wieder faserig ausgebildeter Prehnit.

Die anderen Pegmatite lassen mit bloßem Auge große rothe Orthoklaskristalle, große, weiße Quarz-Individuen und Orthit erkennen. Das Gestein durchsetzt eine grüne Ader von Epidotmineralien, die nach der mikroskopischen Untersuchung aus Epidot, Klinozoisit und Orthit besteht. Dieselben Mineralien kommen auch sonst noch im Gestein zerstreut vor.

Neben ihnen konnte Orthoklas und Oligoklas, beide mit Quarz verwachsen, nachgewiesen werden. Außerdem dieselben Mineralien, wie im Granit. Die Struktur ist die für Pegmatite bezeichnende: alle Mineralien liegen ohne nachweisbare Kristallisationsfolge und ohne Kristallform nebeneinander.

Ein Aplit läßt makroskopisch bloß Feldspat und Quarz als feinkörniges Gemenge erkennen. U. d. M. zeigt er sich zusammengesetzt aus Orthoklas, perthitisch verwachsen mit Plagioklas und aus Mikroklin — beide Kalifeldspäte sind ziemlich frisch —; ferner aus Plagioklas und zwar aus Oligoklas, welcher aber im Gegensatz zu den Kalifeldspäten stark serizitisiert ist. Der Quarz ist feinkörnig. Untergeordnet treten auf: Muskovit in paralleler Verwachsung mit Biotit und Chlorit; letzterer grünlich mit anormalen Interferenzfarben, also Pennin. Er ist sicher sekundäre Bildung und zwar aus Biotit entstanden, wie die Übergänge und die ausgeschiedenen Titansäuremineralien, Leukoxen und Anatas, deutlich erkennen lassen. Daneben kommt Titanit als primärer Bestandteil vor.

Ein anderer Aplit, welcher am Nordrande des Massivs in kalkhaltige Gesteine eingedrungen ist, zeigt große Ähnlichkeit mit dem beschriebenen. Man erkennt aber schon makroskopisch Strahlstein, welcher offenbar durch Aufnahme der Bestandteile des Nebengesteins entstanden ist.

B. Die Schieferserie im Norden.

Verfolgt man nun das Profil 1 weiter nach Norden, also talabwärts, so schließt sich an den Granit eine Serie kalkig-toniger Sedimente an. Unmittelbar an den Granit grenzt ein

Hornfels,

welcher sich durch seinen splittrigen Bruch sofort als solcher zu erkennen gibt. Er bildet ein dichtes Gemenge weißer und grüner Mineralien, die makroskopisch nicht näher bestimmbar sind.

Die mikroskopische Untersuchung ergibt vor allem die für Hornfelse so charakteristische Pflasterstruktur. Es ist Forsterit in zahlreichen Körnern, welcher dieses Pflaster bildet. Dazwischen sieht man ganz farblosen Tremolit und eine andere Hornblende, welche ebenfalls farblos ist. Die Art der Ausbildung spricht für Uralit. Es scheint dieses Mineral aus Diallag hervorgegangen zu sein, da es reich ist an Einschlüssen, welche dieselbe Anordnung zeigen, wie man sie beim Diallag gewohnt ist. Dazu gesellt sich noch ein Chlorit mit wohlausgebildeten Zwillingslamellen, fast so, wie beim Plagioklas. Die Färbung ist sehr schwach grünlich, die Doppelbrechung ziemlich hoch (die Interferenzfarben gehen bis zum Weiß erster Ordnung im normalen Schliff). Die Schiefe der Auslöschung beträgt etwa 4°, der Charakter der Hauptzone ist negativ, der des Minerals positiv, der Achsenwinkel sehr klein. Es liegt also zweifellos Klinochlor vor. In ihm eingeschlossen findet sich Graphit.

An den Hornfels schließen sich nun Knotenschiefer an, nämlich:

Skapolithknotenschiefer.

Es sind das bräunliche Schiefer von phyllitischem Habitus mit großen, hellen, runden Knoten. Diese Knoten bestehen der Hauptsache nach aus Skapolith, wie die mikro-

skopische Untersuchung ergibt; nach der qualitativen chemischen Analyse ist derselbe kalkreich mit einem Gehalt an Chlor.

U. d. M. sieht man, daß die Grundmasse des Gesteins aus Quarz und Biotit besteht und vollkommen schieferig ist. Die Knoten von Skapolith (Lichtbrechung wie Quarz — im Mittel 1,55 —, Doppelbrechung etwas höher als Quarz) sind ganz durchlöchert und mit Quarzkörnern und anderen Mineralien erfüllt (Figur 3 der Tafel V). Dasselbe gilt für den Biotit. Wir haben also hier die für Kontaktgesteine so charakteristische Siebstruktur vor uns. Neben dem Skapolith findet sich in jedem Schliff Turmalin in großer Menge. Es ist der stark pleochroitische, braune Turmalin mit den typischen neunseitigen Querschnitten, die zonaren Aufbau zeigen. Diese Querschnitte, sowie die starke Absorption quer zur Hauptzone in den Längsschnitten und zugleich die ungewöhnlich große Menge des Minerals zeigt Figur 4, Tafel V, in welcher die Turmalinlängsschnitte quer zur Schwingungsrichtung des Polarisators liegen.

Außer diesen Mineralien sind noch Titanit, Apatit und Zirkon zu erwähnen.

Dieses Gestein bezeugt somit, daß intensive pneumatolytische Prozesse der Eruption des Granites gefolgt sind: chlor- und borhaltige Dämpfe stiegen empor, sie drangen in kalkhaltige Tonschiefer ein und bildeten dort Skapolith und Turmalin.

In die Knotenschiefer sieht man nun einen etwa 100 m mächtigen Granitgang hineinragen. Das Material dieses Ganges unterscheidet sich in mehreren Punkten von dem des Hauptmassivs. Zunächst ist es sehr feinkörnig. An Stelle des Orthoklases trifft man einen getrübten Mikroklin mit kryptoperthitischer Struktur. Der sehr seltene Plagioklas konnte als Oligoklas bestimmt werden. Die Hornblende fehlt. Dafür tritt aber Muskovit auf. Der Biotit ist teilweise zu Pennin geworden. Der Quarz, sehr feinkörnig, zeigt Kristallform; die Struktur ist also granulitisch. Überhaupt zeigt das Gestein große Ähnlichkeit mit dem an erster Stelle beschriebenen Aplit. Jedenfalls ist es eine saure Ausbildung des Granites. Es wurde nicht unter den Apliten beschrieben, weil eine solche Benennung der hohe Biotitgehalt verbietet.

An die Knotenschiefer schließt sich eine recht mannigfaltige Schieferserie an. Sie besteht nach den Untersuchungen Keidels „im südlichen Teile aus Kalkschiefern, Quarzphylliten und glimmerigen Tonschiefern, welche aber nicht ganz bis zur Hälfte der ganzen Schichtfolge reichen." (Man vergleiche Profil 1 zwischen den beiden Granitmassiven im oberen und im mittleren Bayum-kol-Tal.) „Das vorwiegende Merkmal dieser Zone ist, daß hier Kalkschiefer und glimmerhaltige Schiefer besonders häufig sind, welche mannigfaltig miteinander wechsellagern. Fast jedes Stück, das man anschlägt, hat auf den Schichtflächen Glimmer. Die Schiefer scheinen hier in einem höheren Maße verändert zu sein, als weiter nördlich." Diese makroskopische Beobachtung wird durch die mikroskopische Untersuchung voll und ganz bestätigt und vervollständigt. Es wurde zunächst ein

Quarzphyllit

untersucht, ein dunkler, feinkörniger Schiefer, dessen Hauptmasse aus Quarz, getrübtem Orthoklas und Oligoklas und parallel gelagerten Biotitblättchen besteht. Dazu kommt Muskovit in wenigen Durchschnitten, Turmalin in wohlumgrenzten Kristallen, grünlicher

Rutil, Zirkon, Epidot und Apatit. Graphit findet sich im ganzen Schliff zerstreut, an einzelnen Stellen aber besonders angehäuft. Ferner konnte ein

Körniger Kalk

mit zahlreichen Kontaktmineralien untersucht werden. Unter diesen herrscht ein schwach pleochroitischer Strahlstein vor, der in manchmal recht gut ausgebildeten Kristallen schon makroskopisch deutlich hervortritt. Ferner findet man Diopsid, von Strahlstein umrandet, chlorhaltigen Skapolith und farblosen Chlorit in großen Kristallen. Letzterer ist optisch positiv, hat gerade Auslöschung und höhere Doppelbrechung als Klinochlor. Das sind aber die optischen Eigentümlichkeiten des Leuchtenbergits. Interessant ist das Verhältnis dieses Minerals zum Skapolith, dessen Umwandlungsprodukt er darstellt. Man sieht öfter beide Mineralien in der innigen Verbindung, wie sie Figur 2, Tafel V zeigt, wobei sie sich sowohl durch ihre optischen Eigenschaften als durch die Richtung der Spaltrisse unterscheiden. Diese verlaufen beim Skapolith parallel der Umgrenzung, beim Leuchtenbergit bilden sie mit ihr einen Winkel, welcher in dem abgebildeten Durchschnitt etwa 30° beträgt.

Die Schiefer, welche nun nach Norden folgen, sind nach Dr. Keidels Angaben vorherrschend dunkle, feste, oft ganz schwarze und plattige Tonschiefer. Doch wechseln Farbe und sonstige Beschaffenheit auch hier auf kurze Entfernungen. Bald sind es Phyllite von graugrüner Farbe, bald dünnplattige oder blätterige, braun verwitternde graue Tonschiefer.

Am nördlichen Saume der ganzen Schieferserie aber folgt eine Schichtenfolge, welche sich sehr deutlich von den vorhergehenden Teilen unterscheidet. Die Schiefer sind hier vorwiegend grün gefärbt, zum Teil ist es grüner Phyllit; in manchen Lagen jedoch hat das Gestein ein ganz eigentümliches Aussehen. Es ist graugrün, fühlt sich weich an, hat weiße Adern und Flecken, die mit Salzsäure brausen. An anderen Stellen sind es sehr feinblätterige, fettglänzende und weiche chloritische Schiefer. Dieses letztere Gestein stellt gegenüber den Schiefern eine einheitliche Zone dar, deren Breite Dr. Keidel auf 250 bis 280 m schätzt. Er ist der Ansicht, daß hier ein stark zersetztes basisches Eruptivgestein vorliegt, welches durch Metamorphose und Verwitterung sehr verändert ist.

Diese Ansicht erlangt eine gute Stütze dadurch, daß ein unzweifelhaftes basisches Eruptivgestein hier an dieser Stelle in Gängen beobachtet wurde. Es ist dies ein Gabbro, wie mineralische Zusammensetzung und Struktur bezeugen. Die Struktur erkennt man besonders deutlich bei makroskopischer Betrachtung des Dünnschliffes: alle Mineralien sind gleichmäßig ausgebildet, ohne ausgesprochenen Idiomorphismus des einen oder des anderen. Diese körnige Gabbrostruktur ist meist gut erhalten; nur ein Handstück ist deutlich geschiefert. Die mineralische Zusammensetzung ergibt, daß das Gestein ein

Saussuritgabbro

ist. Der Plagioklas besteht deutlich aus zwei Teilen, welche regellos durcheinander liegen. Der eine ist Andesin, der andere Labrador oder vielleicht noch basischer. Dazwischen liegen Klinozoisit und Epidot, ganz zerfetzt, ohne Kristallform. Es hat also zweifellos der ursprünglich basische Plagioklas seinen Kalkgehalt zum Teil an die Epidotmineralien abgegeben und ist selbst dadurch saurer geworden. Dieser Prozeß ist aber noch nicht bis

zur vollen Entfernung des Kalkgehaltes aus dem Feldspate vorgeschritten, d. h. der Feldspat ist noch nicht zu Albit geworden, wie man es bei ähnlichen Vorkommnissen sonst häufiger beobachtet. Ähnliche Verhältnisse fand ja auch Luczizky in den „Amphiboliten" der Oberpfalz. Neben diesem Feldspatmosaik ist der Hauptbestandteil ein Uralit, blaugrün in schilfiger Ausbildung. Woraus er entstanden ist, läßt sich nicht mehr nachweisen. Biotit ist nicht häufig und immer nur in kleinen Fetzen vorhanden. Das Titaneisen ist fast ganz zu Leukoxen geworden. Nur in der Mitte ist manchmal noch ein frischer schwarzer Kern erhalten geblieben. Besonders häufig ist das Titaneisen von Uralit umschlossen. Merkwürdigerweise fehlt in den schieferigen Gesteinen die Umwandlung in Leukoxen. Endlich wäre noch ein wenig Schwefeleisen anzuführen.

Aus dieser Schieferserie sind noch zwei Gesteine zu erwähnen, welche von der größten Bedeutung für das Verständnis der ganzen Gruppe zu sein scheinen. Das erste ist wiederum ein granitähnliches Gestein, welches ganz aus der Nähe der Gabbrogänge stammt. Äußerlich sieht dieses Gestein einem Zentralgneis völlig gleich und die mikroskopische Untersuchung bestätigt diese Vermutung und zeigt, daß fast in jeder Beziehung Übereinstimmung herrscht. Der Plagioklas, ein Oligoklas-Andesin, ist ganz vollgepfropft mit Klinozoisit und Epidot. Ferner enthält er Mikrolithen von Biotit und Serizit, dabei ist er vollständig frisch.

Orthoklas scheint zu fehlen. Dagegen kommt Quarz in großer Menge vor. Zertrümmerungserscheinungen wurden an ihm nicht beobachtet: alle Individuen löschen vollständig einheitlich aus. Der Biotit ist mit Chlorit verwachsen und zwar teils parallel, teils durchqueren die Chloritblättchen den Glimmer; aber stets sind die Verhältnisse so, daß beide Mineralien vollkommen frisch sind. Der Chlorit setzt scharf gegen den Biotit ab, sodaß eine sekundäre Entstehung durch Umwandlung des Biotits ausgeschlossen erscheint. Es ist ein Pennin mit starkem Pleochroismus (hellgrün bis fast farblos), mit schwacher Doppelbrechung, aber normalen Interferenzfarben. Er löscht gerade aus, hat negativen Charakter der Hauptzone und kleinen positiven Achsenwinkel. Die makroskopisch deutliche Schieferung gibt sich auch unter dem Mikroskop zu erkennen, indem Glimmer und Chlorit in Lagen, der Schieferung parallel, angeordnet sind. Manchmal sieht man, wie diese Glimmer- und Chloritlagen sich flaserig um einen Feldspat herumwinden.

Vergleicht man mit diesen Angaben die Beschreibung, welche Weinschenk[1]) vom Zentralgranit gibt, so fällt sofort die große Übereinstimmung auf. Hier wie dort sind die frischen Plagioklase mit Klinozoisit und Epidot erfüllt, hier wie dort tritt ein Pennin mit niedrigen, aber normalen Interferenzfarben als primärer Gemengteil auf. Ein Unterschied liegt nur darin, daß der Plagioklas etwas basischer ist, als der am Groß-Venediger und daß endlich die Erscheinungen der Zertrümmerung am Quarze fehlen.

Dieser Granitgneis steht ganz in der Nähe der Gabbrogänge an, etwas nördlich von ihnen (Profil I, Taf. III). „Auf der linken Talseite ist er viel mächtiger entwickelt. Ich muß

[1]) Beiträge zur Petrographie der östlichen Zentralalpen, speziell des Groß-Venedigerstockes. II. Über das granitische Zentralmassiv und die Beziehungen zwischen Granit und Gneis. Abhandl. der K. Bayer. Akad. der Wissensch., II. Kl., XVIII. Bd., III. Abt.

hervorheben, daß in diesen Schiefern (in der nördlichen Hälfte der Schieferserie) nach Stücken im Gebirgsschutt zu schließen, an mehreren Stellen Gneis oder Gneisgranit vorkommt“ (Keidel).

Mit diesen granitischen Gesteinen im Zusammenhang scheint ein anderes Gestein zu stehen, welches etwas südlich von den Gabbrogängen geschlagen wurde. Es ist ein Gestein, welches man wohl am besten mit dem Namen

Gneisglimmerschiefer

bezeichnet. Der Plagioklas, welcher makroskopisch hervortritt und eine porphyrartige Struktur bedingt, ist merkwürdigerweise ein Bytownit. Daneben erkennt man u. d. M. ein feines körniges Aggregat von Albit und Quarz, wobei die Bestimmung und Unterscheidung beider Feldspate sowohl nach der Fouqué'schen Methode als auch durch Messung der Lichtbrechung sichergestellt ist. Von dunklen Gemengteilen kommen Biotit und Hornblende vor, letztere in der blaugrünen, natronhaltigen Varietät. Von den Nebengemengteilen beobachtet man Orthit, Zoisit, Titanit, Zirkon und etwas Kalzit. Der Bytownitgehalt scheint aus den in der Nähe auftretenden basischen Eruptivgesteinen herzustammen.

Verläßt man nun die Schiefer mit den Gabbrogängen, so kommt man alsbald talabwärts in eine neue Gesteinsreihe. Man stößt zuerst auf einen hochkristallinischen, weißen

Crinoideendolomit.

Die Crinoideenstielglieder sind an der Oberfläche in großer Anzahl ausgewittert und deutlich zu erkennen. Im frischen Bruch sieht man nur ihre Spaltungsflächen. Die chemische Untersuchung ergibt für das Gestein sowohl wie für die Crinoideenreste reinen Dolomit, welcher selbst in konzentrierter Salzsäure in der Kälte ganz unlöslich ist. U. d. M. erkennt man fast allgemein Zwillingslamellierung nach — 2 R. Auch finden sich manchmal kleine, wohlbegrenzte Rhomboeder in demselben. Die Crinoideen haben ihre mikroskopische Struktur vollständig verloren und geben sich u. d. M. nur dadurch zu erkennen, daß sie größere Individuen in der mittelkörnigen, stark verzahnten Grundmasse darstellen. Von mechanischen Einwirkungen sieht man gar nichts. Alle Durchschnitte sind vollständig einheitlich auslöschend und zeigen weder Zertrümmerung noch Verbiegung.

Unmittelbar an diesen Dolomit schließt sich wiederum ein Granitlager an, von etwa 1 km Mächtigkeit und ihm entspricht ungefähr 2 km nördlich, durch eine Serie ähnlicher, meist umgewandelter Gesteine, wie sie eben beschrieben wurden, getrennt, ein weiteres großes Granitmassiv, das in unserem Profil nur noch in einer Mächtigkeit von 3 km eingezeichnet ist, das sich aber in Wirklichkeit noch weiter nach Norden ins untere Bayum-kol erstreckt. Auf den ersten Blick erkennt man an diesem Granite bedeutende Unterschiede gegenüber dem zuerst beschriebenen Amphibolbiotitgranit im oberen Bayum-kol-Tale. Es bedarf deshalb das Gestein einer eingehenden Beschreibung, wobei man am besten beide Lager znsammenfaßt.

C. Der Granit im mittleren Bayum-kol-Tal.

Dieser Granit ist ein ziemlich grobkörniges Gestein. Große weiße, im nördlichen Teile des Massivs auch rote Feldspäte, erscheinen neben bläulichem Quarz. Als dunklen Gemengteil erkennt man den Biotit, der aber meist nicht schwarzbraun, sondern schmutziggrün erscheint. Das südlichste Lager geht an den Rändern in Gneis über. Über das große Massiv im Süden teilt Dr. Keidel folgendes mit: „Nur die südliche Grenze dieses Massivs ist scharf. Aus dem normal struierten Granit kommt man hier gegen Süden in schieferige Lager. Die Struktur ist nur schwer zu erkennen, weil das Gestein ganz zersetzt ist: doch treten gerundete und zerquetschte Feldspatkörner deutlich hervor; sie erreichen eine solche Größe, daß das Gestein porphyrische Struktur annimmt. Die schieferige Absonderung (grünliche und bräunliche einheitliche Färbung) wird immer ausgeprägter, je weiter man nach Süden kommt, und es ist in der Richtung der Schieferung eine deutliche Schichtung bemerkbar, die fast O.W. streicht. Dieser ganze Komplex besitzt Gneisstruktur, es wechseln helle und dunkle Streifen, doch sind sie infolge der starken Zersetzung nicht mehr sehr ausgesprochen. Die Feldspäte, die auch in dem äußeren Teile oft noch in größeren Individuen vorhanden sind, sind stark ausgezogen; sie liegen auf den Schichtflächen als gerundete Knoten, in eine grünliche, chloritische Masse eingebettet (lagenweise Anordnung der basischen Gemengteile). Die zersetzte schieferige Randzone des Granites geht allmählich in grünliche blätterige Schiefer über. Nach Norden steht das Massiv mit der großen Masse der präkarbonischen Granite der äußeren Züge des zentralen Tian-Schan, d. i. der östlichen Fortsetzung des Terskei-Ala-Tau, im Zusammenhang." Die mikroskopische Untersuchung ergibt:

Orthoklas mit Plagioklas perthitisch verwachsen, meist frisch und in großen Individuen neben sehr stark serizitisiertem Oligoklas-Andesin und ganz oder zum Teil umgewandeltem Biotit, der zu Chlorit mit starkem Pleochroismus und anormalen Interferenzfarben geworden ist. Dieser ist also Pennin. Er ist sicher aus Biotit entstanden, wie die Übergänge deutlich zeigen und auch die gewöhnliche Ausscheidung von Titanit und Anatas in Form von „Insekteneiern" beweist. Vielfach ist er verrostet. Diese verrosteten Stellen zeigen dann höhere Doppelbrechung und sind einachsig negativ, während die frischen Partien positiven Charakter haben.

Muskovit kommt selten neben dem sekundären Serizit als primärer Gemengteil vor. Von unwesentlichen Bestandteilen sind zu erwähnen Epidot und Orthit, Titanit, Anatas, Zirkon und Apatit. Daneben Kalzit und Schwefelkies.

Das Gestein ist ganz zertrümmert, die Feldspäte zerrissen und die einzelnen Teile gegeneinander verschoben, die Risse mit Serizit und Kalzit erfüllt. Der Quarz zeigt überall stark undulöse Auslöschung und Mörtelstruktur. In die Zertrümmerungszonen sind Serizit, Chlorit, Kalzit in großer Menge eingedrungen.

Ganz dieselben Erscheinungen, wie sie hier von dem etwa 1 km mächtigen Lager im Süden beschrieben wurden, wiederholen sich beim Hauptmassiv im Norden, welches das Ende des Profiles darstellt. So unterscheidet sich denn der Granit im mittleren Bayum-kol-Tal in seinem ganzen Habitus von dem Amphibolbiotitgranit im oberen Tal: Es fehlt die Hornblende, das Gestein ist stark kataklastisch und war intensiven Zersetzungsprozessen unterworfen, welche Erscheinungen man im Granit des oberen Tales nur ganz

vereinzelt und niemals in so hohem Grade antrifft. Wie schon erwähnt steht dieses Granitmassiv mit dem Granit im unteren Bayum-kol-Tal in Verbindung. Dr. Petersen hat in der von Herrn Dr. Keidel zitierten Arbeit (Seite 275 und 276) einige von Friedrichsen gesammelte Granite aus diesem Teil des Tales beschrieben. Er war so liebenswürdig, mir die Schliffe dieser Gesteine durch den Vorstand des naturhistorischen Museums in Hamburg zusenden zu lassen, wofür ich ihm bestens danke. Der Vergleich dieser Schliffe mit den von Dr. Keidel gesammelten ergab vollständige Übereinstimmung. Vor allem zeigte sich hier das starke Vorwiegen der sauren Gemengteile über die basischen, was gegenüber dem Granit im oberen Bayum-kol-Tal, der im Durchschnitt viel basischer entwickelt ist, einen durchgreifenden Unterschied bezeichnet. Neben Orthoklas findet sich sehr viel Mikroklin mit oft wunderbarer Gitterlamellierung. Manchmal nimmt auch der immer vorhandene Muskovit so zu, daß ein Zweiglimmergranit entsteht (Nr. 226 auf S. 276). Zertrümmerungs- und Zersetzungserscheinungen sind ebenso intensiv, wie bei den beschriebenen Schliffen; besonders ist die Chloritisierung des Glimmers weit vorgeschritten. Epidot und Orthit sind manchmal sehr häufig und zwar in so gut ausgebildeten Kristallen, daß man sie wohl, wenigstens zum Teil, als primäre Bildung auffassen muß.

Was nun zwischen den beiden Granitmassen liegt, ist rasch beschrieben. An den Nordrand des südlichen Vorkommens schließt sich zunächst ein Gestein an, welches man wiederum am besten mit dem Namen Gneis-Glimmerschiefer bezeichnen könnte. Es enthält als Plagioklas einen Albit. Daneben kommen vor: Quarz, Biotit und Chlorit. Letzterer gibt sich durch seinen starken Pleochroismus und durch seine geringe Doppelbrechung als Pennin zu erkennen. Er ist aber, im Gegensatz zum Pennin des Granites ganz frisch und mit dem ebenfalls frischen Biotit parallel verwachsen. Er ist also hier sicher primärer Entstehung. Epidot findet sich in großer Menge neben Titaneisen, Apatit und Kalzit. Der Albit ist serizitisiert, aber meist nur im Kern, während der Rand noch vollkommen frisch ist, ohne daß sonst ein zonarer Aufbau erkennbar wäre. Der Quarz zeigt nur schwach undulöse Auslöschung.

Über das Weitere berichtet Dr. Keidel:

„Das Hauptmassiv des Granites geht am Südrande, wie schon erwähnt, in dünne Schiefer über und die Schieferung wird immer ausgesprochener, je näher man dem Nebentale (in dem Profil kenntlich durch die Einsattelung) kommt. Dicht bei diesem findet man ein helles gangförmiges Gestein, wahrscheinlich Pegmatit oder Aplit, dann festes, hell klingendes, splitterig springendes Gestein, wahrscheinlich Hornfels, wie im Kontakt weiter talaufwärts.“ (Siehe Profil I, Taf. III.)

Von dem Pegmatit oder Aplit und von den Hornfelsen lag leider kein Stück zur Untersuchung vor. Doch stand mir ein Gestein zu Gebote, unmittelbar vom südlichen Granitrande, welches man seinem ganzen Habitus nach als Adinol bezeichnen muß, das also wohl einen verkieselten Tonschiefer darstellt. Mit Einschluß der ersten Partien des gequetschten und zersetzten Granites ist nach Dr. Keidel die Serie der Hornfelse etwa 250 m mächtig. Am Taleinschnitt des Nebentales liegt Schutt, zum Teil auch alte Moräne. Auf der Südseite des Nebenflusses stehen unmittelbar neben diesem stark gefältelte Schiefer an: sie lösen sich in großen Blöcken in schief parallelepipedischen Massen ab und zerspringen

griffelig. Mit diesen Schiefern beginnt eine Schichtenfolge, die außerordentlich verändert ist. Dann folgt wieder eine nicht näher untersuchte Schieferserie, bis zuletzt mit einem Crinoideendolomit, dem früher beschriebenen in allem gleich und einem „Tonschiefer mit Pyritwürfeln", die Grenze des südlichen Granitlagers erreicht ist, welche, wie schon erwähnt, in ihrer schieferigen Ausbildung von einem Gneisglimmerschiefer begleitet wird.

Nun ist noch das Profil in seinem weiteren Verlauf nach Süden gegen die hohe Kette des Khan-Tengri zu verfolgen.

D. Der Südrand des Granitmassivs im oberen Bayum-kol-Tal.

Man nähert sich jetzt dem vergletscherten Gebiete und deshalb muß man sich mit einzelnen Aufschlüssen zufrieden geben. Doch sind diese noch immer so beschaffen, daß sie ein klares Bild vom Bau des Gebirges geben und noch manches Interessante bieten.

Zunächst ist es von Bedeutung, daß hier im Süden der Granit deutliche Schieferung zeigt. Die mikroskopische Untersuchung läßt hier wieder, wenigstens einigemale jene Erscheinung erkennen, welche Weinschenk Piezokristallisation nennt: Massenhafte Epidot- und Klinozoisitkristalle erfüllen den frischen Plagioklas, welcher hier zwischen Oligoklas und Oligoklas-Andesin steht, sich aber ersterem nähert. Die Struktur ist granulitisch. Mechanische Einwirkungen fehlen auch bei diesem Gestein.

Unmittelbar an diesen schieferigen Granit schließen sich nun Glimmerschiefer an, wie das Profil zeigt, mannigfaltig von Aplitadern durchzogen. Ein Handstück läßt diese Aplitinjektion im Kleinen erkennen: Lagen von Biotit und feinkörnigem Quarz wechseln mit unzweifelhaft granitischem resp. aplitischem Material. Dieses besteht nämlich aus Orthoklas in großen Karlsbader Zwillingen, Oligoklas, Quarz und etwas grünlichem Biotit. Dazu kommen Epidot in großer Menge, Orthit, Apatit und Zirkon, also ganz dieselbe Mineralkombination, wie sie oben bei den Apliten beschrieben wurde.

Die Fortsetzung des Profils I gibt Profil II (Taf. III). Es beginnt mit den soeben erwähnten injizierten Schiefern. Darauf folgt vielleicht ein nur in der Moräne beobachtetes Gestein. Es ist gelblich-grün, ein

Chloritknotenschiefer.

Die Knoten bestehen aus Klinochlor, kenntlich durch den schwachen Pleochroismus, die etwas schiefe Auslöschung und die höhere Doppelbrechung mit normalen Interferenzfarben. Dieser Klinochlor ist umgeben von Albit und durchsetzt von Biotit und Titanit. Die Knoten liegen in einer Grundmasse, welche hauptsächlich aus Epidot, mit außergewöhnlich vielen und schönen Zwillingen besteht. Daneben findet sich aber auch wieder Albit, Biotit und Klinochlor. Letzterer ist auch hier wieder primärer Entstehung, aus denselben Gründen, wie sie früher bei anderen Gesteinen angeführt wurden. Sekundär aber ist Kalzit eingedrungen. Er findet sich nur in Spalten und Hohlräumen.

Die ganze Mineralkombination weist darauf hin, daß der beschriebene Schiefer durch Umwandlung eines basischen Eruptivgesteins oder eines dazu gehörigen Tuffes entstanden ist.

Die nächsten Gesteine, welche nun wieder aus den Moränen auftauchen, sind Granite in mehreren Kuppen; sie gehören zu den Amphibolbiotitgraniten des Hauptprofils und sind ebenso ausgebildet wie jene.

An die Granite schließt sich eine Serie von Kalken, Phylliten und Glimmerschiefern an. Von diesen beanspruchen die Kalke ein besonderes Interesse, da sie unzweifelhafte organische Reste enthalten, nämlich Crinoideen und Korallen. Der

Crinoideenkalk,

welcher etwas weiter im Süden in der Moräne gefunden wurde, ist ein körniger grauer Kalk und zeigt sowohl makroskopisch wie mikroskopisch die Crinoideenreste sehr deutlich. U. d. M. ist die organische Struktur vollkommen erhalten durch Graphitstaub; der Mediankanal ist ganz mit diesem Staub erfüllt. Figur 5 der Tafel V zeigt die Photographie eines Längsschnittes, Figur 6 die eines Querschnittes durch ein Stielglied.

Die Hauptmasse des Gesteins besteht aus feinkörnigem, stark durch graphitischen Staub verunreinigtem Kalzit. Die Crinoideenreste bilden große Kalzitindividuen mit sich unter einem spitzen Winkel kreuzenden Zwillingslamellen nach $-\frac{1}{2}$ R. Diese Lamellen zeigen einigemale Verbiegungen. An Kontaktmineralien tritt sehr häufig Turmalin auf mit typischem Pleochroismus (ω gelb, ε farblos) und mit vielen gut ausgebildeten trigonalen Querschnitten. Außerdem gelblicher, pleochroitischer Phlogopit sowie Eisenglanz. Endlich bemerkt man noch nicht näher bestimmbare sulfidische Erze, unter denen sich aber sicher Eisenkies befindet. Im

Korallenkalk

treten makroskopisch deutlich Korallenreste hervor, welche nicht näher bestimmbar sind. U. d. M. aber findet man von ihrer Struktur keine Spur mehr. Man sieht nur noch, wie die Stellen, welche man makroskopisch als Korallen erkennt, durch das bedeutend gröbere Korn sich aus der feinkörnigen Masse abheben. Der Grund dafür ist wohl hier, wie beim Crinoideenkalk, in der größeren Reinheit des Materials zu suchen. Denn während die Korallen durchaus klar sind, enthält der feinkörnige Kalzit massenhaft kleine opake Einschlüsse. Diese Einschlüsse bewirken auch die dunkle Färbung des Gesteins, aus welcher schon fürs bloße Auge die weißen Korallen sich deutlich abheben. Auch hier zeigen die großen Kalzitkörner die charakteristische Zwillingslamellierung nach $-\frac{1}{2}$ R. Als Kontaktmineral sieht man hier und da einen farblosen Glimmer.

Neben diesen beiden Kalken kommen noch andere vor, welche aber aus reinem Kalzit bestehen. Sie alle zeigen im allgemeinen die Pflasterstruktur. In einzelnen sind die Zwillingslamellen verbogen. Die Kalke treten wechssellagernd mit Phylliten und Tonschiefern auf. Einigemale finden sich Zwischenlagen von dichtem weißem Kaliglimmer ähnlich den sog. Helvetan von Gümbel.

— —

Profil X (S. 145) beginnt im Norden mit dem Amphibolbiotitgranit des Hauptmassivs, welcher hier am Rande pegmatitische Ausbildung und einen größeren basischen Putzen zeigt. Daran schließt sich, in geringer Mächtigkeit, der bei Profil I beschriebene Glimmerschiefer (injizierter Schiefer) und dann körnige Kalke an. Der Kalk, welcher dem

Granit am nächsten liegt, ist ein dunkles Gestein mit schwarzen Knoten. Die Knoten bestehen aus Graphit mit etwas Quarz und Glimmer. Der Kalzit, meist ziemlich grobkörnig, zeigt zum Teil verbogene Zwillingslamellen (nach $-\frac{1}{2}$ R.). Neben ihm findet man noch Quarz, etwas Albit, Muskovit, Zirkon und Schwefelkies. Der Graphit tritt, außer in den Knoten, auch noch sonst in Rissen oder im Glimmer eingeschlossen auf.

Etwas mehr nach Süden schließt sich nun ein Crinoideenkalk an. Die Crinoideenreste, welche makroskopisch leicht erkennbar sind, findet man unter dem M. nicht mehr wieder. Die Struktur ist gänzlich verschwunden. Doch sieht man manchmal kleinere Kalzitindividuen in größeren, mit anderer Orientierung, eingeschlossen und zwar gerade dort, wo man makroskopisch die Crinoideenstiele beobachtet.

Quarz tritt in Knoten auf, in denen sich immer viele kleine Stücke zusammenhäufen. Dazu kommen Muskovit, Schwefelkies und Graphit. Letzterer füllt auch hier die Risse aus und ist im Glimmer eingeschlossen. Die Zwillingslamellen des Kalzites sind stark verbogen.

Die beiden beschriebenen Kalke zeigt in vergrößertem Maßstab Profil XI. Dort sieht man auch, wie Aplite in mehreren Verästelungen in die Kalke eindringen. Dann ist eine kurze Strecke mit Moränen bedeckt, welche ein Gletscherbach durchfließt. Am Südgehänge dieses Baches (Profil X) stehen wieder Gesteine an, welche besonderes Interesse verdienen.

Zunächst bemerkt man einen Pegmatit und einen feinkörnigen Granit. Letzterer enthält Orthoklas in unregelmäßigen Fetzen, sehr wenig sauren Plagioklas (eine nähere Bestimmung ist nicht möglich, weil die Stücke zu klein sind), Quarz in kleinen, meist wohlbegrenzten Kristallen, Biotit gleichfalls endlich gut begrenzt, Epidot in großer Menge, aber fast nie mit Kristallform, Eisenglanz in sechsseitigen Täfelchen, Apatit und Zirkon. Die Struktur ist granulitisch und man würde das Gestein Aplit nennen können, wenn nicht die basischen Gemengteile ziemlich stark vertreten wären.

Mit diesem Granit resp. Pegmatit steht in enger Verbindung ein anderes Gestein. Es zeigt deutlich sedimentären Charakter: gut ausgebildeter Muskovit und feinkörniger Quarz durchziehen das Gestein parallel der Schieferung und umschließen in der Schieferungsrichtung langgestreckte Graphitputzen. Zwischen diesen Lagen aber ist Aplit eingedrungen, denn man findet hier frischen Mikroklin, Quarz, von größerem Korn, als im Schiefer, richtungsloser Biotit, Pennin, Apatit, Zirkon. Dazu kommt endlich noch ein Mineral, welches zwar im Bayum-kol-Tal niemals im Granit beobachtet wurde, wohl aber häufig in den umgewandelten Sedimenten, nämlich Turmalin. Er ist hier grünlich gefärbt (ω dunkelgrün, ε hellgrün bis farblos) und in außergewöhnlich großen, gut umgrenzten Kristallen entwickelt.

Wir befinden uns also hier unzweifelhaft in der Region der injizierten Schiefer, in welcher granitisches und sedimentäres Material sich in der mannigfaltigsten Weise mischen. Vieles ist leider verdeckt von diesem interessanten Gebiet. Doch sieht man etwas weiter nach Süden in unserem Profil X wiederum eine Partie unter dem Eis hervorkommen. Ein Aplit durchsetzt auch dieses Gestein und somit charakterisiert es sich als die wahrscheinliche Fortsetzung genannten Gebietes.

Verläßt man diesen Gneis mit Aplitgang, so kommt man nach Süden wiederum auf Granit, welcher unter Eis und Moräne stellenweise beobachtet wurde. Es ist derselbe

Amphibolbiotitgranit, welcher in Profil II die drei Kuppen bildet, resp. seine westliche Fortsetzung. In Profil X ist er eingezeichnet, natürlich schematisch, da er nur in kleinen Partien aufgeschlossen ist. Hier wurde auch „sehr häufig in der Moräne zwischen dem Eis, das tief zerspalten ist, Augengneis gefunden." Auf dem Granit folgten nach Süden auch in Profil III u. X Crinoideen- und Korallenkalke, wie sie schon bei Profil II beschrieben wurden.

Über die paläozoischen Kalke, welche den Hintergrund unserer Profile im Süden bilden und welche die hohen Ketten zusammensetzen, kann nichts Näheres angegeben werden, weil keine Stücke zur Untersuchung vorlagen und somit muß hier die Beschreibung der Gesteine ihren Abschluß finden.

Ergebnisse der petrographischen Untersuchung.

Drei Fragen sind es vor allem, welche sich nun aufdrängen: 1. Ist der Granit als Intrusivmasse in die Schiefer eingedrungen, welche ihn jetzt umgeben? 2. In welcher geologischen Periode ist dieses geschehen? 3. Welches ist die Ursache der kristallinischen Beschaffenheit der Schiefer und Kalke?

1. Daß die erste Frage für den Amphibolbiotitgranit bejahend beantwortet werden muß, unterliegt keinem Zweifel. Dafür sprechen: 1. Die porphyrischen und schieferigen Randzonen. 2. Die Aplite und Pegmatite, welche ins Nebengestein eindringen. 3. Die Kontaktmetamorphose dieses Nebengesteins selbst. Ein Blick auf die Profile zeigt dieses alles ganz deutlich.

Nicht so deutlich liegen die Verhältnisse beim Biotitgranit im mittleren Bayum-kol-Tal. Aber auch hier findet man vollständig befriedigende Beweise: Die porphyrische und schieferige Randzone wurde von Dr. Keidel beschrieben; ebensowenig fehlt der Pegmatit im Nebengestein, wenn auch nur ein einziger beobachtet wurde; endlich ist auch die Kontaktmetamorphose durch Hornfelse und Adinole nachgewiesen.

2. Das Alter der Granite ist somit in seiner Grenze nach unten durch das Alter der umgebenden Schiefer bestimmt. Für den Granit im oberen Bayum-kol-Tal ergibt sich also ein postkarbonisches Alter, weil er oberkarbonische Gesteine metamorphosiert hat. Der Granit im mittleren und unteren Bayum-kol-Tal aber ist zweifellos älter.

Wenn auch die Schiefer, welche er verändert hat, unbestimmten Alters sind (vergl. Keidel S. 104 f.), so ergeben die an zahlreichen Stellen nachweisbaren Transgressionen unterkarbonischer Ablagerungen über diesem Granit und seinen Kontaktbildungen, daß zur Zeit der Ablagerung jener Sedimente der Granit mit seiner kontaktmetamorphen Hülle schon einer weitgehenden Denudation anheimgefallen war. Mit ihm gleichalterig, da petrographisch völlig übereinstimmend, ist auch das etwa 1 km mächtige Lager nördlich von diesem granitischen Hauptmassiv.

Zweifellos haben wir es also mit zwei verschiedenalterigen Intrusionen zu tun, von welchen die jüngere, jene im oberen Bayum-kol-Tal, mindestens postkarbonisch ist. Aber man kann das Alter dieser auf Grund petrographischer Beobachtungen noch etwas näher definieren. Einerseits weist nämlich die große Menge an Mineralien der Epidotgruppe, alles Mineralien von kleinem Molekularvolumen, wie auch die Piezokontaktmetamorphose am Südrande auf einen bedeutenden Druck während der Verfestigung hin, so daß die Intrusion wohl in unmittelbarem Zusammenhang mit einer Gebirgsbildung gestanden haben mag und sowohl die Verfestigung des Granites selbst, also auch die Meta-

morphose des Nebengesteins unter dem Einfluß des hohen Druckes dieser Gebirgsbildung vor sich ging. Andererseits ist aber der Granit in seiner ganzen Masse frisch und unzersetzt. Mechanische Zertrümmerungen sind nur lokale Erscheinungen und erreichen nie einen hohen Betrag. Das erscheint unmöglich, wenn nach der Verfestigung des Granites noch bedeutende gebirgsbildende Bewegungen stattgefunden hätten. Wie eine solche auf ein Granitmassiv einwirkt, zeigt sich deutlich am Granit des mittleren und unteren Bayum-kol-Tals, bei dem fast kein einziger Bestandteil ohne Zertrümmerungserscheinung geblieben ist.

Es wäre also somit als Zeit der Intrusion mit großer Wahrscheinlichkeit die letzte große gebirgsbildende Bewegung im Tian-Schan bestimmt.

3. Die dritte Frage streift ein Gebiet, das heutigen Tages im Mittelpunkte des allgemeinen Interesses aller Geologen steht: Die Entstehung der kristallinischen Schiefer. Und weil hier die Ansichten so sehr voneinander abweichen, so scheint es vor allem geboten, bei der Behandlung dieser Frage strenge Tatsachen und Theorie auseinanderzuhalten.

Es ergibt sich zunächst aus den Untersuchungen im Bayum-kol-Tal, daß man hier von einer archäischen Formation oder von der Formation der kristallinischen Schiefer nicht reden kann. Die Kalke und Schiefer von der hohen Kette des Khan-Tengri bis ins mittlere Bayum-kol-Tal hinab, sind durch Fossilfunde als paläozoisch bestimmt. Nur die schmale Zone von Schiefern zwischen dem Granitmassiv des mittleren Bayum-kol und dem nördlichen Crinoideendolomit ist unbestimmten Alters. Es ist also, wenn wir zunächst von diesen wenigen Schiefern absehen, sicher nachgewiesen, daß die in Rede stehenden Gesteine umgewandelte Sedimente und, zum geringen Teil, umgewandelte basische Eruptivgesteine sind.

Die Frage nach der Ursache ihrer kristallinischen Umwandlung läßt sich für die Gesteine im obersten Bayum-kol-Tal leicht und mit absoluter Sicherheit beantworten: Es ist unzweifelhaft, daß es die kontaktmetamorphosierende Kraft des Granites war, welche die Gesteine in nächster Nähe des Granites in den jetzigen Zustand übergeführt hat. Ein Blick auf Profil II, III und X (S. 145) läßt dieses für die südlichsten Teile deutlich erkennen. Dort sieht man ja, wie der Granit selbst oder seine sauren Spaltungsprodukte in der mannigfaltigsten Weise in Kalke und Schiefer eindringen, überall ihre Spuren in der Neubildung oder Umkristallisierung der Mineralien zurücklassend. Das kann man verfolgen, soweit die Aufschlüsse reichen, so lange nicht ewiges Eis alles bedeckt. Die Profile geben natürlich nur die bedeutendsten Aplitadern. Daß die Aplite z. B. unter der Moräne der Furche des westlichen Bayum-kol-Gletschers das Gestein gleichsam durchschwärmen, sieht man auf den Profilen nicht.

Für die Gesteine am Nordrande des Granitmassivs im oberen Bayum-kol-Tal hat man nicht geringere Sicherheit für die umwandelnde Wirkung des Granites. Zwar sind hier die Aplite nicht so zahlreich, — wenn man nicht etwa die mächtige Apophyse von feinkörnigem Granit dazu rechnen will, — aber an ihre Stelle tritt eine andere Erscheinung: an den Granit schließen sich Hornfelse und Knotenschiefer an, welche man immer als typische Kontaktbildungen auffaßt. Und neben diesen treten auch Kalke auf, mit typischen Kontaktmineralien und endlich Quarzphyllite mit Turmalin. Bis hierhin also, etwa 1 km nördlich vom Granit und ebenso für die im Süden an den Granit angrenzenden Kalke und Schiefer ist die Kontaktmetamorphose Tatsache.

Sind wir aber nun berechtigt die Kontaktmetamorphose auch auf die noch weiter nach Norden folgenden Schiefer auszudehnen?

Wir wissen durch Herrn Dr. Keidel, daß die Gesteine der südlichen Hälfte der Schieferserie sich vor den anderen durch einen höheren Grad der Metamorphose auszeichnen, ja daß die der nördlichen Hälfte, wenigstens zum Teil, ganz unverändert sind. Das alles würde sich leicht erklären durch die geringere oder größere Entfernung des Granites.

Allerdings nimmt die Metamorphose wieder zu, wenn wir uns noch mehr nach Norden begeben und uns den Gabbrozungen nähern. Den Grund dafür aber finden wir in Graniten, welche besonders auf der linken Talseite sehr häufig sind. Auch von der rechten Seite wurde ein solcher beschrieben und mit dem Zentralgranit der Alpen verglichen. Es ist also wenigstens sehr wahrscheinlich, daß die ganze Schieferserie kontaktmetamorph ist. Sicher wird dieses wieder für jene Gesteine, welche den Biotitgranit im mittleren und unteren Tal umhüllen.

Es ist auf den ersten Blick auffallend, daß nur am Nordrand des großen Granitmassivs im oberen Bayum-kol-Tal Hornfelse und Knotenschiefer sich finden, während am Südrande gar nichts derartiges vorkommt. Man kann dieses Fehlen nicht dadurch erklären, daß das Gebiet zu wenig durchforscht sei. Die Profile zeigen, daß gerade der unmittelbare Kontakt des Granites an mehreren Stellen sehr eingehend untersucht wurde. So charakteristische Bildungen wie Hornfelse und Knotenschiefer hätten dabei dem Sammler nicht entgehen können. Noch viel weniger darf man deshalb die Kontaktmetamorphose leugnen, da ja doch in den Apliten ganz unwiderlegliche Beweise gegeben sind.

Es handelt sich hier offenbar um eine ganz andere Art der Kontaktmetamorphose, wie am Nordrand. Hier am Südrand ist es das, was Weinschenk Piezokontaktmetamorphose nennt, am Nordrand ist es normale Kontaktmetamorphose. Merkwürdig genug ist es nun, wie erstere auch mit der Piezokristallisation zusammenhängt; wird doch am Südrande der Granit, wie schon beschrieben, schieferig und nimmt makroskopisch wie mikroskopisch ganz den Habitus eines zentralalpinen Granites an. Dieselbe Übereinstimmung mit zentralalpinen Gesteinen ergibt sich aus der Betrachtung der metamorphosierten Schiefer und Kalke. Nirgendwo treten am Südrande die stets als typisch betrachteten Kontaktmineralien wie Andalusit und Cordierit oder Kalksilikatmineralien auf, sondern an Stelle ersterer tritt als Neubildung Muskovit und Biotit, an Stelle letzterer bleiben Kalzit und die Kieselsäure getrennt, sei es, daß letztere als Quarz auskristallisiert oder sich im Albit findet.

Geht man hingegen zum Nordrand, so treten im Hornfels sofort Diopsid und Fosterit auf und im körnigen Kalk bildet sich Strahlstein, während man freie Kieselsäure vergebens sucht.

Merkwürdig und zugleich hochbedeutsam ist es, daß so ein und dasselbe Massiv die beiden Arten der Kontaktmetamorphose zeigt. Mag man dieses nun dadurch erklären, daß im Süden, wo die mächtigen Ketten bis über 7000 m emporragen, der Druck während der Metamorphose ganz besonders stark auf den Gesteinen lastete, mag man irgend eine andere Erklärung suchen: Die Tatsache muß jedenfalls beim Studium ähnlicher Gebiete, vor allem unserer Alpen, berücksichtigt werden; man darf nicht mehr von einer Theorie der Piezokontaktmetamorphose sprechen, welche sich durch keine Tatsachen beweisen lasse.

St. Gabriel b. Mödling, März 1906.

Erklärung der Tafel V.

(Vergrößerung ca. 70 fach).

Fig. 1. Orthitkristall aus drei verschieden gefärbten, scharf gegeneinander abgegrenzten Teilen bestehend. Aus dem Amphibolbiotitgranit des obersten Bayum-kol-Tales.
Gewöhnliches Licht.

Fig. 2. In der Mitte des Gesichtsfeldes ein Skapolithkristall mit Spaltrissen, der Längsrichtung parallel. In diesem Kristall sieht man einzelne Partien, deren Spaltbarkeit einen Winkel von 30° mit der des Skapoliths bildet. Es ist Leuchtenbergit. Kontaktkalk.
Gewöhnliches Licht.

Fig. 3. Siebstruktur eines Skapolithknotens. Der Skapolith ist durchlöchert und mit Quarz und Biotit angefüllt. + Nicols. Skapolithknotenschiefer.

Fig. 4. Zeigt neunseitige Turmalinquerschnitte und stark absorbierende Längsschnitte in dem vollkommen geschieferten Skapolithgestein. Skapolithknotenschiefer.

Fig. 5. Längsschnitt durch einen Crinoideenstiel. Die ursprüngliche organische Struktur ist durch Graphitflecken angedeutet.
Gewöhnliches Licht. Im Marmor des obersten Bayum-kol-Tales.

Fig. 6. Querschnitt durch einen Crinoideenstiel. Ein einheitliches, zwillingslamelliertes Kalzitindividuum zeigt in der Mitte einen Hohlraum, welcher ganz mit Graphit erfüllt ist.
Gewöhnliches Licht. Im Marmor des obersten Bayum-kol-Tales.



Oberes Bayum-Kol-Tal.

g_2 Biotitgranit des mittleren Bayum-Kol-Tals
g_1 Granit in den Schiefern
g Amphibolbiotitgranit des oberen Bayum-Kol-Tals
p Phyllit (z. T. Gneiss, Gabbro usw.)
t Tonschiefer (z. T. Phyllit)
s Kontaktmetamorphe Schiefer d. oberen Bayum-Kol-Tals
d Dolomit der Schieferzone i. mittleren Talabschnitt
d_1 Dolomit d. Khan-Tengri u. kristallin. Kalk
c Carbonischer Kalk

Umrandung d. östl. Bayum-Kol-Gletschers.

gr Granit des oberen Bayum-Kol-Tals
ct Contact des schmalen Granitzuges des Gletscherbodens gegen die Schiefer am nördlichen Fusse der centralen Kette
i Injizierte Schiefer
ptk Phyllit-Tonschiefer u. Kalkschiefer a. nördlichen Fusse der centralen Kette
c untercarbonischer kristallinischer Kalk

Fig. 1.

Fig. 2.

Dr. Merzbacher phot.



1 Amphibolitische Gest
Schiefer und grüner Ph
zone des Bayum-kol-T

2 Phyllit und Tonschief
Tals, zum Teil kontak

3 Dolomit des mittleren

4 Dieselben Gesteine wi
birge des Inyltschek-
davon.

5 Injizierte Schiefer am
des Bayum-kol-Massiv

6 Paläozoische Schiefer
birgszüge.

7 Phyllite und Tonschie
Rande der zentralen

8 Unterkarbonischer Ka
Productus giganteus.

9 Unterkarbonischer, k
Zentralketten.

10 Bunte gipsführende
Sandsteine (karbonisc
Passes.

11 Tertiäre Gobi-Sedime

12 Junge, zum Teil plei
der alten Seebecken u

13 Präkarbonischer Gran
birgszüge.

14 Jüngerer Granit der in

15 Quarzporphyr.

16 Granit des Bayum-kol

17 Gepreßter Granit, e
Tonschiefern der Schi
kol-Tals.

18 Gneis etc. in der Schi
kol-Tals.

19 Granit der nördliche
züge, vermutlich glei



1 Amphibolitische Gesteine, chloritische Schiefer und grüner Phyllit der Schieferzone des Bayum-kol-Tals.

2 Phyllit und Tonschiefer des Bayum-kol-Tals, zum Teil kontaktmetamorph.

3 Dolomit des mittleren Bayum-kol-Tals.

4 Dieselben Gesteine wie 1, 2, 3 im Gebirge des Inyltschek-Tals und südlich davon.

5 Injizierte Schiefer am südlichen Rande des Bayum-kol-Massivs.

6 Paläozoische Schiefer der äußeren Gebirgszüge.

7 Phyllite und Tonschiefer am nördlichen Rande der zentralen Kette.

8 Unterkarbonischer Kalk der Stufe des Productus giganteus.

9 Unterkarbonischer, körniger Kalk der Zentralketten.

10 Bunte gipsführende Mergel und rote Sandsteine (karbonisch) des Sart-dschol-Passes.

11 Tertiäre Gobi-Sedimente.

12 Junge zum Teil pleistozäne Bildungen der alten Seebecken und der Talbecken.

13 Präkarbonischer Granit der äußeren Gebirgszüge.

14 Jüngerer Granit der inneren Gebirgszüge.

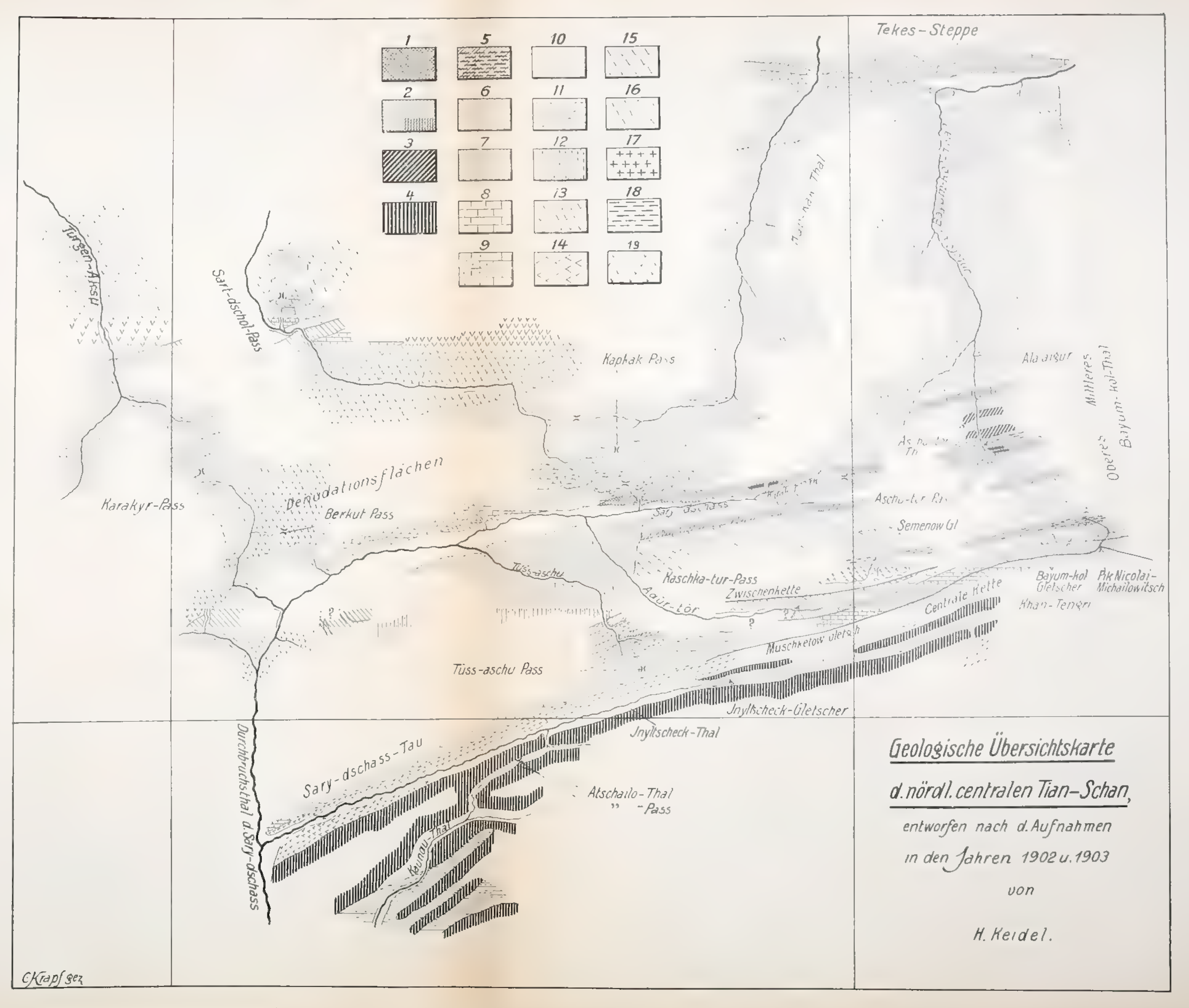
15 Quarzporphyr.

16 Granit des Bayum-kol-Semonow-Massivs.

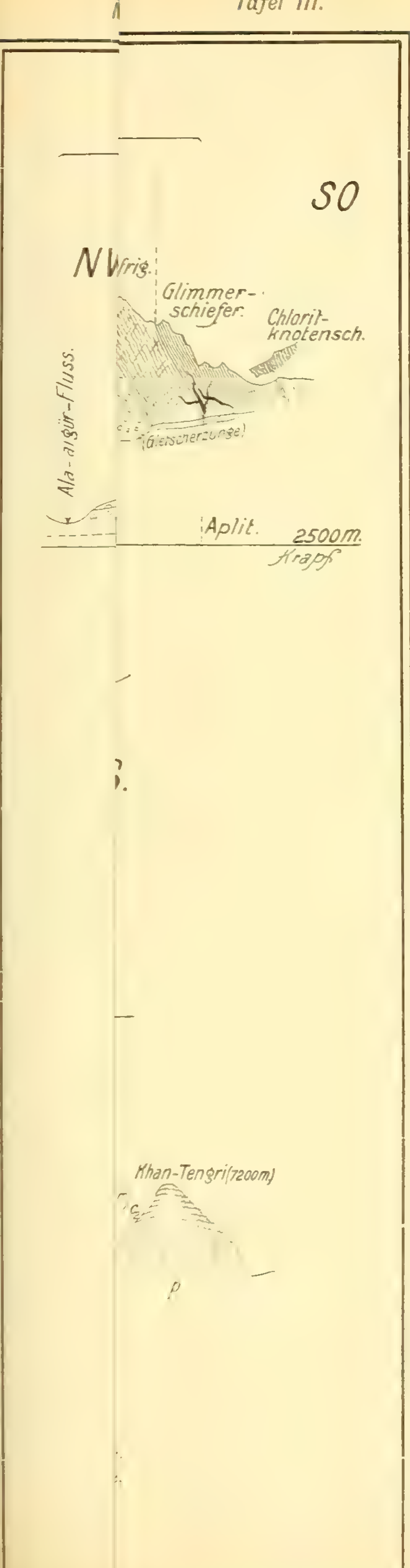
17 Gepreßter Granit, eingelagert in den Tonschiefern der Schieferzone des Bayum-kol-Tals.

18 Gneis etc. in der Schieferzone des Bayum-kol-Tals.

19 Granit der nördlichen äußeren Gebirgszüge, vermutlich gleichalterig mit 13.






SO
NW
Frig.
Glimmer-schiefer
Chlorit-knotensch.
Ala-aigür-Fluss.
(Gletscherzunge)
Aplit.
2500m.
Krapf
Khan-Tengri (7200m)



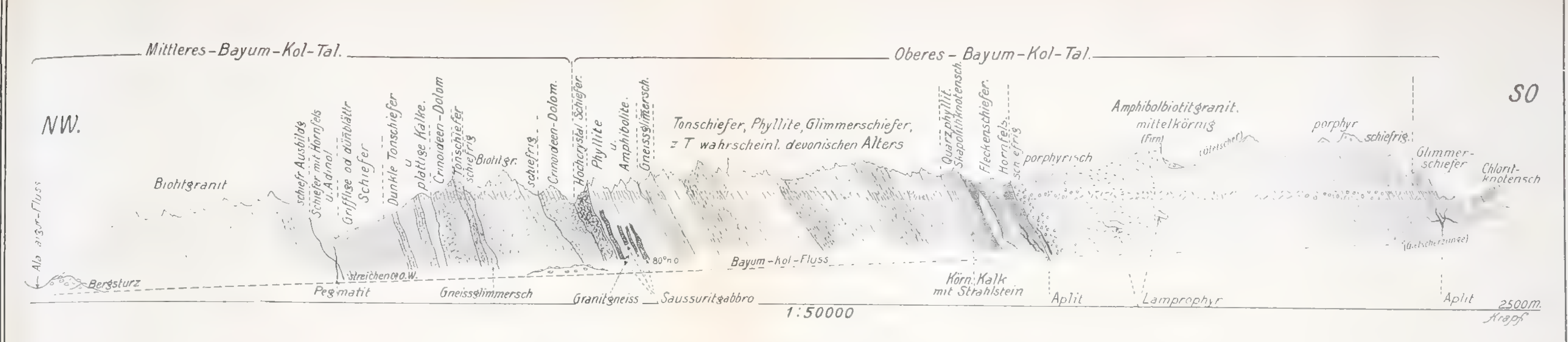


Fig. I. **Profil durch das obere und mittlere Bayum-kol-Tal von S.O.—N.W.**

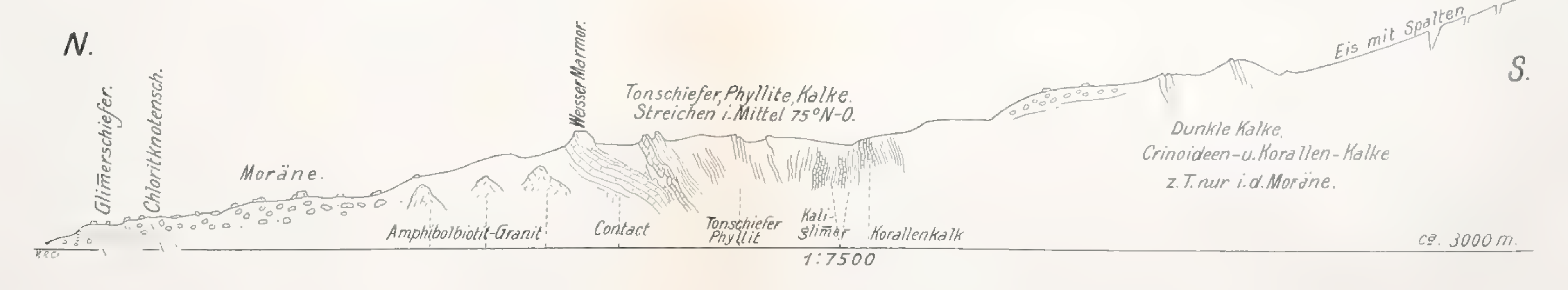


Fig. II. **Profil durch den obersten Teil des Bayum-kol-Tales von S.—N.**



Fig. III. **Profil durch den nördlichen Teil des zentralen Tian-Schan im Meridian des Khan-Tengri (vom Khan-Tengri durch das Bayum-kol-Tal zur Tekes-Ebene).**

p Phyllit, Tonschiefer u. s. w., z. T. in Profil I, d Crinoideendolomit der Schieferzone des Bayum-kol-Tales, c unterkarbonischer Kalk, z. T. grauwackenähnlich, c_1 kristallinischer Kalk (z. T. dolomitisch) der zentralen Kette, c_2 kristallinischer, z. T. dolomitischer Kalk des Khan-Tengri, i Zone der injizierten Schiefer, t junge Bildungen der Tekesebene, m alte Moräne, s Aufschüttungen der Steppe, g präkarbonischer Granit der äußeren Gebirgszüge, g_1 Granit des oberen Bayum-kol-Tals, g_2 gepreßter Granit der Schieferzone, a Gabbro.







Fig. XII. Profil durch das Karakol-Tal und den Semenow-Gletscher (Endzunge).

p grünlicher Phyllit, a amphibolitartiges Gestein, tg Tonglimmerschiefer, t Tonschiefer, cg Quarzitkonglomerat, k kontaktmetamorpher Kalk, c unterkarbonischer Kalk, g Granit, m Moräne, s Gehängeschutt, ct Kontakt, e Gletscher

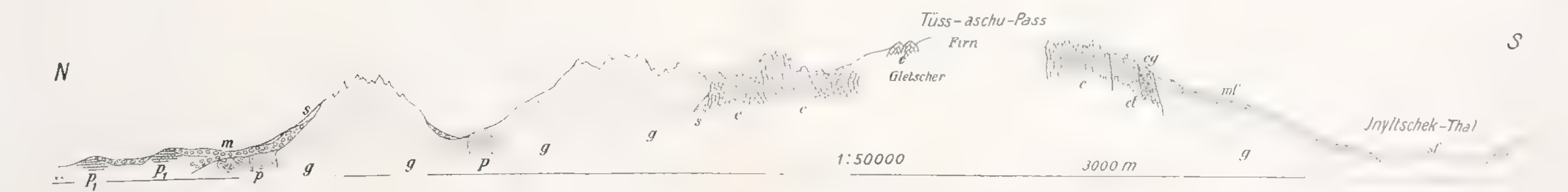


Fig. XIII. Profil durch den Sary-dschass-Tau im Meridian des Tüss-aschu-Passes.

p Phyllit, kristallinische Schiefer, z. T. injizierte Schiefer, c unterkarbonischer Crinoideenkalk mit Productus giganteus, ct kontaktmetamorpher Kalk mit Kalkkonglomerat (cg), g Granit, Amphibolbiotitgranit und porphyrischer Biotitgranit, p_1 rötliche, lockere, pleistozäne Konglomerate und Sande des Sary-dschass-Beckens, m alte Moräne, mf fluvioglaziale Bildungen in Terrassen, sf Flußschotter, s Schutt.

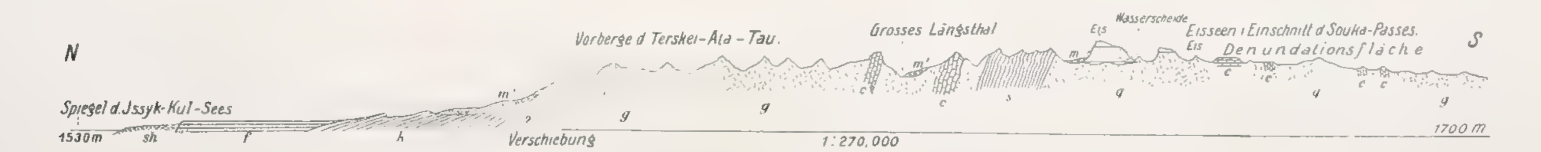


Fig. XIV. Profil durch den Terskei-Ala-Tau im Meridian des Souka-Passes.

g granitische Gesteine, Amphibolbiotitgranit, Biotitgranit, s metamorphe Schiefer, c heller und dunkler kristallinischer Kalk, z. T. von Aplit durchbrochen, k rotes, postpliozänes Konglomerat des Issyk-kul, f fluvioglaziale Schotter, sh rezente Schotter des Issyk-kul-Ufers, m[1] Moränen der ehemaligen Gletscher, m Moränen der heutigen Gletscher.



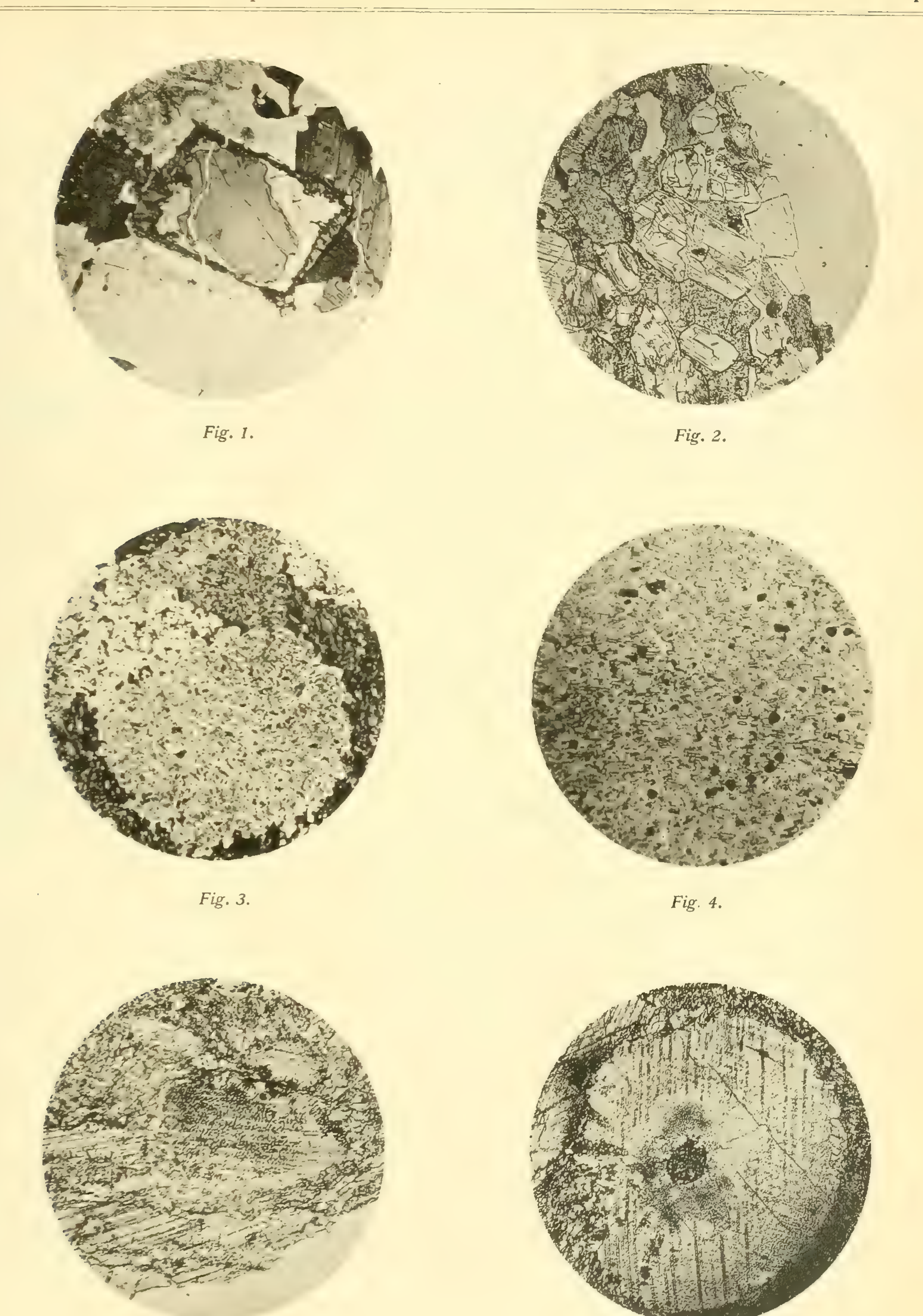


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 5. Fig. 6.

Prof. Weinschenk phot.



Aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacherschen Tian-Schan-Expedition.

III. Die Gesteine des Profils durch das südliche Musart-Tal im zentralen Tian-Schan.

Von

P. A. Kleinschmidt und *P.* H. Limbrock, S. V. D.

(Mit 2 Tafeln.)

Einleitung.

Das in Folgendem dargestellte Profil soll gewissermaßen die Fortsetzung bilden zu den Studien von *P.* St. Richarz über die Gesteine des Bayum-kol-Tals auf der Nordseite des Tian-Schan (siehe Denkschriften der Akad. der Wiss. S. 193—211). Das südliche Musart-Tal bildet allerdings nicht die gerade Fortsetzung des Bayum-kol-Tals, sondern liegt etwas weiter östlich. Da aber nach den Angaben von Dr. Keidel in der nördlichen Fortsetzung des von uns eingehender studierten Abschnittes, im „Großen oder nördlichen Musart-Tale“, annähernd ähnliche Verhältnisse herrschen, wie im Bayum-kol-Tal, so geben die beiden Profile zusammen jedenfalls ein hinreichendes Bild von der petrographischen Beschaffenheit des zentralen Tian-Schan.

Es obliegt uns zunächst die angenehme Pflicht, Herrn Dr. G. Merzbacher unseren aufrichtigen Dank auszusprechen für die freundliche Überlassung des Materials und der photographischen Abbildungen. Sodann dem Geologen der Expedition, Herrn Dr. H. Keidel, der in liebenswürdigster und selbstlosester Weise uns seine gemachten Beobachtungen zur Verfügung stellte und mit der größten Zuvorkommenheit stets bereit war, über alle dunklen Punkte Aufschluß zu geben und uns durch ausgiebige Skizzen und Notizen über die Lagerungsverhältnisse unterrichtet hat. Auch müssen wir Herrn Professor Dr. E. Weinschenk danken, unter dessen erfahrener Leitung wir unsere Untersuchungen ausführen konnten.

Wir werden nun zunächst versuchen, einen kurzen Überblick zu geben über die geologischen Verhältnisse unseres Gebietes nach den freundlichen Mitteilungen des Herrn Dr. Keidel. Sodann soll die Beschreibung des Profils selbst folgen und endlich die aus den beobachteten Tatsachen zu ziehenden Schlüsse.

I. Kurzer Überblick über die geologischen Verhältnisse des südlichen Musart-Tals.

Aus der geologischen Beschreibung Keidels (siehe Denkschriften der Akad. der Wiss. S. 91 f.) wissen wir, daß sich auf der Nordseite des Tian-Schan mehrere größere granitische Massive befinden. Über das nördliche transgrediert der unterkarbonische Kalk, weshalb dieser Granit sicher älter sein muß als die betreffenden Teile des Karbons. Dagegen unzweifelhaft postkarbonischen Alters ist der südlichste Granitzug, da er den karbonischen Kalk, der die höchsten Ketten am Khan-Tengri bildet, nachweislich kontaktmetamorph umgewandelt hat.

Der Musart-Paß, an dem unser Profil beginnt, liegt nach Keidel genau in der nordöstlichen Streichrichtung der den Khan-Tengri tragenden Gebirgszüge. Hier wie dort

sind die höchsten Erhebungen aus kristallinischen Kalken und Dolomiten zusammengesetzt. Keidel ist daher der Ansicht, daß auch am Musart-Paß die Kalke karbonischen Alters sind, obwohl im größten Teile der Kalkzüge keine Fossilfunde vorliegen wegen der hochkristallinen Beschaffenheit dieser Sedimente.

Von Interesse für uns ist auch die Tatsache, daß die wahrscheinliche Fortsetzung des postkarbonischen Granites des obersten Bayum-kol-Tales sich ca. 15 km nördlich vom Musart-Paß findet. Das Massiv hat nach Keidels Schätzung — er hat im nördlichen Großen Musart-Tal nur flüchtige Beobachtungen machen können — eine Mächtigkeit von etwa 8 Kilometern. Der Granit ist, wie im oberen Bayum-kol-Tal, reich an Hornblende.

Vom Musart-Paß südwärts folgen wir der Expedition lange Zeit durch die obengenannten kristallinischen Kalke, in die sich stellenweise mächtige Lager und Gänge von Quarzporphyr einschalten, und die mehrfach mit typischen Hornfelsen und Glimmerfelsen wechsellagern.

Weiter nach Süden schließen sich mannigfaltige Bildungen an, fast alles echte Kontaktgesteine. In diesem Abschnitte treten einige kleinere Granitstöcke auf unter etwas eigentümlichen Verhältnissen, die weiter unten geschildert werden sollen.

Wir nähern uns nun dem granitischen Massive des südlichen Musart-Tals, das in seiner ganzen Mächtigkeit aufgeschlossen ist. Gegen 30 Kilometer führt der Weg durch dieses Massiv, das allerdings, wie wir noch sehen werden, kein einheitliches ist.

Die südliche Kontaktzone ist verhältnismäßig schwach entwickelt. Der Grund ist nicht recht klar. Das Wahrscheinlichste ist wohl, daß die transgredierenden oberkarbonischen Sedimente, die gleich folgen, einen großen Teil der Schiefer bedecken. Möglicherweise ist auch eine Überschiebung daran Schuld, wie Keidel deren mehrere in anderen Teilen des südlichen Tian-Schan nachweisen konnte.

II. Petrographische Beschreibung der Gesteinstypen.

1. Der Granit.

Die gewaltige Granitmasse des südlichen Musart-Tals stellt, wie oben schon angedeutet wurde, kein einheitliches Massiv dar. Dieses ist vielmehr aus mindestens zwei durchaus verschiedenen Graniten zusammengesetzt, die wohl auch verschiedenes Alter haben.

Das größere, wahrscheinlich ältere Massiv besteht aus einem Granit, der in seiner normalen Ausbildung sehr grobkörnig ist und eine grauliche Farbe hat, welche durch den ungewöhnlich reich vorhandenen Quarz häufig einen bläulichen Ton erhält, oder durch grünlich-gelbe Flecken, die auf einen Gehalt an Epidot schließen lassen, mehr ins Grünliche neigt. Gegen die Ränder des Massivs beobachtet man beiderseits eine mehr und mehr hervortretende Parallelstruktur, womit gleichzeitig der Quarzgehalt abzunehmen scheint. Und in den äußersten Randzonen ist der im Kern völlig richtungslose Granit zu typischem Augengneis geworden mit zahlreichen Feldspataugen, die durchschnittlich 2—3 cm groß sind und von starken Lagen von Biotit umflasert werden.

Die zur mikroskopischen Untersuchung vorliegenden Gesteinsproben weisen eine granitische Struktur auf; im Kerne des Massivs ist sie richtungslos, zum Rande hin nimmt

der Glimmer eine parallele Orientierung an. Unter dem Mikroskop erweisen sich die Granite als ziemlich zersetzt und zertrümmert.

Drei Feldspäte sind in jedem Schliff zu beobachten: Orthoklas, Oligoklas-Andesin und Mikroklin. Während das Mengenverhältnis des Orthoklases zum Plagioklas annähernd konstant bleibt, variiert die Menge des Mikroklins ziemlich stark. Meistens bleibt er sehr hinter der Menge der übrigen Feldspäte zurück; in einem einzigen Falle fällt auf ihn der Hauptanteil.

Der Orthoklas und der Plagioklas sind durchweg ziemlich getrübt durch Serizitbildung und stellenweise auch durch größere oder kleinere Fetzen von Epidotmineralien und Chlorit. Der Mikroklin ist im Durchschnitt ziemlich frisch; nur hier und da bemerkt man auf den Rissen Kalkspatimprägnation. Im Mikroklin schwimmen Kristalle von Plagioklas und Orthoklas; bisweilen sind die letzteren perthitisch verwachsen.

Quarz bildet mit Mikroklin die letzte Ausfüllungsmasse ohne jegliche Andeutung einer Kristallform; er ist immer in geringerer Menge vorhanden als der Feldspat und stets mehr oder weniger zertrümmert und zeigt darum undulöse Auslöschung. Stellenweise ist er völlig zu Sand zermalmt und weist dort die charakteristische Mörtelstruktur auf.

Biotit ist durchweg in verhältnismäßig geringer Menge vertreten; er ist großtafelig ausgebildet und stellenweise ziemlich stark umgewandelt und zwar meist in Epidot und Zoisit; ferner in Titanmineralien: Titanit, Anatas und Titaneisen; Chloritbildung ist ziemlich untergeordnet.

Von den akzessorischen Gemengteilen sind zu nennen Orthit in größeren Körnern im Biotit eingewachsen, ferner einige vorzüglich ausgebildete Zirkonkriställchen und Apatit.

Turmalin kommt ganz vereinzelt in kleinen Nädelchen vor. Von den Erzen ist außer Titaneisen noch Eisenkies als Imprägnation auf den Spaltrissen vertreten. Mit seiner Zunahme läuft eine Zunahme der Zersetzung des ganzen Gesteins parallel.

Ganz abweichend ist der Granit, der sich an die nördliche Augengneiszone anschließt. Seine Ausdehnung beträgt noch gegen 10 Kilometer. Er zeigt eine ziemlich außergewöhnliche Ausbildung. Es ist ein weißes, aplitähnliches Gestein, das sehr arm ist an dunklen Bestandteilen. Feine Biotitlagen geben ihm ein schlieriges Aussehen. Die Unterschiede in Bezug auf Struktur und Zusammensetzung sind an den verschiedenen Stellen des Massivs nur gering. Doch ist eine Verschiedenheit dadurch gegeben, daß die Biotitlagen in den Randzonen eine schieferige Beschaffenheit bedingen, während der Biotit im Kern des Massivs mehr oder weniger richtungslos angeordnet ist.

Die mikroskopische Untersuchung bezieht sich auf vier Gesteinsproben. Auffallend ist sogleich die ausgesprochene granulitische Struktur, wie sie für die Zweiglimmergranite so charakteristisch ist. An einzelnen Stellen wird diese zur pegmatitischen Struktur.

An der Zusammensetzung beteiligen sich drei Feldspäte, Orthoklas, Mikroklin und Oligoklas (vereinzelt auch Oligoklas-Andesin) in annähernd gleichen Mengen.

Der Orthoklas ist durchweg frisch. Nur an wenigen Stellen zeigt er schwache Trübung durch Serizitbildung. Hier und da ist er perthitisch verwachsen mit Plagioklas. Seine Form ist ziemlich unregelmäßig. Der Mikroklin ist mit Quarz die letzte Ausfüllungsmasse. Quarz bildet gerade im Mikroklin mit Vorliebe gerundete Einschlüsse. Trübung

durch serizitische Mineralien ist selten. Im Gegensatz dazu ist der Oligoklas durchgehends ganz erfüllt von Serizit, wozu an einigen Stellen noch Epidot und Zoisit kommen.

Der Quarz tritt zuweilen in größeren unregelmäßigen Körnern und Fetzen auf. Meist erfüllt er in gerundeten Körnern die verschiedenen Feldspäte, besonders den Mikroklin, oder er ist mit diesen direkt verwachsen. Wo er selbständig auftritt, führt er als Einschlüsse Apatit- und Biotitkriställchen. Kataklase ist kaum nachweisbar.

Muskovit und Biotit sind nicht sehr häufig. Die Kristalle sind meist ziemlich groß. Der Muskovit ist stets frisch, während der Biotit oft zu Chlorit zersetzt ist. Die Chloritisierung kommt in den verschiedensten Abstufungen vor; indem sie auf den Spaltrissen beginnt, wandelt sie nach und nach den ganzen Biotit um. Den Chlorit begleiten stellenweise Epidot, Klinozoisit und Titaneisen mit Titanit und Anatas, die darum sicher als Nebenprodukte der Chloritbildung anzusehen sind.

Als akzessorische Mineralien sind nur Apatit und sehr wenig Zirkon zu nennen.

Innerhalb des Massives treten einige lamprophyrische Gänge auf, und ebenso setzt sich der Nordrand des Massivs aus einer verhältnismäßig mächtigen Lamprophyrzone zusammen. Betrachten wir zunächst das Gestein, das die Gänge bildet.

Es ist von grünlicher bis schwarzer Farbe und ziemlich feinkörniger Ausbildung. Auf den unregelmäßigen Bruchflächen nimmt man recht viel Biotit wahr. Dieser tritt aber im Dünnschliff stark zurück gegenüber der gemeinen Hornblende, die einen bedeutenden Bestandteil bildet. Der Feldspat ist zum geringeren Teil Orthoklas. Der Plagioklas ließ sich infolge des Mangels geeigneter Schnitte nur schwer bestimmen. Der Lichtbrechung nach steht er zwischen Andesin und Labrador. Er ist in der Regel frisch. Nur an verhältnismäßig wenigen Stellen zeigt er Zersetzung zu Serizit und Epidotmineralien. Auch enthält er oft Einschlüsse von Apatitkriställchen. Quarz ist fast gar nicht vorhanden. Anataskörner, die ein Eisenerz begleiten, charakterisieren dieses als Titaneisen. Auffallend ist der bedeutende Gehalt an Titanit in großen meist unregelmäßigen Fetzen.

Das Gestein der Randzone ist von dem der Gänge durchaus verschieden. Es ist plattig bis schieferig ausgebildet und zeigt schwarze bis bräunliche Farbe, die vom hohen Biotitgehalt herrührt.

Im Dünnschliff erscheint die Struktur als richtungslos körnig. Der Biotit erfüllt in mittelgroßen Blättchen das Gestein ohne bestimmte Anordnung. Vereinzelt ist er chloritisiert. Der Feldspat ist Orthoklas und Labrador, beide sind stark zersetzt. Häufig bemerkt man hier Einschlüsse von Biotitkriställchen und zahlreichen kleinen, gerundeten Quarzkörnern. Als Zersetzungsprodukt sind neben Chlorit und Serizit noch Anatas und Rutil zu nennen, sowie etwas Kalkspat, der einige Risse ausfüllt.

2. Die südliche Kontaktzone.

Die schwache Entwickelung der südlichen Kontaktzone wurde oben schon erwähnt und auch der wahrscheinliche Grund dafür angegeben. Wir gehen daher sogleich über zur Beschreibung der Gesteine, welche diese Zone zusammensetzen.

Unmittelbar am Granitkontakt steht ein gneisartiges Gestein an mit reichem Glimmergehalt. Die Übereinstimmung mit den „Gneisen" des Wechselgebirges in

Niederösterreich geht bis zur völligen Gleichheit. Da an den höchsten Stellen des Wechselgebirges granitische Injektionen nachweisbar sind, so ist es klar, daß hier eine Vermengung des granitischen mit dem sedimentären Material stattgefunden hat. Es sind vom Granit resorbierte Schiefer, die den Granitlakkolithen überlagern. Ganz dasselbe Gestein finden wir im südlichen Musart-Tal unmittelbar am Granitkontakt. Somit kann bezüglich der Natur dieses Gesteines kaum mehr ein Zweifel vorhanden sein.

Die mikroskopische Untersuchung bestätigt die Gleichheit vollkommen. Das Gestein wird von breiten Bändern von Muskovit und Chlorit, mannigfach gewunden, verbogen und gestaut, durchzogen. Man beobachtet hier stellenweise Andeutung von helizitischer Struktur. In diesen Bändern findet sich besonders reichlich Epidot. Die Grundmasse besteht aus Feldspat und Quarz, wobei der Feldspat den Quarz überwiegt. Beide durchdringen sich ziemlich regellos. Gewöhnlich bildet der Quarz Einschlüsse im Feldspat, die zuweilen helizitisch angeordnet sind. Hin und wieder stellt sich auch echte Pflasterstruktur ein. Der Feldspat gibt sich als Albit zu erkennen, der vereinzelt zonar umgeben ist von Oligoklas. Er ist ganz erfüllt mit Einschlüssen von Chlorit und Muskovit in kleinen Kristallen, sowie von Orthit, Epidot und Zoisit in unregelmäßigen Körnern. Außerdem findet sich noch etwas Rutil und Titaneisen, das entweder getrübt ist durch Leukoxenbildung, oder einen Rand von Titanit oder Anatas aufweist.

Weiter südlich verliert das Gestein seinen hohen Glimmergehalt. Der Glimmer bildet nur mehr feine Blättchen in dem vorherrschend aus Quarz und Feldspat bestehenden Gestein. Die parallel gelagerten Glimmerlamellen bedingen eine deutliche Schieferung. Allmählich geht auch der Feldspat verloren und es entwickeln sich typische Glimmerschiefer mit starken Quarzlagen und aushaltenden Membranen von Muskovit.

Das mikroskopische Bild weicht insofern von dem des ersten Gneises ab, als die breiten, gewundenen Lagen von Glimmer mehr verschwinden. Diese bilden nur mehr Schnüre im Gestein. Auffallend ist hier die an mehreren Stellen zu beobachtende parallele Verwachsung des Glimmers mit blauem Turmalin, der durch die stärkere Absorption senkrecht zur Hauptzone deutlich hervortritt. Quarz und Feldspat verhalten sich stellenweise noch genau wie im vorigen Gestein. Der Feldspat zeigt reichlich Einschlüsse von Glimmerkriställchen. Gewöhnlich herrscht die Pflasterstruktur vor, die öfters recht deutlich wird. Hier und da sind die Quarzkörner fest verzahnt, ohne daß man aber erhebliche Druckwirkungen wahrnimmt, denn sie zeigen weder Sprünge noch undulöse Auslöschung. Chlorit und Epidotmineralien treten sehr in den Hintergrund. Wenig Titaneisen erkennt man an der Leukoxenbildung. Bemerkenswert ist noch der Graphit, der in feinen Schüppchen an einzelnen Stellen in nicht unbedeutenden Mengen auftritt.

In ganz normaler Weise folgen auf die Glimmerschiefer Gesteine von phyllitähnlichem und schließlich ganz grauwackenartigem Habitus. Sie haben graue Farbe, deutliche Schieferung und zeigen eine doppelte Fältelung. Sie werden wahrscheinlich transgredierend von den nicht umgewandelten oberkarbonischen Sedimenten überlagert.

Von Einlagerungen in dieser normalen Serie kontaktmetamorpher „kristallinischer Schiefer" sind besonders zu erwähnen Lagen von dunklen nicht sehr deutlich schieferigen Grünschiefern, sowie ein ziemlich mächtiger Granitgang.

Unter dem Mikroskop zeigt es sich, daß der Grünschiefer zum allergrößten Teil aus gemeiner Hornblende besteht, deren Individuen entweder wirr durcheinanderliegen, oder

sich zu strahligen Aggregaten vereinigen. Die Ausfüllung bildet hauptsächlich Feldspat, während Quarz nur sehr wenig vorhanden ist. Bedeutend ist der Gehalt an Titanit. Er tritt in großen, prächtig lamellierten Körnern auf, die hier und da Einschlüsse von Rutil aufweisen. Dazu kommen noch geringere Mengen von Anatas, Chlorit, Granat, Epidot, Zoisit und Klinozoisit.

Das Gestein des Eruptivganges ist nach den untersuchten Proben etwas wechselnd. Bald ist es gröber, bald feinkörniger, richtungslos oder schlierig, heller oder dunkler.

Die zur mikroskopischen Untersuchung vorliegenden Proben weisen sämtlich eine richtungslos körnige granitische Struktur auf. Alle sind ziemlich stark kataklastisch und mehr oder weniger zersetzt.

Es sind besonders zwei Feldspäte, die sich am Aufbau des Gesteins beteiligen: der Orthoklas und der Oligoklas-Andesin; beide sind in ungefähr gleichen Mengen vertreten. Den Mikroklin trifft man nur ganz untergeordnet an. Die Trübung sowohl des Orthoklases als auch des Plagioklases tritt nur stellenweise stärker hervor und wird verursacht durch Serizitbildung und Fetzen von Epidot und Zoisit. Perthitische Verwachsung zwischen Orthoklas und Plagioklas ist ganz untergeordnet vorhanden. Rundliche Plagioklaskörner sind von wurmförmigem Quarz („quartz vermiculé") durchwachsen. Sowohl der Orthoklas als der Plagioklas zeigen in der Regel Zonarstruktur. Der nur in winzigen Mengen vertretene Mikroklin ist äußerst frisch.

Der Quarz tritt in ganz unregelmäßigen Lappen auf; die Mengenverhältnisse wechseln ziemlich stark; stellenweise ist er in geringer Menge vorhanden und an anderen Stellen sehr massenhaft. Die Kataklase ist ziemlich bedeutend. Größere Quarzindividuen umschließen öfter Feldspat, Glimmer und Hornblende.

Biotit und grüne Hornblende sind ziemlich stark und in gleichen Mengen vertreten, beide Mineralien sind lokal zum Teil umgewandelt in Chlorit, Epidot, Zoisit und Titanit unter Ausscheidung von Titaneisen. Orthit ist nur in ganz geringer Menge zu beobachten. Man trifft auch Epidot und Zoisit und Titanit (in der charakteristischen Briefkouvertform an), die sicher keine Zersetzungsprodukte sind. Apatit und Zirkon sind ziemlich spärlich vertreten.

Schwefelkiesimprägnation findet sich dort besonders stark, wo die Zersetzung am meisten vorgeschritten ist.

3. Die nördliche Kontaktzone.

Da die nördliche Kontaktzone eine ungemein bedeutende Ausdehnung hat und die mannigfaltigsten Bildungen in sich begreift, so muß man sich nach einer zweckmäßigen Gruppierung umsehen, um den Überblick nicht zu verlieren. Durch die petrographische Beschaffenheit ist schon eine natürliche Zweiteilung gegeben. Vom nördlichen Rande des Granitmassivs bis zur Mündung des Seitentales Turpal-tsche liegt eine umfangreiche und wechselvolle Serie der verschiedensten kristallinischen Gesteine vor, in denen wohl alle Arten von Sedimenten, vom Konglomerat bis zum Tonschiefer und Kalkstein vertreten sind. In diesen treten auch an mehreren Stellen Eruptivgesteine auf. Vom Turpal-tsche-Tal an herrschen marmorisierte Kalke vor mit untergeordneten Einlagerungen von Hornfelsen und hornfelsähnlichen Bildungen, sowie mit stark hervortretenden Gängen und Lagern von Quarzporphyr. Gehen wir nun über zur Beschreibung des ersten Abschnittes.

a) Die Gesteine vom Granitkontakt bis zum zentralen Marmormassiv.

Im ersten Abschnitte wurde noch die zweifellos zum Granit gehörige lamprophyrische Randzone besprochen. An sie schließt sich eine Reihe durch Struktur, mineralogische Zusammensetzung und äußere Erscheinungsform voneinander weit abweichender Gesteine an, von welchen nur in den Grundzügen eine Feststellung der Reihenfolge möglich ist bei der außerordentlichen Mächtigkeit, welche dieser Komplex besitzt. Wegen der ausgedehnten Entwickelung von Hornfelsen kann man sie zusammenfassend als die Zone der Hornfelse bezeichnen, obwohl ihre mannigfachen Einlagerungen öfter eine recht große Bedeutung erreichen.

Vor allem muß eine kleinere Partie aus der Hauptmasse ausgeschieden werden, welche zu beiden Seiten des Kone-Chailik-Tals, das etwas nördlich von Chailik-Mabuse abzweigt, ansteht und sich durch höchst eigentümliche Beschaffenheit auszeichnet. Diese Serie beginnt nach einer schmalen Zone hornfelsartiger Gesteine, die das Granitmassiv umgeben, mit einem normalkörnigen, rötlichen Granit, der gegen das erwähnte Nebental unter die Moräne untertaucht. Die mikroskopische Übereinstimmung mit dem granulitischen Granit ist nicht sehr groß; doch beobachtet man auch hier, wenigstens stellenweise, die granulitische Struktur, sowie pegmatitische Verwachsung von Quarz und Orthoklas. Der Orthoklas erscheint in ziemlich großen Kristallen, in die Plagioklas, Quarz und Biotit eingewachsen sind. Der Plagioklas ist ein Oligoklas. Beide Feldspäte sind stark zersetzt und getrübt durch Serizit und Kalkspat. Der Quarz ist oft sehr stark zertrümmert. Der Biotit ist zum großen Teil in Chlorit umgewandelt. Titaneisen begleitet häufig den Biotit. Muskovit tritt nur in untergeordneten Mengen auf. Der Apatit ist meist farblos, vereinzelt auch zonar gefärbt. Der Zirkon zeigt gut ausgebildete Kristalle. Dazu kommen noch Rutil und Anatas, wahrscheinlich entstanden bei der Zersetzung des Biotites.

Möglicherweise ist dieser Granit eine Apophyse des granulitischen Massivs. Der Erhaltungszustand ist allerdings sehr verschieden; denn während der Granit im Massiv sehr wenig Kataklaserscheinungen aufweist und ziemlich frisch ist, ist hier der Granit stark zersetzt und zertrümmert.

Wenn man die von Moränen bedeckten Gehänge des genannten Seitentales überschritten hat (Fig. 1), so kommt man an vollständig dichte Dolomite von graulicher Farbe und dem normalen Habitus gewöhnlicher Sedimente. Daß das Gestein trotz dieses äußeren

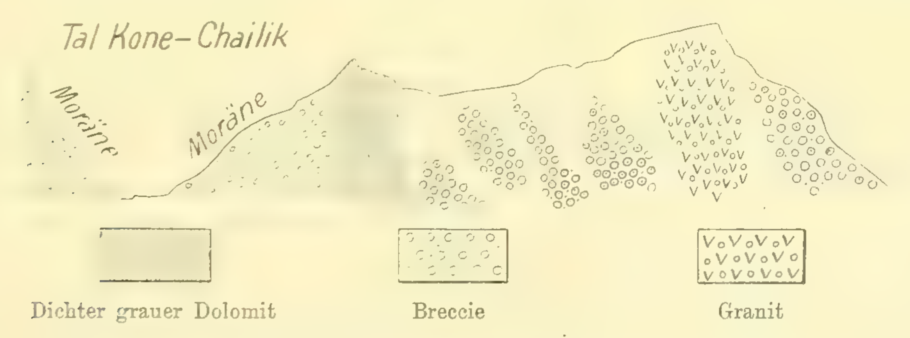


Fig. 1. Profil durch das Kone-Chailik-Tal nördlich von Chailik-Mabuse.

Habitus, der auch bei der mikroskopischen Untersuchung gleichbleibend entgegentritt, ein echtes Kontaktgestein darstellt, das beweist die Erscheinung, daß es stellenweise direkt gebändert ist durch zweifellose Granitlagen von normaler Struktur und verhältnismäßig grober Ausbildung.

Im Dünnschliff ist, wie schon bemerkt, nirgends eine Änderung der Struktur des Dolomites, selbst direkt am Kontakt mit den Granitlagen, zu erkennen, nur daß hin und wieder einzelne Feldspäte des letzteren im Dolomite schwimmen und der Granit selbst von Karbonaten ganz durchsetzt ist. Der Granit hat ziemlich normale Zusammensetzung und Struktur und enthält sowohl Biotit als Muskovit. Bemerkenswert sind gefärbte, zonar struierte Prismen von Apatit, kleine Fetzen von Turmalin und namentlich ein hoher Gehalt an Schwefelkies, der sich besonders in der Nähe der Granitadern anhäuft.

Derartige Bildungen innerhalb von stark umkristallisierten Gesteinsserien erscheinen auf den ersten Blick immerhin recht merkwürdig. Die hier hervortretende Bildung ist aber keineswegs vereinzelt. Vor allem mag darauf hingewiesen werden, daß die Randzone der sogenannten Kalkkeile im Berner Oberland in zahlreichen Fällen durchaus übereinstimmende Beschaffenheit aufweisen. Im südlichen Musart-Tale aber geben uns die Einlagerungen von echt granitischer Natur den absoluten Beweis dafür, daß diese Bildungen den Wirkungen der kontaktmetamorphen Prozesse des Granits ausgesetzt gewesen sein müssen. Wie man sich im Einzelnen die dabei in Betracht kommenden Vorgänge denken soll, kann hier nicht eingehend abgeleitet werden. Es mag genügen, zu bemerken, daß die Beobachtung mit Sicherheit darauf hinweist, daß lokal selbst in den inneren Kontaktzonen noch die Karbonatgesteine, die doch so leicht kristallinische Struktur annehmen, durch eine Metamorphose zu Dolomit werden und durch eine diese häufig begleitende, untergeordnete Verkieselung vor weiterer Umwandlung bewahrt bleiben.

An den Granit schließt sich eine eigentümliche Breccie an. In einem meist dunkelgrauen bis schwärzlichen Zement umschließt sie sehr verschiedenartige Gesteinsbruchstücke und umhüllt wiederum einen Putzen von rötlichem Granit. Die einzelnen Gesteinsfragmente, welche mehr oder weniger gerundet und durchschnittlich 3—4 cm groß sind, bestehen aus Hornfels, Gneis, Glimmerschiefer u. s. w. Selbst der rötliche Granit, der den Putzen bildet, ist darunter vertreten. Noch merkwürdiger wird das Gebilde durch echte aplitische Injektionsadern, sowie durch die Erscheinung, daß die Breccie stellenweise im Granit zu schwimmen scheint. Dieser zeigt mikroskopisch eine weitgehende Zertrümmerung. Quarz und Feldspat sind zerdrückt, der Biotit meist zersetzt und mehr oder weniger verbogen und gestaut. Die granulitische Struktur, die offenbar vorhanden war, ist nur mehr in Andeutung zu erkennen. Ein Zweifel, daß hier eine dem Glauch von Nagyág analoge Reibungsbreccie vorliegt, könnte bei der petrographischen Beschaffenheit dieser Bildung kaum aufkommen, wenn sie nicht weiter nach Norden zu in eine arkoseähnliche Bildung von rötlicher Farbe übergehen würde, welche aus mannigfaltigen Mineralien und Mineralbruchstücken in einem Kalkspatzement bestehend, eigentlich sedimentären Charakter an sich trägt. Eine Einwirkung kontaktmetamorpher Agentien läßt sich an dieser nicht mit Sicherheit erkennen.

Den größten Teil der im Obigen abgegrenzten Zone bis zum Tale Turpal-tsche bilden eigentliche Kontaktgesteine: echte Hornfelse, Glimmerschiefer, Knotenschiefer und gneisähnliche Gebilde, hin und wieder mit granitischen Intrusionen. Der Charakter dieser

Gesteine, von recht wechselnder Beschaffenheit, soll kurz skizziert werden. Beginnen wir mit der Beschreibung der Hornfelse.

a) Die Hornfelse.

Der Habitus der ursprünglichen Sedimente kommt in den mannigfaltigen Hornfelsbildungen meist recht gut zum Ausdruck. Da tritt uns zunächst ein Gestein entgegen von grauer bis schwarzer Farbe und unregelmäßigem Bruch. Es ist sehr kompakt mit etwas rauher Oberfläche. An verschiedenen Stellen treten deutliche Einschlüsse hervor, die man noch besser im Dünnschliff erkennt. Diese Einschlüsse sind bald eckige Quarzkörner, bald gerundete Gerölle von Glimmerschiefer und ähnlichen Gesteinen.

Unter dem Mikroskop besteht die Grundmasse aus einem Aggregat von feinen Quarzkörnern und Feldspat. Um diese legt sich eine Masse von feinschuppigem Biotit und wenig Muskovit. Hier finden sich massenhaft Nadeln von Turmalin, ferner etwas Titanit, Anatas, Apatit und Rutil. Letzteres Mineral tritt in bedeutenden Mengen und recht großen Körnern und Zwillingskristallen in dem Glimmerschiefereinschluß auf. Wir haben es hier offenbar mit einem konglomeratischen Sandstein zu tun, bei dem das tonige Bindemittel durch die Kontaktmetamorphose umkristallisiert wurde. Darüber läßt die mikroskopische Untersuchung keinen Zweifel.

Damit verwandt ist ein anderer Hornfels von schwarzer Farbe und rauhen Bruchflächen, auf denen man feine Biotitblättchen sieht.

Das mikroskopische Bild ist dem des vorigen Gesteins völlig gleich, nur daß die Einschlüsse von Geröllen fehlen. Zu dem Mineralbestand kommt noch etwas Kalkspat, Epidot, Klinozoisit und Titaneisen. Auch diesen Hornfels erkennt man deutlich im Mikroskop als kontaktmetamorph umgewandelten Sandstein.

Allmählich nimmt der Gehalt an Biotit ab, wobei die Quarz- und Feldspatkörner sich enger aneinanderschließen. Das hierher gehörige Gestein ist schwarz, feinkörnig, ziemlich hart und wenig geschichtet. Auf den Schichtfugen befinden sich Quarzinjektionen, in denen man mit der Lupe deutlich pechglänzende Körner und Prismen von Orthit wahrnimmt. Auf den Bruchflächen beobachtet man wenig roten Granat, der im Schliff sich kaum nachweisen ließ.

Quarz erkennt man im Dünnschliff als Hauptgemengteil. Er ist sehr feinkörnig, während er in den Injektionsadern recht grob ausgebildet ist. Hier sind die einzelnen Körner stark verzahnt und die Kataklase geht oft bis zur Mörtelstruktur. Neben dem Quarz bemerkt man auch etwas Albit. Biotit und Muskovit sind nicht sehr häufig. Ein verrostetes Karbonat wird Braunspat sein. Apatit bildet größere und kleinere Kristalle, Turmalin eine Reihe größerer blauer Fetzen.

Zwei Proben von quarzitischen Hornfels stellen den ursprünglich ziemlich reinen Quarzsandstein dar. Beides sind schmutzig-rötliche bis gelblich-braune Gesteine, die man makroskopisch schon als Sandsteine erkennt. Die eine Probe ist gebändert durch hellere Partien, die andere durch biotitreichere Lagen.

Beide Gesteine zeigen unter dem Mikroskop typische Pflasterstruktur. Sie bestehen zum größten Teil aus Quarzkörnern. In dem durch hellere Partien gebändertem Gestein kommt dazu noch ziemlich viel Kalkspat. Die feinen Biotitblättchen, die in nicht sehr bedeutenden Mengen vorkommen, durchsetzen hier in paralleler Anordnung die Quarz-

körner, während sie in dem anderen Gestein senkrecht zur Bänderung stehen. Im übrigen sind die Gesteine arm an Mineralien. Es sind wenig Muskovit, Hornblendefetzen, Chloritoid, Titanit, Anatas, Rutil, Schwefelkies und Turmalin.

Stellenweise werden diese Hornfelse sehr graphitreich; der Graphitgehalt wird in einer Probe so bedeutend, daß das Gestein ein fast kohliges Aussehen bekommt. Auf den undeutlichen Schieferungsflächen nimmt man gelbe Flecken von Nontronit wahr, sowie feine, aber aushaltende weiße Schnüre mit Feldspat.

Der Dünnschliff ist an den meisten Stellen wegen des Graphites ganz undurchsichtig. Das Gestein besteht zumeist aus Quarz und Feldspat, die sich ziemlich unregelmäßig durchdringen und öfters durcheinander geknetet erscheinen. Größere Quarzkörner zeigen starke Druckwirkungen. Der Feldspat ist oft umgewandelt zu Serizit und Nontronit, der die makroskopisch zu beobachtenden gelben Flecken bildet. Von sonstigen Mineralien sind zu nennen außerordentlich viel Rutil und Turmalin in gut ausgebildeten, größeren Prismen, die senkrecht zur Schieferung stehen.

An mehreren Stellen endlich treten Kalksilikathornfelse auf von schwärzlicher Farbe und meist plattiger Absonderung. Die im Dünnschliff untersuchte Probe ist gebändert durch helle Partien von mittelkörnigem Kalk. An den dunklen Stellen des Gesteins ist der Kalkspat, der auch hier den Hauptbestandteil bildet, feinkörnig bis undeutlich kristallinisch. Er ist stark erfüllt von Graphit, der meist in feinen Schüppchen, vereinzelt auch in breiten Bändern auftritt. Hier bemerkt man sehr kleine, radialstrahlig angeordnete Individuen eines Minerals, das höchst wahrscheinlich der Chloritgruppe angehört. An der Grenze zwischen den grobkörnigen und den feinkörnigen Partien zieht eine Schicht von feinem Quarz und Feldspat durch, die ebenfalls erfüllt ist von Graphit.

Anschließend hieran wäre noch ein sedimentärer Gneis zu erwähnen, ein graues Gestein von gneisähnlichem Habitus und schwacher Schieferung, stellenweise mit Injektionsadern von Quarz.

Quarz bildet unter dem Mikroskop den Hauptbestandteil. Er wird begleitet von ziemlich viel Albit, hin und wieder auch von Mikroklin. Kalkspat ist ebenfalls sehr häufig. Biotit erscheint bald in größeren, gut ausgebildeten Blättchen, bald in skelettartigen Kristallen. Hornblende bildet unregelmäßige, oft durchlöcherte Fetzen. Außerdem findet sich Apatit in großen prismatischen Körnern, ziemlich viel Titanit in großen Lappen, oft einen Rand um Titaneisen bildend, Schwefelkies, häufig verrostet, und wenige, aber große Individuen von blauem Turmalin.

β) Glimmerschiefer und Phyllit.

Gegenüber der großen Entwickelung der Hornfelse treten die übrigen Kontaktgesteine sehr in den Hintergrund. Was zunächst die Glimmerschiefer betrifft, so sind sie typisch nur an einer Stelle nahe am Kontakt entwickelt. Sie zeichnen sich aus durch einen ziemlichen Gehalt an Biotit, wodurch das Gestein schwach bronzefarben aussieht; diese Biotitschiefer, meist ohne Quarzlagen, gehen in echten Biotitfels über. In noch geringerem Maße sind Phyllite entwickelt, die kaum jemals typisch auftreten. Untergeordnet trifft man auch Knotenschiefer, von denen drei Proben vorliegen. Die eine ist ein phyllitähnliches, schieferiges Gestein mit sehr feinen Granatknötchen. Größer werden die Knoten in einer weiteren Probe. Es ist ein Glimmerfels von fast hornfelsartigem Habitus.

Unter dem Mikroskop beobachtet man viel Muskovit und etwas weniger Biotit als vorherrschende Gemengteile. Der Muskovit durchzieht das Gestein gewöhnlich in gewundenen Lagen. Der Biotit ist in der Regel feinschuppiger und häufig zu verfilzten Aggregaten vereinigt. Oft ist er in Chlorit umgewandelt. Zwischen den Glimmerlamellen findet sich Quarz, manchmal in größeren Individuen. Untergeordnet wird er von Feldspat begleitet, der starke Trübung zeigt. Roter Granat ist es, der die Knoten bildet. Er ist manchmal durchwachsen von Quarz und Glimmer. Dazu ist er erfüllt von Graphitstaub, der auch reichlich über das ganze Gestein verteilt ist. Apatit und Turmalin sind nicht gerade häufig. Außer einem Eisenerz, das in recht feinen Körnern vorkommt und einigen größeren Fetzen von Schwefelkies beobachtet man noch vereinzelt Rutilkörner.

Recht große Knoten von etwas eigentümlicher Beschaffenheit zeigt eine dritte Gesteinsprobe. Das Gestein hat phyllitartiges Aussehen, ist grau und seidenglänzend. Auf den Schichtflächen befinden sich ungefähr zentimetergroße Knoten, die vorherrschend aus Glimmer bestehen.

Unter dem Mikroskop bemerkt man in den Knoten nur eine Anreicherung des glimmerartigen Minerals, das zum größten Teil Chlorit ist. Auch hier ist, wie im ganzen Gestein, der Chlorit umgeben von einer feinkörnigen Masse von Quarz, Feldspat, Biotit und etwas Muskovit. Vereinzelt nimmt man in den Knoten auch Granat wahr. Turmalin ist sehr reichlich vertreten. Ferner findet sich etwas Apatit und Zirkon. Über das ganze Gestein verteilen sich einerseits runde Körner, wahrscheinlich von Magnetit, andererseits ein feiner Staub von Graphit.

Als Einlagerungen in diesen zweifellosen Kontaktgesteinen trifft man eine Reihe abweichender, teils eruptiver, teils sedimentärer Gesteine. Von letzteren ist hauptsächlich eine im Profil gezeichnete mächtige Partie von Konglomeraten zu erwähnen, nach Keidels Angaben von grober Beschaffenheit mit violetter Grundmasse, von dem kein Material zur Untersuchung vorlag. Dagegen konnten wir zwei Proben von Quarzporphyr untersuchen, die den Hornfelsen bei Chailik-Mabuse eingelagert sind. Die eine Probe zeigt ein lichtes Gestein mit feinkörniger Grundmasse und zahlreichen Feldspateinsprenglingen. Das andere ist etwas bräunlich und durch Biotitmembranen etwas schieferig. Das mikroskopische Bild der ersteren zeigt zahlreiche, ziemlich gut umgrenzte Individuen von Orthoklas und Plagioklas, von welchen der letztere häufig serizitisiert ist. Dazwischen finden sich entweder Anhäufungen von Quarz oder eine aus Quarz und Feldspat bestehende Grundmasse in regellosen Körnern. Die übrigen Mineralien sind die gewöhnlichen. Oft macht sich eine Imprägnation von Karbonaten bemerkbar, und auch Schwefelkies ist in nicht geringer Menge vorhanden. Von ihm unterscheidet sich der andere Quarzporphyr nur durch den höheren Gehalt an Biotit.

In den oberen Teilen dieses Abschnittes werden die Hornfelse an mehreren Stellen durch Grünschiefer ersetzt, die zweifellos kontaktmetamorph umgewandelte basische Eruptivgesteine darstellen. Drei Proben wurden genauer untersucht.

Die erste Probe ist ein grünes, recht feinkörniges Gestein mit schwacher Schieferung. Auf einigen Flächen sieht man 1—3 cm lange Hornblendekristalle. Im Dünnschliff erkennt man als Hauptgemengteil Hornblende. Es ist die gemeine Hornblende, die aber etwas abweichende Färbung hat mit einem Stich ins Violette, was auf einen Gehalt an Titan schließen läßt. Die einzelnen Individuen liegen regellos nach allen Richtungen durcheinander.

Die Zwischenräume füllen Quarz und Feldspat aus. Letzterer ist der Hauptsache nach Andesin, während vereinzelt auch Oligoklas-Andesin beobachtet wurde. Ein Eisenerz, das in zahlreichen zum Teil skelettartigen Körnern auftritt, läßt sich nicht näher bestimmen, da es durchaus frisch ist. Es kann sowohl Eisenglanz als auch Titaneisen sein.

Eine zweite Probe ist etwas dunkler und durchsetzt durch Bänder von grobkörnigem Kalkspat. Die Hornblende ist auch hier der Hauptgemengteil in derselben Ausbildung. Der Quarzgehalt ist etwas größer als in der vorigen Probe. Der Feldspat wechselt wieder zwischen Andesin und Oligoklas-Andesin. Wo der Kalkspat vorherrscht, ist er grobkörnig ausgebildet. Besonders in der Nähe der kalkreicheren Partien, zum Teil auch von diesen eingeschlossen, treten Epidot und Klinozoisit auf. Apatit findet man in großen Basisschnitten, sowie in kleinen Prismen. Titanit läßt sich in ziemlichen Mengen und großen Körnern nachweisen.

Die dritte Probe endlich unterscheidet sich von den vorigen durch einen bedeutenden Gehalt an Biotit, der stellenwese ganze Lagen im Gestein bildet. Mikroskopisch stimmt dieses vollständig nach Struktur und Mineralbestand mit der ersten Probe überein, nur tritt etwas Braunspat auf, der teilweise verrostet ist.

Anschließend wäre noch ein eigenartiger Serpentin zu erwähnen, der in Blöcken etwas nördlich von Chailik-Mabuse gefunden wurde. Das Gestein besteht aus dichten, schwärzlichen Serpentinbrocken, die von einem schuppigen, talkähnlichen Aggregate wie eine Breccie durchsetzt werden.

Die wenig mächtige Kalkeinlagerung dieses Abschnittes stimmt mit den entsprechenden Vorkommnissen der folgenden Zone vollständig überein.

b) Das zentrale Marmormassiv.

Dieser Abschnitt zeichnet sich vor dem besprochenen besonders dadurch aus, daß er zum allergrößten Teil aus kristallinischen Kalken und Dolomiten besteht. Von der Ausdehnung dieser Sedimente kann man sich einen Begriff machen, wenn man bedenkt, daß die Kalkzone mit dem Ende des Profils nicht abschließt, sondern sich den Gletscher entlang etwa 18 km bis zum Paß und noch darüber hinaus, andernteils ebenso weit nach Westen erstreckt. Der Hauptsache nach haben wir einen weißen Kalk vor uns, der bald gröber, bald feiner körnig ausgebildet ist. Die dolomitischen Partien zeichnen sich, wie immer, durch besonders feinkörnige Beschaffenheit aus. Auch der graue Kalk mit großen Tremolitkristallen, der immer wieder mit den weißen Kalken wechsellagert, ist sehr feinkörnig. Unter den weißen Marmoren finden sich so reine, durchscheinende Muster, daß sie den Vergleich mit denen von Laas oder Pentelikon wohl aushalten können. Durch den Wechsel der grauen und weißen Kalke tritt das Maß der Knetung und Verbiegung, wie sie die Granitintrusion im Gefolge hatte, deutlich hervor. (Figur 3, Tafel I.)

Mit den Kalken wechsellagern Hornfelse und hornfelsähnliche Bildungen, deren verschiedene Vorkommnisse wir hier näher betrachten wollen. Südlich von Tamga-tasch, wo die Kalke besonders stark geknetet sind, ist es ein biotitreicher Hornfels, der sich in diese einschaltet. Es ist ein dunkles, grobschieferiges Gestein mit schwachem Bronzeglanz und splittrigem Bruch. Eine Bänderung durch hellere und dunklere Partien ist makroskopisch zu beobachten. Mikroskopisch erkennt man, daß das Gestein zumeist aus Biotit besteht, dessen Gehalt in den einzelnen Lagen wechselt. Die Zwischenräume zwischen den

Biotitblättchen füllen Quarz und Kalkspat aus, beide sehr feinkörnig ausgebildet. Graphit durchzieht das Gestein in breiten Bändern parallel zur Schieferung. Sonst beobachtet man noch wenig Apatit, Titanit, Chloritoid und Schwefelkies, der meist verrostet ist.

Aus dem Gebiete nördlich von Tamga-tasch wurden vier Hornfelse genauer untersucht. Der erste findet sich unterhalb der Moräne. Das Gestein ist grau bis schwarz, ziemlich kompakt und wenig schieferig. Hier und da stellen sich Quarzinjektionen ein. Die mikroskopische Untersuchung ergibt eine feine Grundmasse, die hauptsächlich aus Quarz, vielleicht auch zum Teil aus Feldspat besteht, und die ganz erfüllt ist von feinen Biotitblättchen. Kalkspat, der in geringeren Mengen, aber größeren Körnern auftritt, ist auf das ganze Gestein verteilt. Er findet sich auch in den Quarzadern und ist hier grobkörnig und mannigfach verzahnt. Die übrigen Mineralien sind einzelne größere Körner von Mikroklin, viel blauer Turmalin in großen Individuen, Chloritoid in ziemlich großen unregelmäßigen Kristallen und gut ausgebildete Prismen von Zirkon.

Die übrigen Hornfelse stehen an den Seitenwänden des Gletschers an. Es sind schwarze, nicht allzu harte Gesteine. Zwei von ihnen, die eine schwache Schieferung aufweisen, enthalten Injektionsadern von Quarz. Die mikroskopische Betrachtung gibt folgendes Bild. Das am meisten kompakte Gestein zeigt eine feinkörnige Grundmasse mit Pflasterstruktur und besteht aus Quarz und Feldspat. In dieser Grundmasse schwimmen ziemlich gleichmäßig verteilt feine Blättchen von Biotit. Ebenso gleichmäßig verteilt finden sich feine Körner von Titaneisen, die sich durch Leukoxenbildung zu erkennen geben. Dazu kommen noch kleine Körner von Anatas und gut ausgebildete Kristalle von Apatit. Als größere Einsprenglinge wären zu nennen Tafeln von Biotit und Muskovit, Quarzkörner und zum Teil schwarz umgrenzte Kristalle von Oligoklas-Andesin.

Der folgende, etwas schieferige Hornfels wurde in zwei Schliffen untersucht, von denen der eine annähernd parallel, der andere ziemlich senkrecht zur Schieferung liegt. Im Schliff parallel zur Schieferung beobachtet man ein ziemlich gleichmäßig körniges Aggregat von Kalkspat und Quarz. Biotit bildet kleine, unregelmäßige Blättchen. Der Graphit, der sich im ganzen Gestein findet, hält sich besonders an die biotitreicheren Partien. Muskovit ist wenig vorhanden, ebenso Turmalin. In dem zur Schieferung senkrechten Schliff tritt der Turmalin bedeutender hervor. Hier beobachtet man auch viel Chloritoid, der im anderen Schliff nicht zu finden war, sowie gemeine Hornblende in etwas eigentümlicher Ausbildung, meist in schlecht begrenzten, durchlöcherten Kristallen.

Die letzte Probe endlich enthält wieder Quarzinjektionen auf den Schichtflächen und Rissen. Unter dem Mikroskop beobachtet man eine feinkörnige Grundmasse, vorherrschend aus Quarz bestehend, in die viel Biotit in feinen Blättchen richtungslos eingestreut ist. Die Injektionsadern von Quarz enthalten auch etwas Muskovit. Im übrigen finden sich noch Einsprenglinge von Apatit in größeren prismatischen Kristallen, viel blauer Turmalin, etwas Zoisit und Chloritoid, ferner Rutil in zahlreichen Körnern und Zwillingen und etwas Zirkon, Anatas und zum Teil verrosteter Schwefelkies.

Sonstige nichtkarbonatische Kontaktgesteine mit Ausnahme eines nicht sehr typischen Glimmerschiefers sind in dem ganzen Gebiete nicht beobachtet worden.

Eine besondere Bedeutung für diesen Abschnitt haben die Vorkommnisse von Quarzporphyr, welche zum Teil als Einlagerungen zum Teil direkt gangförmig in den Kalken auftreten. (Fig. 2 und die Tafel I.) Nach den Mitteilungen Keidels spielen Quarzporphyre

namentlich an der Südseite des Tian-Schan eine Rolle (s. auch Merzbacher, Peterm. Mitt., Ergänzungsheft Nr. 49, S. 47). Sie finden sich hier in pflanzenführenden Sandsteinen und Konglomeraten des älteren Mesozoikums. Nördlich von Bai, d. i. östlich vom Musart-Tal, befindet sich eine Decke, die dem Bozener Quarzporphyr an Mächtigkeit und Ausdehnung nichts nachgibt. Die Effusion steht nach Keidels Beobachtungen mit den gebirgsbildenden Bewegungen des älteren Mesozoikums im Zusammenhang, in welche Zeit er auch die Bildung der zentralen Ketten verlegt.

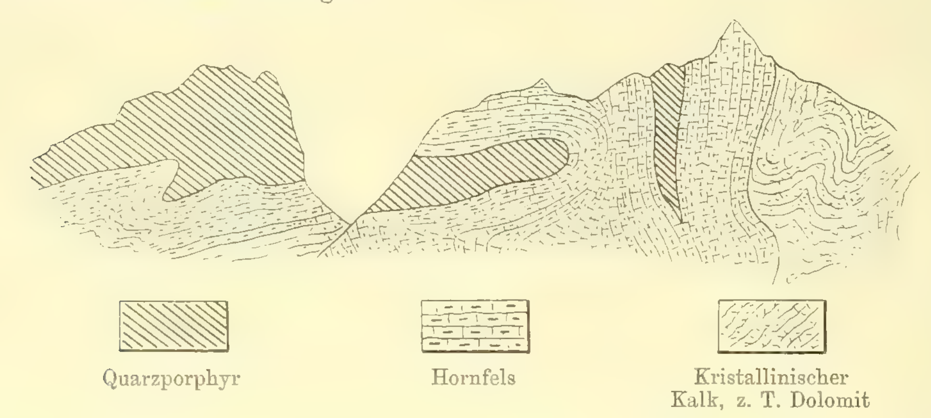


Fig. 2. Quarzporphyr in körnigem Kalk, etwas südlich vom Musart-Paß. (Länge ca. 800 m.)

Auch im oberen Teil des südlichen Musart-Tals trifft man den Quarzporphyr an mehreren Stellen; zunächst in einer mächtigen Masse südlich von Tamga-tasch, die den Eindruck eines Ganges macht und von welcher eine Apophyse südlich davon abzweigt (Tafel I, Fig. 3). Etwas nördlich davon steckt ein weiterer Gang in den Schiefern (Tafel I, Fig. 2). Noch weiter nach Norden längs des Gletschers bildet der dunkle Quarzporphyr stark hervortretende Lager in dem weißen körnigen Kalk (Tafel I, Fig. 1). Von diesem Quarzporphyr liegen nicht weniger als sieben Proben vor, welche die verschiedenen Übergänge vom normalen Gestein bis zu stark serizitisierten, mehr oder weniger unkenntlichen Bildungen darstellen.

Der normale Quarzporphyr zeigt eine graue bis schwärzliche Farbe und ist ziemlich feinkörnig. Auf den Bruchflächen treten 2—3 mm große Quarzkristalle hervor. Unter dem Mikroskop nimmt man zunächst eine sehr feine Grundmasse wahr, aus Quarz und Feldspat bestehend. Sie ist durchaus frisch und weist keine Spur von Serizitbildung auf. Nur an einigen Stellen zeigt sich in geringem Maße Kalkinfiltration auf Sprüngen und Rissen. Die Einsprenglinge sind vorherrschend Quarz und Feldspat. Der Quarz zeigt die typischen Korrosionsformen, meist gedrungene Doppelpyramiden, in welche die Grundmasse schlauchförmige Einbuchtungen eingefressen hat. Der Quarz weist starke Kataklase auf. Oft ist ein Kristall, der seine äußeren scharfen Umrisse bewahrt hat, im Innern in lauter kleinere Fragmente zerlegt, die verschieden auslöschen. Die einzelnen Teile des so zermalmten Kristalls sind unter sich in mannigfaltiger Weise verzahnt. Längere Kristalle sind gebogen und zerbrochen. Die Feldspateinsprenglinge sind vorherrschend Orthoklas in perthitischer Verwachsung mit Plagioklas. Er ist zum Teil scharf begrenzt zum Teil magmatisch korrodiert und führt Einschlüsse von sehr kleinen Quarzkristallen. Der Plagioklas variiert

in den verschiedenen Proben zwischen Albit-Oligoklas und Oligoklas-Andesin. Einzelne Einsprenglinge sind erfüllt von Mikrolithen von Kaliglimmer. Ursprünglicher Biotit ist zersetzt zu einem Aggregat von Eisenglanz und Chlorit, wobei die skelettartige Verteilung des Eisenglanzes noch die frühere Form des Biotites erkennen läßt. Eisenglanz findet sich im ganzen Gestein in geringer Menge und feiner Verteilung. Seltener sind größere skelettartige Körner. Außerdem beobachtet man noch etwas Orthit und Turmalin.

Eine zweite Probe ist dieser fast ganz gleich. Abweichend ist eine schwache, aber deutliche Schieferung. Auch das mikroskopische Bild stimmt mit dem vorigen durchaus überein. Beim Quarz reicht die Kataklase bis zur Mörtelstruktur. Von akzessorischen Mineralien konnten nachgewiesen werden wenig Zirkon, Titaneisen und Turmalin. Serizit durchzieht das Gestein in parallelen Schnüren, die sich um die Einsprenglinge herumwinden. Im ganzen ist die Veränderung des Porphyrs noch gering.

Eine weitere Probe ist makroskopisch kaum als Quarzporphyr zu erkennen. Mit der Lupe sieht man einzelne sehr kleine Quarzeinsprenglinge. Das Gestein ist gleichmäßig dicht und von rötlicher Farbe. Unter dem Mikroskop unterscheidet sich das Gestein, was Struktur und Zusammensetzung angeht, in nichts von den vorhergehenden Proben. Die Kataklase macht sich an den Quarzeinsprenglingen lange nicht so stark bemerkbar. Sie offenbart sich nur in der undulösen Auslöschung. Jedenfalls steht sie weit zurück hinter jener des normalen Quarzporphyrs. Dafür ist die Serizitisierung der Grundmasse um so stärker. Diese ist nämlich nur an wenigen Stellen gut erhalten. Auch nimmt man Neubildung von Albit auf Klüften wahr, sowie Imprägnation mit Schwefelkies.

Verwandt damit ist ein mehr helles Gestein mit Andeutung von Schieferung, sonst aber noch ziemlich kompakt wie das vorige. Die Druckwirkungen sind hier wieder etwas stärker.

Bedeutend stärker vorgeschritten ist die Zersetzung bei einer weiteren Gesteinsprobe. Der Quarzporphyr hat hier lichte Farbe, ist deutlich schieferig und reich an Serizit, der makroskopisch schon deutlich hervortritt. Die mikroskopische Untersuchung zeigt klar die Zugehörigkeit zum selben Quarzporphyr. Wir beobachten immer dieselbe Grundmasse und dieselben Einsprenglinge. Die Kataklase ist wenigstens nicht stärker als beim normalen Gestein. Die Serizitisierung ist recht bedeutend. Auch machen sich sonst bedeutendere Zersetzungen bemerkbar. Das Titaneisen ist zum größten Teil zu Titanit geworden, der in ziemlichen Mengen auftritt und manchmal noch Reste des Titaneisens einschließt. Dazu kommen noch größere Körner von Anatas. Als Andeutung einer Saussuritisierung wird man die Neubildung von Orthit und Epidot ansehen müssen. Beide finden sich in Putzen und unregelmäßigen Körnern, stellenweise zusammen mit Biotit und Titanit.

Wohl am stärksten verändert ist das Ganggestein bei Tamga-tasch. Es ist hell und nähert sich in seinem ganzen Habitus einem Serizitschiefer. Mikroskopisch erkennt man, daß die Grundmassen wenigstens soweit erhalten, um die Zugehörigkeit zum selben Gestein konstatieren zu können. Die Kataklase ist auch hier bedeutend. Die Feldspäte sind in reichem Maße serizitisiert. Bei manchen Kristallen sind die serizitischen Blättchen vom Rande aus senkrecht in den Kristall hineingewachsen. Zu den Einsprenglingen kommt noch Biotit, dessen größere Kristalle häufig zersetzt sind zu Titaneisen, Titanit und Anatas. Blauer Turmalin ist ziemlich reichlich vertreten.

Gneisartiges Aussehen hat das Gestein einer Apophyse nördlich davon. Serizitisierung und Druckwirkung sind hier wohl am stärksten. Die größeren Einsprenglinge sind schlecht erhalten. Besonders der Quarz scheint an einzelnen Stellen ganz zermahlen zu sein. Das Gestein weist außerordentlich viel Titaneisen auf, das teilweise zersetzt ist zu Anatas. Offenbare Neubildungen sind unregelmäßige Körner von Orthit und Biotitkristalle, die oft senkrecht zur Schieferung stehen. In diesem Falle sind sie gewöhnlich gedrungener ausgebildet.

Daß auch der Quarzporphyr kontaktmetamorph beeinflußt wurde, dafür scheinen zunächst zu sprechen die zweifellosen Neubildungen von Biotitkristallen; sodann die Imprägnation mit Turmalin und schließlich die mannigfaltigen Zersetzungen des Feldspates zu Saussurit und serizitischen Mineralien; endlich die Tatsache, daß der Grad der Zersetzung in keinem nachweisbaren Zusammenhang steht mit dem Maß der Kataklase, daß vielmehr, wenigstens teilweise, das stärker zersetzte Gestein geringere Druckwirkungen aufweist als das weniger zersetzte.

Zu erwähnen wären endlich noch die Adern, die an verschiedenen Stellen des Profils beobachtet wurden. Bei Tamga-tasch bildet ein Aplitgang die nördliche Grenze des Quarzporphyrs. Nach der Art seines Auftretens könnte er auch als Salband des Quarzporphyrs aufgefaßt werden, wie es von Keidel geschieht. Die Frage wird sich schwer entscheiden lassen.

III. Schlussfolgerungen.

Überblicken wir nun die an den Gesteinen des südlichen Musart-Tals beobachteten Erscheinungen, so muß uns zunächst die ungemein ausgedehnte Kontaktmetamorphose auffallen. Denn daß es sich um diese handelt, kann nach der Untersuchung der Gesteine nicht mehr zweifelhaft sein. Die typischen Hornfelsbildungen von den verschiedensten Punkten des Profils, die wir bald als Einlagerungen in den kristallinischen Kalken angetroffen haben, bald in mächtigen, selbständigen Schichtensystemen, mehrfach begleitet von Glimmer- und Knotenschiefern, lassen wohl keine andere Deutung zu. Für die Kontaktmetamorphose sprechen ferner die aplitischen Adern, von denen zwar nur wenige, diese aber an den verschiedensten Stellen beobachtet wurden, und die zweifellos eine größere Bedeutung haben, als man aus den Beobachtungen an dem wenig umfangreichen Material ersieht. Sie wird auch bestätigt durch die massenhafte Turmalinimprägnation. Wir finden fast kein Gestein, dem der Turmalin fehlt, oft aber sehen wir diesen in ganz bedeutenden Mengen auftreten. Jeder Zweifel also an der Entstehung der kristallinischen Beschaffenheit der Gesteine durch Kontaktmetamorphose scheint hier völlig ausgeschlossen zu sein.

Wenn wir uns nun fragen, welchem Granit die weitgehenden Umwandlungen zuzuschreiben sind, so kommen nicht weniger als drei Massive in Betracht, zunächst das Massiv, das sich auf der Nordseite des Gebirges befindet etwa 15 Kilometer vom Musart-Paß; sodann das Doppelmassiv im südlichen Musart-Tale, das wir oben näher kennen gelernt haben. Die Entfernung der beiden Massive auf der Nord- und Südseite voneinander ist eine recht bedeutende und beträgt mindestens 50 Kilometer. Gleichwohl finden sich auf dieser weiten Strecke fast ausschließlich typische Kontaktgesteine. Ja es läßt sich nicht

einmal eine Zunahme oder Abnahme der Intensität der Umwandlung in diesem gewaltigen Komplex deutlich konstatieren.

Sicher ist nun, daß jeder von den drei genannten Graniten seine Kontaktzone hat oder doch gehabt hat. Diese im einzelnen zu umgrenzen, wird schlechthin unmöglich sein. Dabei bleibt aber bestehen, daß sich sehr weit von den beiden Massiven, die für die oberen Teile des südlichen Musart-Tals in Frage kommen, noch ausgesprochene Kontaktgesteine vorfinden. Auch kann man wohl nicht umhin, das gewaltige Marmormassiv als eine einheitliche Bildung gleicher Art aufzufassen.

Deswegen verdient das südliche Musart-Tal ganz besonderes Interesse als typisches Beispiel, wie die Kontaktmetamorphose wirkt, wenn die Intrusion des Granites verbunden war mit gebirgsbildenden Bewegungen. Daß letzteres der Fall war, ist ganz die Ansicht Keidels, der nach allen Beobachtungen die Entstehung der zentralen Ketten in das ältere Mesozoikum verlegen zu müssen glaubt. Dafür sprechen auch die massenhaften Quarzporphyrergüsse, die sich teilweise in Schichten finden, die zweifellos dem älteren Mesozoikum angehören. Die Gebirgsfaltung brachte natürlich mannigfaltige Störungen des Schichtenverbandes mit sich und bahnte dem Granit die Wege. Die Quarzporphyrgänge inmitten des kristallinischen Kalkes bestätigen die Ansicht, daß sich darunter noch gewaltige Granitmassen finden, von denen der Quarzporphyr etwa die Ausläufer darstellt. Auch die Aplitgänge und -Adern in den Kalken sowohl wie in den Hornfelsen lassen sich wohl schwerlich anders erklären. Wenn man das alles bedenkt, so hat die weitgehende Kontaktmetamorphose nichts besonders Auffälliges mehr an sich, ja wir finden es ganz selbstverständlich, daß diese eine so bedeutende Ausdehnung hat.

Es ist dieses von um so höherem Interesse, als gerade in einem ähnlichen Gebiete, in unseren Zentralalpen, die Ansicht, daß die kristallinische Beschaffenheit der Gesteine der Kontaktmetamorphose zuzuschreiben sei, immer mehr an Boden gewinnt. Eine jede neue, vorurteilslos unternommene Spezialuntersuchung erbringt neue Beweise für die Kontaktmetamorphose. Wenn man sich aber von vielen Seiten noch sträubt, eine so weit sich erstreckende Kontaktmetamorphose anzunehmen, so kann man jetzt den Alpen den zentralen Tian-Schan gegenüberstellen. Wenn dort die Kontaktmetamorphose für weit vom Granit entfernte Gesteine nachgewiesen ist, so kann sie auch in den Alpen nicht mehr befremden, wo es sich doch meistens um noch geringere Entfernungen handelt, ganz abgesehen davon, daß die große Entfernung gewöhnlich nur eine scheinbare ist, weil der metamorphosierende Granit nicht an der Oberfläche liegt, sondern in der Tiefe verborgen ist, aber nicht selten durch Straßen- und Tunnelbauten in seinem Versteck entdeckt wird zur Warnung für alle allzu eifrigen Anhänger des Dynamometamorphismus.

Aber noch einen anderen wichtigen Punkt lehrt uns die Untersuchung des südlichen Musart-Tales. Es ist wieder dieselbe Erscheinung, wie sie im II. Teil dieser Arbeiten vom oberen Bayum-kol-Tal beschrieben wurde: der eine Rand des Granitmassivs ist von typischen Kontaktgesteinen: Hornfelsen und Knotenschiefern begleitet, am anderen treten an deren Stelle: Gneis, Glimmerschiefer und Phyllit; an der einen Seite normale, an der anderen Piezokontaktmetamorphose. Von den stets als typisch bezeichneten Kontaktmineralien, wie Andalusit, Kordierit, findet man im ganzen Profil durch den zentralen Tian-Schan keine Spur, von anderen, wie Granat, nur

vereinzelte Vorkommnisse. Das zeigt aber, daß es gänzlich verfehlt ist, die Kontaktmetamorphose dann zu leugnen, wenn die genannten Mineralien fehlen, und selbst dann, wenn die typischen, oder sagen wir besser, die allgemein als typisch anerkannten Kontaktgesteine nicht vorhanden sind. Man darf eben die Kontaktmetamorphose nicht nach einem Schema behandeln, sondern muß alle geologischen und petrographischen Momente in Untersuchung ziehen und abwägen, dann erst kann die schwierige Frage nach der Entstehung der „kristallinischen Schiefer“ befriedigend gelöst werden.

Was endlich das Alter der verschiedenen Granitmassive betrifft, so sind für dessen genauere Bestimmung wenig sichere Anhaltspunkte vorhanden. Wenn das Massiv auf der Nordseite, wie Keidel, und auch wohl mit Recht, annimmt, die Fortsetzung ist von jenem Granitzug, der in der weiteren Umgebung des Khan-Tengri am Tüs-aschu-Paß (siehe Abhandlungen XXIII, S. 96, 163 f. und 167) die karbonischen Kalke kontaktmetamorph umgewandelt hat, so steht auch hier dessen postkarbonisches Alter fest. Von dem Doppelmassiv des südlichen Musart-Tales läßt sich nur das eine mit ziemlicher Bestimmtheit sagen, daß der nördliche Teil jünger ist als der größere südliche. Der südliche Teil des Massivs aber ist jedenfalls älter als das obere Karbon, das allem Anscheine nach transgredierend die Kontaktzone überlagert. Keidel hält auch diesen Granit für karbonisch. Die petrographische Untersuchung erbrachte selbstverständlich weder für noch gegen diese Ansicht irgend welche Gründe.

St. Gabriel im Juni 1906.

Bei Tamga-Tasch. Einlagerung von Quarzporphyr in weissem Kalk.



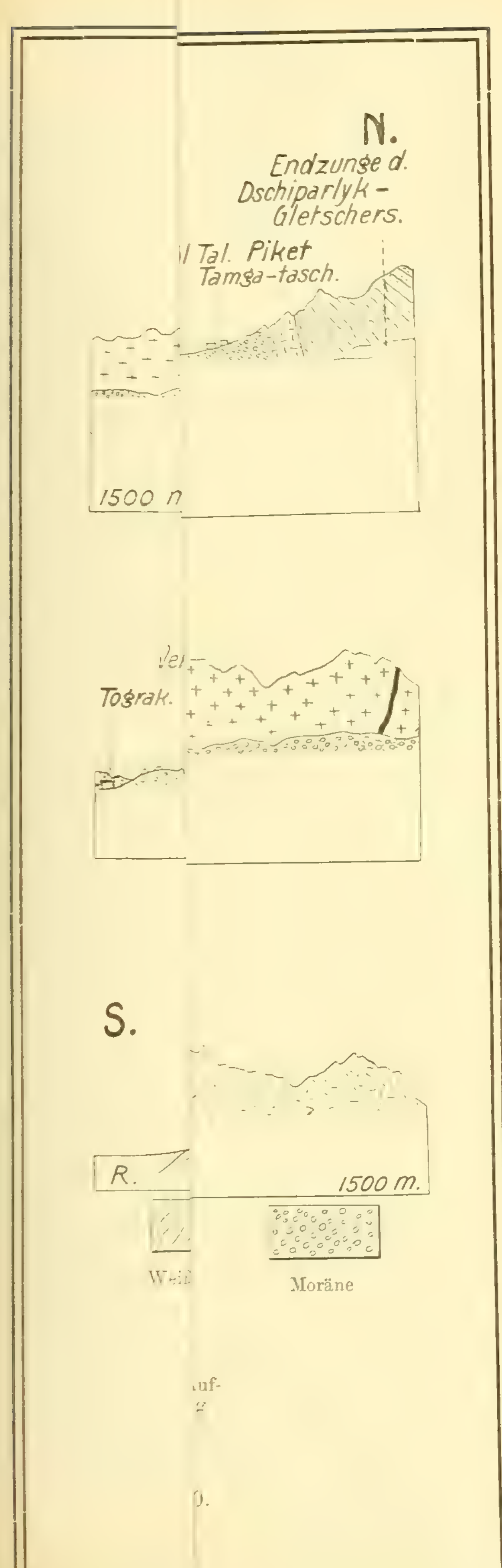
Oberhalb Tograk-Jailak.
Weisser Kalk mit dunklem Quarzporphyr in Hornfels.



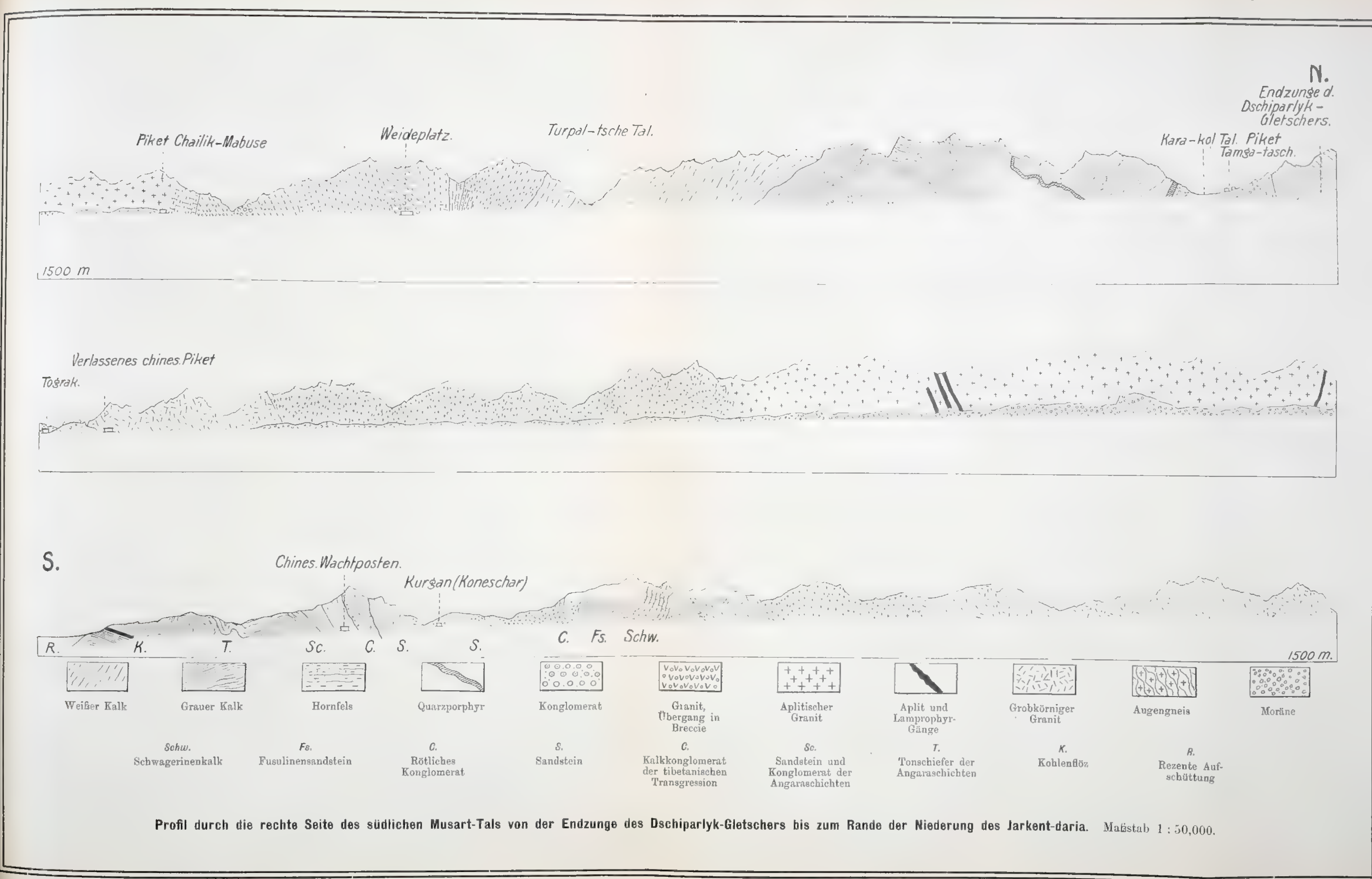
2 km unterhalb Tamga-Tasch.
Quarzporphyr in weissem Kalk.

Dr. Merzbacher phot




N.
Endzunge d.
Dschiparlyk -
Gletschers.
Tal. Piket
Tamga-tasch.
1500 m
Tograk.
S.
R.
1500 m.
Moräne





Profil durch die rechte Seite des südlichen Musart-Tals von der Endzunge des Dschiparlyk-Gletschers bis zum Rande der Niederung des Jarkent-daria. Maßstab 1 : 50,000.



Ueber
die Bewegung der Elektronen.

Von

F. Lindemann.

Erster Teil:
Die translatorische Bewegung.

(Eingelaufen am 12. Januar 1907.)



Während ich versuchte, mittelst der Elastizitätstheorie des Lichtäthers die Gesetzmäßigkeiten in den Spektren der Elemente zu erklären,[1]) haben andere die Theorie der Elektronen zu diesem Zwecke herangezogen. Da die Ausbreitung der elektrischen Kraft Zeit erfordert, so wird ein bewegtes elektrisches Teilchen (sei es ein geladenes materielles Teilchen oder ein Quantum von Elektrizität ohne materielle Unterlage) im allgemeinen auf sich selbst Kräfte ausüben, welche die Bewegung beeinflussen. Als Eigenschwingungen werden solche schwingende Bewegungen des Elektrons angesehen, bei denen diese Kräfte verschwinden, sogenannte kräftefreie Schwingungen. Um diese Bestrebungen mit meinen Untersuchungen zu vergleichen, mußte ich die betreffende Literatur eingehend studieren. Besonders hat Sommerfeld sehr allgemeine Untersuchungen über die von bewegten Elektronen auf sich selbst ausgeübten Kräfte angestellt, und aus seinen Formeln für den besonderen Fall der konstanten Geschwindigkeit das auch sonst schon abgeleitete Resultat bestätigt, daß die Bewegung eines Elektrons mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit kräftefrei sei.

Eine Änderung der Geschwindigkeit bedingt dagegen das Auftreten von Kräften, und so kommt man zu der Anschauung, daß das masselose Elektron sich verhält wie ein träges Massenteilchen, wobei sich dann allerdings die Masse als Funktion der Geschwindigkeit ergibt; und auf Grund dieser Resultate konnte man dazu übergehen, die Trägheit der materiellen Massen umgekehrt durch die scheinbare Trägheit der Elektronen zu erklären, so daß sich die Masse aus Elektronen zusammensetzt und nur deshalb konstant zu sein scheint, weil die in der Mechanik vorkommenden Geschwindigkeiten nicht groß genug sind, um die Abweichungen hervortreten zu lassen. Die fundamentale Wichtigkeit dieser neuen Auffassungsweise der Mechanik erfordert vor allem eine volle Klarlegung der Grundgesetze

[1]) Zur Theorie der Spektrallinien, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXI, 1901 und Bd. XXII, 1903. Es sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß ich am Schlusse der letzteren Abhandlung in den asymptotischen Werten bei der Korrektur irrtümlicher Weise eine Quadratwurzel durch eine vierte Wurzel ersetzt habe. — Unter Benützung genauerer asymptotischer Entwicklungen habe ich inzwischen die Untersuchungen fortgesetzt und Formeln erhalten, die sich den Beobachtungen besser anschließen; die Resultate sind vorläufig zusammengestellt in meiner Rektoratsrede: Gestalt und Spektrum der Atome, Süddeutsche Monatshefte, 2. Jahrg. 1905 (englische Übersetzung in The Monist, vol. 16, Chicago 1906).

für die Bewegung eines Elektrons, und eine solche versuche ich im folgenden auf Grund der partiellen Differentialgleichungen der Elektronentheorie zu geben.

Die dabei gewonnenen Resultate sind von den bisher erhaltenen wesentlich verschieden. Ich knüpfe zunächst an den allgemeinen Ansatz an, den man Sommerfeld verdankt; in den Aufsätzen des letzteren kommen verschiedene Entwicklungen vor, die mir aus mathematischen Gründen nicht haltbar erscheinen. Ich habe deshalb seine ganze Untersuchung von neuem durchgeführt und dabei möglichst ausführlich alle zweifelhaften Stellen erörtert. Schließlich habe ich in § 16 die betreffenden Stellen eingehend bezeichnet und besprochen, zugleich auch klarzulegen versucht, weshalb die ältere Behandlung der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (nach Lorentz und Abraham) dazu führte, diese Bewegung als eine kräftefreie anzusehen.

Die vorliegende Arbeit behandelt nur die reine Translation, und zwar für den Fall, daß die Bahn des Elektrons und die Geschwindigkeit willkürlich gegeben sei; es wird ganz allgemein die durch das Elektron erzeugte Kraft berechnet. Erläutert ist die allgemeine Theorie durch den Fall konstanter Unterlichtgeschwindigkeit (§ 12), wobei sich die Kraft nicht gleich Null ergibt und der Grenzfall der Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ohne Schwierigkeit erledigt wird. Hiernach dürften die erwähnten Vorstellungen über die Erklärung der Trägheit materieller Massen aus der Elektronentheorie sich nur unter Hinzufügung neuer Hypothesen aufrecht erhalten lassen. Auch die Vorstellung, daß ein konstanter elektrischer Strom der Elektronenbewegung mit konstanter Geschwindigkeit (dem konstanten Konvektionsstrom) äquivalent sei, ist nur qualitativ, nicht quantitativ zutreffend, da ein konstanter Strom keine Selbstinduktion zeigt, ein konstant bewegtes Elektron dagegen auf sich selbst Kräfte ausübt.

In gleicher Weise ist die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit behandelt (§ 13), wobei der Grenzübergang zur Lichtgeschwindigkeit sich ohne Anstand vollziehen läßt und zu demselben Resultate führt, wie beim Ausgange von Unterlichtgeschwindigkeit. Weiters sind die allgemeinen Formeln zur Behandlung der gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung verwandt: dabei zeigt sich, daß der allmähliche Übergang von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit und umgekehrt sich ohne jede Schwierigkeit vollzieht.

Alle Untersuchungen beziehen sich auf Volumladung, d. h. es wird vorausgesetzt, daß das bewegte (kugelförmige) Teilchen sich wie ein Nichtleiter verhalte, dessen ganzes Innere elektrisch geladen ist. Die Voraussetzung bloßer Oberflächenladung kann durch Grenzübergang leicht erledigt werden. Ich werde darauf in einer Fortsetzung der vorliegenden Arbeit zurückkommen, in der dann auch die rotatorische Bewegung Berücksichtigung finden soll.

§ 1. Das elektromagnetische Feld eines bewegten Elektrons.

Die von einem bewegten elektrischen Teilchen (z. B. einem Elektron) ausgehenden Kräfte hängen von zwei Potentialen ab, dem „skalaren Potentiale“ φ, das der Gleichung:

$$\ddot{\varphi} - c^2 \Delta^2 \varphi = \tau^2 \varrho \tag{1}$$

genügen muß, und dem „Vektorpotentiale“ $\mathfrak{A}$, dessen Bestandteile $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ durch die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{A}}_x - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}_x &= \varrho\, c\, \mathfrak{v}_x, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_y - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}_y &= \varrho\, c\, \mathfrak{v}_y, \\ \ddot{\mathfrak{A}}_z - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}_z &= \varrho\, c\, \mathfrak{v}_z \end{aligned} \tag{2}$$

bestimmt werden.[1]) In ruhendem Zustande geht das skalare Potential φ in das elektrostatische, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ in das magnetische Potential über. In obigen Gleichungen bedeutet φ'' den zweiten Differentialquotienten von φ nach der Zeit t an dem im absoluten Raume festen Punkte mit den Koordinaten x', y', z', und es ist:

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2}.$$

Es bedeutet ferner ϱ die elektrische Dichte an diesem Punkte, c die Lichtgeschwindigkeit, und $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ sind die Komponenten der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\mathfrak{v}_x^2 + \mathfrak{v}_y^2 + \mathfrak{v}_z^2}, \tag{3}$$

mit der sich das Elektron bewegt.

Nur im Innern des Elektrons ist ϱ von Null verschieden; es ist also ϱ eine im allgemeinen unstetige Funktion des Ortes und außerdem (da der Ort des bewegten Elektrons sich mit der Zeit ändert) eine Funktion der Zeit. Die dadurch der Integration entgegenstehenden Schwierigkeiten kann man in folgender Weise beseitigen.

Es werde ein mit dem Elektron fest verbundenes Koordinatensystem (x, y, z) eingeführt, das sich mit der Geschwindigkeit v im Raume translatorisch bewegt, d. h. es werde

$$\begin{aligned} x' &= x + \int_0^t \mathfrak{v}_x\, dt, \\ y' &= y + \int_0^t \mathfrak{v}_y\, dt, \\ z' &= z + \int_0^t \mathfrak{v}_z\, dt \end{aligned} \tag{4}$$

---

[1]) Vgl. in Betreff der Literatur den Artikel „Maxwells elektromagnetische Theorie“ von H. A. Lorentz in der Enzyklopädie der Mathematik, V 2, 1, und für die Ableitung besonders Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, Annalen der Physik, Bd. 315 (neue Folge, Bd. 10), 1903, (französische Übersetzung in dem Werke: Jons, Électrons, Corpuscules, herausgegeben von der Société française de physique, Paris 1905, t. I), ferner desselben Verfassers Werk: Elektromagnetische Theorie der Strahlung, Leipzig 1905.

gesetzt, wobei vorausgesetzt wird, daß die Bewegung des Elektrons zur Zeit $t=0$ beginnt. Bezeichnet dann $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ den Differentialquotienten von φ nach der Zeit an einer mit diesem Koordinatensystem fest verbundenen Stelle, so ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\frac{dy'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\frac{dz'}{dt},$$

oder nach (4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{\varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathfrak{v}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathfrak{v}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathfrak{v}_z, \tag{5}$$

wo nun $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ gegebene Funktionen von t sind.

Durch Wiederholung dieser Differentiations-Operation erhält man:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - 2S\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\mathfrak{v}_x + SS\,\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

wenn zur Abkürzung folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx_x}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d\mathfrak{v}_y}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{d\mathfrak{v}_z}{dt},$$

$$S\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\mathfrak{v}_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\mathfrak{v}_x + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t}\mathfrak{v}_y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}\mathfrak{v}_z,$$

$$SS\,\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \mathfrak{v}_x^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mathfrak{v}_y^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mathfrak{v}_z^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2\mathfrak{v}_y\mathfrak{v}_z\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + 2\mathfrak{v}_z\mathfrak{v}_x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + 2\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Die Differentialgleichung (1) wird infolgedessen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - 2S\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}\mathfrak{v}_x + SS\,\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - c^2\Delta^2\varphi = c^2\varrho. \tag{6}$$

Hier ist nun die elektrische Dichte ϱ für jeden mit dem beweglichen Systeme fest verbundenen Punkt x, y, z von der Zeit unabhängig, also nur noch von x, y, z abhängig, und zwar gleich Null außerhalb des Elektrons.

Indem man die Funktion $\varrho = f(x, y, z)$ durch ein Fourier'sches Integral darstellt, läßt sich die in dieser Unstetigkeit liegende Schwierigkeit umgehen.[1] Es ist nach Fourier:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} dk\,dl\,dm \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\varkappa, \lambda, \mu)\, e^{iS(x-\varkappa)k}\, d\varkappa\, d\lambda\, d\mu,$$

worin:

$$S(x-\varkappa)k = (x-\varkappa)k + (y-\lambda)l + (z-\mu)m.$$

Indem wir durch die Gleichungen:

$$\varrho' = e^{iSkx} = e^{i(kx+ly+mz)} \tag{7}$$

$$P = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\varkappa, \lambda, \mu)\, e^{-iSk\varkappa}\, d\varkappa\, d\lambda\, d\mu \tag{8}$$

[1]) Nach dem Vorgange von A. Sommerfeld (Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1904), dem wir in den zunächst folgenden Paragraphen uns anschließen, von dessen Resultaten aber die unsrigen wesentlich abweichen werden (vgl. unten § 16).

zwei von k, l, m abhängige Hülfsfunktionen einführen, läßt sich obige Fouriersche Formel in der Gestalt:

$$\varrho = f(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} P \cdot \varrho' \cdot dk\, dl\, dm \tag{9}$$

schreiben. Diesen Wert setzen wir auf der rechten Seite von (6) ein und erhalten dadurch eine für alle Werte von x, y, z gültige analytische Darstellung der Funktion ϱ.

Von den mehrfachen Integralen machen wir uns frei, indem wir auch auf der linken Seite von (6) statt der Funktion φ mittels der Formel

$$\varphi = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(k, l, m) \cdot P \cdot dk\, dl\, dm \tag{10}$$

eine weitere Hülfsfunktion φ' einführen. Die auf der rechten und linken Seite von (6) dann unter dem dreifachen (nach k, l, m) genommenen Integralzeichen auftretenden Funktionen setzen wir einander gleich und dividieren beiderseits mit P; so entsteht die folgende partielle Differentialgleichung für die von x, y, z, k, l, m und t abhängige Funktion φ':

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - S \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{d \mathfrak{v}_x}{dt} - 2 S \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x\, \partial t} \mathfrak{v}_x + SS \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x\, \partial y} \mathfrak{v}_x \mathfrak{v}_y - c^2 \Delta^2 \varphi' = c^2 \cdot e^{iSkx}. \tag{11}$$

Die Differentialgleichung ist der Gleichung (6) vollkommen analog gebildet; statt der unstetigen Funktion $\varrho = f(x, y, z)$ steht nur jetzt auf der rechten Seite die durchaus stetige Funktion ϱ', welche durch (7) eingeführt wurde. Die Bestimmung der Potentialfunktion φ ist daher vorläufig zurückgeführt auf die Bestimmung einer spezielleren Potentialfunktion φ', welche einer durch den ganzen Raum stetigen (wenn auch imaginären) Dichtigkeitsverteilung ϱ' der Elektrizität entspricht.

Die Berechtigung der bei dieser Zurückführung benutzten Operationen bedarf aber noch der näheren Untersuchung; die Gleichung (6) nämlich führt nur dann auf die Gleichung (11) für φ', wenn es gestattet ist, die Differentiation der durch (10) definierten Funktion φ nach x, y, z, t unter dem dreifachen Integralzeichen auszuführen. Bleibt die Funktion $\varphi'(k, l, m)$ für unendlich große Werte von k, l, m endlich, so ist diese Operation jedenfalls erlaubt, wenn auf der rechten Seite von (10) unter dem Integralzeichen der Faktor e^{-ps} hinzugefügt wird, wo s die positive Quadratwurzel:

$$s = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2} \tag{12}$$

bedeutet und p eine positive Konstante bezeichnet. Setzen wir also:

$$\varphi_p = \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps} \varphi'(k, l, m) \cdot P \cdot dk\, dl\, dm \tag{13}$$

und zur Abkürzung:

$$D\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d \mathfrak{v}_x}{dt} - 2 S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial t} \mathfrak{v}_x + SS \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} \mathfrak{v}_x \mathfrak{v}_y - c^2 \Delta^2 \varphi, \tag{14}$$

so genügt die Funktion φ_p nicht der Differentialgleichung (6), sondern der Gleichung:

$$D\varphi_p = c^2 \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-ps} P \cdot \varrho' \cdot dk\, dl\, dm; \tag{15}$$

und das obige Verfahren, welches die Gleichung (6) auf die Gleichung (11) zurückführte, wird nur anwendbar sein, wenn die Gleichung:

$$(D\,\varphi_p)_{p=0} = D\,(\varphi)_{p=0} \tag{16}$$

als bestehend nachgewiesen ist. Mit diesem Nachweise werden wir uns im folgenden noch beschäftigen (vgl. § 5).

§ 2. Das Hilfspotential φ'.

Ein partikuläres Integral der Gleichung (11) finden wir durch den Ansatz:

$$\varphi_1' = e^{i(kx+ly+mz)}\,F(t) = e^{iSkx}\,F(t), \tag{17}$$

wo F allein von der Zeit t abhängt. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial t^2} = e^{iSkx}\frac{d^2 F(t)}{d t^2},\quad \Delta^2 \varphi_1' = -(k^2 + l^2 + m^2)\cdot F(t),$$

$$S\,\frac{\partial \varphi_1'}{\partial t}\,\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = i\,e^{iSkx}\cdot F(t)\cdot S\,k\,\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt},$$

$$S\,\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x\,\partial t}\,\mathfrak{v}_x = i\,e^{iSkx}\cdot\frac{d\,F(t)}{d\,t}\cdot S\,k\,\mathfrak{v}_x,$$

$$S\,S\,\frac{\partial^2 \varphi_1'}{\partial x\,\partial y}\,\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{v}_y = -\,e^{iSkx}\,F(t)\cdot S\,S\,k\,l\,\mathfrak{v}_x\,\mathfrak{v}_y = -\,e^{-iSkx}\,F(t)\cdot(S\,k\,\mathfrak{v}_x)^2.$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks (17) in (11) und Fortlassen des auf beiden Seiten von (11) auftretenden Faktors e^{iSkx} erhalten wir also für $F(t)$ die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2 F}{d t^2} - 2\,i\,\frac{d F}{d t}\,S\,k\,\mathfrak{v}_x + \left[c^2\,s^2 - i\,S\,k\,\frac{d\,\mathfrak{v}_x}{d\,t} - (S\,k\,\mathfrak{v}_x)^2\right]F = c^2, \tag{18}$$

worin s wieder durch die Gleichung (12) definiert ist.

Diese Gleichung läßt sich durch die Substitution

$$F = a\cdot f \tag{19}$$

vereinfachen, indem man die Funktion a so bestimmt, daß das Glied mit $\frac{df}{dt}$ herausfällt.

Es wird zunächst:

$$a\frac{d^2 f}{d t^2} + 2\left(\frac{d\,a}{d\,t} - a\,i\,S\,k\,\mathfrak{v}_r\right)\frac{df}{d\,t} + \left[\frac{d^2 a}{d\,t^2} - 2\,i\frac{d\,a}{d\,t}S\,k\,\mathfrak{v}_x + c^2 s^2\,a + (S\,k\,\mathfrak{v}_r)^2\,a - i\,a\,S\,k\frac{d\,\mathfrak{v}_x}{d\,t}\right]f = c^2. \tag{20}$$

Es soll demnach a der Bedingung

$$\frac{d\,a}{d\,t} = i\cdot a\cdot S\,k\,\mathfrak{v}_x = i\cdot a\cdot(k\,\mathfrak{v}_x + l\,\mathfrak{v}_y + m\,\mathfrak{v}_z)$$

genügen, wodurch sich a in der Form

$$a = e^{iSk\mathfrak{V}_x} \tag{21}$$

bestimmt, wenn

$$\mathfrak{V}_x = \int_{t_0}^{t}\mathfrak{v}_x\,dt,\quad \mathfrak{V}_y = \int_{t_0}^{t}\mathfrak{v}_y\,dt,\quad \mathfrak{V}_z = \int_{t_0}^{t}\mathfrak{v}_z\,dt \tag{22}$$

gesetzt wird. In der eckigen Klammer, welche in (20) vorkommt, wird infolgedessen:

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = i\frac{da}{dt} S k \mathfrak{v}_x + i a S k \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = i a S k \frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - a(S k \mathfrak{v}_x)^2;$$

und die genannte Gleichung nimmt folgende vereinfachte Gestalt an:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + c^2 s^2 f = c^2 \cdot e^{-iSk\mathfrak{V}_x}. \tag{23}$$

Ersetzt man die rechte Seite durch Null, so ist das allgemeine Integral der entstehenden homogenen linearen Differentialgleichung gleich:

$$A \cdot \operatorname{cosin}(cst) + B \cdot \sin(cst),$$

wo A und B Konstante bedeuten; folglich wird:

$$f = \frac{c}{s}\int_{t_0}^{t} e^{-iSk\mathfrak{V}_x(u)} \sin cs(t-u) \cdot du + A \operatorname{cosin}(cst) + B \sin(cst), \tag{24}$$

wo das Zeichen $\mathfrak{V}_x(u)$ andeutet, daß in dem durch (22) definierten Integrale $\mathfrak{V}_x(t)$ die obere Grenze t durch die Integrationsvariable u zu ersetzen ist. Eine Änderung der unteren Grenze t_0 bedingt nur eine Änderung der Integrationskonstanten A und B.

Es empfiehlt sich, die gewonnenen Ausdrücke durch die Substitution $\tau = t - u$ umzuformen; es wird dann nach (19):

$$F = \frac{c}{s}\int_{0}^{t-t_0} e^{iSk\mathfrak{V}_x(t) - iSk\mathfrak{V}_x(t-\tau)} \sin cs\tau \cdot d\tau + e^{iSk\mathfrak{V}_x(t)}(A \operatorname{cosin} cst + B \sin cst). \tag{25}$$

Der Exponent von e unter dem Integralzeichen ist:

$$Sk(\mathfrak{V}_x(t) - \mathfrak{V}_x(t-\tau)) = k\int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\,d\tau + l\int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_y(\tau)\,d\tau + m\int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_z(\tau)\,d\tau.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$\xi = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\,d\tau, \quad \eta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_y(\tau)\,d\tau, \quad \zeta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_z(\tau)\,d\tau, \tag{26}$$

so sind ξ, η, ζ die Koordinaten desjenigen Raumpunktes, an welchem sich ein Punkt zur Zeit $t - \tau$ befand, der sich zur Zeit t an der Stelle x, y, z befindet. Nach (17) und (25) wird dann:

$$\varphi_1' = \frac{c}{s}\int_{0}^{t-t_0} e^{iSk(x+\xi)} \sin cs\tau \cdot d\tau + e^{iSkx + iSk\mathfrak{V}_x(t)}(A \operatorname{cosin} cst + B \sin cst).$$

Aus diesem partikulären Integrale φ_1' findet man das allgemeine Integral φ' von (11) durch Hinzufügen einer allgemeinen Lösung derjenigen partiellen Gleichung, welche aus (11) entsteht, wenn man die rechte Seite durch Null ersetzt; eine solche Lösung ergibt sich aus der allgemeinen Lösung der Gleichung:

$$\ddot{\Phi} - c^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2}\right) = 0,$$

(deren linke Seite mit der linken Seite von (1) identisch ist) indem man die Substitution (4) ausführt, welche eben dazu diente, die Gleichung (1) in die Gleichung (6) zu transformieren; und die linke Seite der letzteren ist mit der linken Seite von (11) identisch, wenn man in ersterer φ durch φ' ersetzt. Die Funktion Φ kann man demnach bekanntlich in folgender Weise darstellen:

$$\Phi = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda, \mu, \nu) \cos (A + B + C) \cos \vartheta t \, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

$$+ \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\lambda, \mu, \nu) \cos (A + B + C) \frac{\sin \vartheta t}{\vartheta} d\lambda\, d\mu\, d\nu;$$

hierin bedeuten f_1 und f_2 willkürliche Funktionen von λ, μ, ν und zur Abkürzung ist

$$\vartheta = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

$$A = \alpha(x' - \lambda), \quad B = \beta(y' - \mu), \quad C = \gamma(z' - \nu)$$

gesetzt worden, wobei x', y', z' mit x, y, z durch die Gleichungen (4) zusammenhängen. Für $t = 0$ wird:

$$(\Phi)_{t=0} = f_1(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = f_2(x, y, z).$$

Den Anfangspunkt $t = t_0$ unserer Bewegung lassen wir mit der Zeit $t = 0$ zusammenfallen; dann ist die allgemeine Lösung von (11) in der Form:

$$\varphi' = \varphi'_1 + \Phi$$

gegeben und es bestehen die Anfangsbedingungen:

$$(\varphi')_{t=0} = e^{iSkx} A + f_1(x, y, z),$$

$$\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t}\right)_{t=0} = c\, s\, e^{iSkx} B + f_2(x, y, z).$$

Aus φ' wird das eigentlich gesuchte Potential φ gemäß der Formel (10) berechnet, vorausgesetzt, daß sich die am Schlusse von § 1 erwähnten Bedenken beseitigen lassen. Es verschwinden offenbar φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$, sobald die entsprechenden Ausdrücke φ' und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ für $t = 0$ verschwinden. Nun soll das Elektron vor der Zeit $t = 0$ noch in Ruhe sein, und die Bewegung soll im Momente $t = 0$ beginnen. Wir müssen also annehmen, daß die Gleichungen

$$\varphi' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0$$

für $t = 0$ erfüllt seien und demnach

$$A = 0, \quad B = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0$$

wählen. Für das von uns behandelte Problem genügt es demnach, die Funktion φ' in der folgenden partikulären Form anzunehmen:

$$\varphi'_1 = \frac{c}{s} \int_0^t e^{iSk(x+\xi)} \sin c\, s\, \tau \cdot d\tau, \tag{27}$$

worin (wie auch oben) $Sk(x+\xi)$ für die Summe $k(x+\xi)+l(y+\eta)+m(z+\zeta)$ geschrieben ist. Auf eine andere (für die Elektronenhypothese vielleicht näher liegende) Annahme über den Anfangszustand gehen wir unten in § 15 näher ein.

§ 3. Die Hilfsfunktion P.

Das mehrfache Integral P, welches durch Gleichung (8) eingeführt wurde, läßt sich unter besonderen Annahmen über die Gestalt des Elektrons noch näher ausführen. Wir setzen von jetzt an das Elektron als Kugel voraus, die mit einer gleichförmig verteilten Volumladung ε erfüllt sei.[1])

Die Hülfsvariabeln $\varkappa$, λ, μ interpretieren wir als Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das bewegte (im Elektron feste) Koordinatensystem; den Abstand dieses Punktes vom Anfangspunkte bezeichnen wir mit σ, den Radius der das Elektron bildenden Kugel mit a; dann ist:

$$(28)\qquad \begin{aligned} \varrho &= \text{const} = \frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3} \quad \text{für } \sigma < a, \\ \varrho &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad ,, \quad \sigma > a. \end{aligned}$$

Bei Berechnung von ϱ handelt es sich dann um eine Integration über das Innere einer Kugel; wir werden deshalb Polarkoordinaten einführen, die sich auf den Mittelpunkt dieser Kugel (d. i. den Anfangspunkt des bewegten Koordinatensystems) beziehen. Als Achse dieses Systems denken wir uns die Verbindungslinie s des Punktes k, l, m (wobei diese Größen auch als Koordinaten eines Punktes im bewegten Systeme gedeutet werden) mit dem Mittelpunkte. Um diese Achse herum werde der Winkel ψ gemessen, der Winkel ϑ dagegen von dieser Achse aus und zwar so, daß der Strahl s mit dem Strahle σ den Winkel ϑ einschließt und somit die Formel

$$(29)\qquad \cos\vartheta = \frac{Sk\varkappa}{s\sigma} = \frac{k\varkappa + l\lambda + m\mu}{s\sigma}$$

besteht; das Volumelement wird gleich:

$$\sigma^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\sigma\, d\psi\, d\vartheta$$

und σ läuft von 0 bis a, ψ von 0 bis 2π, ϑ von 0 bis π. Die Gleichung (8), verbunden mit (28), ergibt somit:

$$P = \frac{3\,\varepsilon}{32\,a^3\,\pi^4} \int_0^a \sigma^2\, d\sigma \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi e^{-is\sigma\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

so daß P als Funktion von s (und a) erscheint.

Die Integration nach ψ kann sofort ausgeführt werden und liefert den Faktor 2π; die Integration nach ϑ führt auf:

$$\left[\frac{e^{-i\sigma s\cos\vartheta}}{is\sigma}\right]_0^\pi = \frac{2\sin s\sigma}{s\sigma};$$

und nach Einsetzen dieses Wertes läßt sich auch die Integration nach σ erledigen; man findet:

[1]) Für Oberflächenladung vgl. den später erscheinenden zweiten Teil der vorliegenden Abhandlung.

$$P = \frac{3\,\varepsilon}{8\,\pi^3} \cdot \frac{\sin a\,s - a\,s \cdot \operatorname{cosin} a\,s}{a^3\,s^3}. \tag{30}$$

Diesen Wert von P und den in (27) gefundenen Wert von φ_1' führen wir in das durch (10) gegebene Integral ein und finden:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi^3} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a\,s - a\,s \operatorname{cosin} a\,s}{a^3\,s^4}\, d\,k\, d\,l\, d\,m \int_0^t e^{i\,S\,k\,x} \sin c\,s\,\tau\, d\,\tau, \tag{31}$$

wobei nun s durch (12) definiert war. Auch hier läßt sich das Resultat durch Einführung von Polarkoordinaten vereinfachen; als Achse derselben wählen wir die Richtung R, welche den Punkt $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ mit dem Anfangspunkte des festen Koordinatensystems verbindet; von dieser Achse aus möge der Winkel Θ gezählt werden, d. h. der Winkel zwischen der Richtung R und dem Strahle, der denselben Anfangspunkt mit dem Punkte k, l, m verbindet. Dabei deuten wir jetzt die Integrationsvariabeln k, l, m als Koordinaten eines Punktes in Bezug auf das im Raume feste System x', y', z'; allerdings hatten wir bei Berechnung von P in § 2 dieselben Größen k, l, m auf das im Elektron feste System bezogen; damals ergab sich P als nur von $s = \sqrt{k^2 + l^2 + m^2}$ abhängig; und nachdem dies Resultat gewonnen ist, können wir den Hülfsvariabeln k, l, m, denen direkt keine geometrische oder mechanische Bedeutung zukommt, jetzt eine andere Bedeutung beilegen. Um den Radiusvektor R herum zählen wir den von 0 bis $2\,\pi$ laufenden Winkel Ψ. Dann wird:

$$S\,k\,(x + \xi) = k\,(x + \xi) + l\,(y + \eta) + m\,(z + \zeta) = s\,R \operatorname{cosin} \Theta,$$

und:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon}{8\,\pi^3\,a^3} \int_0^\infty \frac{\sin a\,s - a\,s \operatorname{cosin} a\,s}{s^2} \int_0^\pi \sin \Theta\, d\,\Theta \int_0^{2\pi} d\,\Psi \int_0^t e^{i\,s\,R \operatorname{cosin} \Theta} \sin c\,s\,\tau \cdot d\,\tau. \tag{32}$$

Auch die Integrationen nach Θ und Ψ lassen sich ebenso, wie oben diejenigen nach ϑ und ψ, ausführen; und so findet man:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3} \int_0^\infty \frac{\sin a\,s - a\,s \operatorname{cosin} a\,s}{s^3}\, d\,s \int_0^t \sin c\,s\,\tau \cdot \sin R\,s\, \frac{d\,\tau}{R}. \tag{33}$$

Unter der Voraussetzung, daß auf der rechten Seite die Integrationsordnung trotz der Unendlichkeit der einen Grenze vertauscht werden darf, würde man ferner erhalten:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3} \int_0^t \frac{S}{R}\, d\,\tau. \tag{34}$$

wenn:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin a\,s - a\,s \operatorname{cosin} a\,s}{s^3} \sin c\,s\,\tau \cdot \sin R\,s \cdot d\,s, \tag{34a}$$

$$R^2 = (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2 \tag{34b}$$

gesetzt wird. Wir kommen auf die hiermit berührte Frage sogleich zurück.

§ 4. Berechnung einiger Hilfsintegrale.

Ist die Formel (34) anwendbar, so kommt es zunächst auf die Auswertung des Integrals S an. Differenzieren wir dasselbe nach a und führen die Differentiation unter dem Integralzeichen aus, so wird:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = a \int_0^\infty \sin a s \cdot \sin c \tau s \cdot \sin R s \frac{ds}{s}.$$

Das rechts stehende Integral ist aber nur bedingt konvergent, und deshalb ist die Zulässigkeit der Differentiation unter dem Integralzeichen zweifelhaft. Um alle Zweifel zu beseitigen, betrachten wir das allgemeinere Integral, welches entsteht, wenn wir unter dem Integralzeichen den Faktor e^{-ps} hinzufügen und gehen nachträglich zur Grenze $p = 0$ über. Wir beginnen also mit dem Integrale:

$$S_p = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\sin a x - a x \operatorname{cosin} a x}{x^3} \sin \beta x \sin \gamma x \cdot dx = J_p - a \frac{\partial J_p}{\partial a}, \tag{35}$$

wenn:

$$J_p = \int_0^\infty e^{-px} \sin a x \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^3} \tag{36}$$

gesetzt wird. Es wird ferner:

$$\frac{\partial J_p}{\partial a} = \int_0^\infty e^{-px} \operatorname{cosin} a x \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 J_p}{\partial a^2} = -\int_0^\infty e^{-px} \sin a x \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x}.$$

Das letzte Integral ist unmittelbar bekannt, denn setzt man:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a + \beta - \gamma, \quad \delta_2 = a - \beta + \gamma, \\ \delta_3 &= a + \beta + \gamma, \quad \delta_4 = a - \beta - \gamma, \end{aligned} \tag{37}$$

so ist:

$$\sin a x \sin \beta x \sin \gamma x = \frac{1}{4} (\sin \delta_1 x + \sin \delta_2 x - \sin \delta_3 x - \sin \delta_4 x)$$

und folglich:

$$\frac{\partial^2 J_p}{\partial a^2} = -\frac{1}{4} \left[\int_0^\infty e^{-px} \sin \delta_1 x \frac{dx}{x} + \int_0^\infty e^{-px} \sin \delta_2 x \frac{dx}{x} - \int_0^\infty e^{-px} \sin \delta_3 x \frac{dx}{x} - \int_0^\infty e^{-px} \sin \delta_4 x \frac{dx}{x} \right].$$

Die hier rechts auftretenden Integrale sind bekannt; man hat:

$$\int_0^\infty e^{-px} \sin \delta x \frac{dx}{x} = \operatorname{arctang} \frac{\delta}{p},$$

und somit:

$$\frac{\partial^2 J_p}{\partial a^2} = -\frac{1}{4} \left[\operatorname{arctang} \frac{\delta_1}{p} + \operatorname{arctang} \frac{\delta_2}{p} - \operatorname{arctang} \frac{\delta_3}{p} - \operatorname{arctang} \frac{\delta_4}{p} \right]. \tag{37a}$$

Von hier kehren wir durch zweimalige Integration zu J_1 zurück; zunächst ist:

$$\int \operatorname{arctang}\frac{\delta}{p}\cdot d\alpha = \delta \operatorname{arctang}\frac{\delta}{p} - \frac{p}{2}\log\frac{\delta^2+p^2}{p^2},$$

wenn δ irgend eine der Zahlen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ bedenkt; folglich:

$$-\frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \frac{\delta_1}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_1}{p} + \frac{\delta_2}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_2}{p} - \frac{\delta_3}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_3}{p} - \frac{\delta_4}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_4}{p}$$

$$-\frac{p}{8}\log\left(\frac{(p^2+\delta_1^2)(p^2+\delta_2^2)}{(p^2+\delta_3^2)(p^2+\delta_4^2)}\right) + \text{const.}$$

Die Konstante bestimmt sich durch die Annahme $\alpha = 0$; dann ist bekanntlich:[1])

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_0^\infty e^{-px}\sin\beta x \sin\gamma x \frac{dx}{x^2}$$

$$= \frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{arctang}\frac{\beta+\gamma}{p} - \frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{arctang}\frac{\beta-\gamma}{p} + \frac{p}{4}\log\frac{p^2+(\beta-\gamma)^2}{p^2+(\beta+\gamma)^2},$$

folglich const $= 0$ und:

$$\frac{\partial J_p}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-px}\operatorname{cosin}\alpha x \sin\beta x \sin\gamma x \frac{dx}{x^2}$$

$$(38)\qquad = \frac{p}{8}\log\frac{(p^2+\delta_1^2)(p^2+\delta_2^2)}{(p^2+\delta_3^2)(p^2+\delta_4^2)} - \frac{\delta_1}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_1}{p} - \frac{\delta_2}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_2}{p} + \frac{\delta_3}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_3}{p}$$

$$+ \frac{\delta_4}{4}\operatorname{arctang}\frac{\delta_4}{p}.$$

Für eine nochmalige Integration bedienen wir uns der Hilfsformeln:

$$\int x \operatorname{arctang} x\, dx = \left(1+\frac{x^2}{2}\right)\operatorname{arctang} x - x$$

$$\int \log(p^2+x^2)\, dx = x\log(x^2+p^2) + 2p\operatorname{arctang}\frac{x}{p} - 2x$$

und finden:

$$J_p = \int_0^\infty e^{-px}\sin\alpha x \sin\beta x \sin\gamma x \frac{dx}{x^3}$$

$$(39)\qquad = \frac{p}{8}\left[\delta_1\log(p^2+\delta_1^2) + \delta_2\log(p^2+\delta_2^2) - \delta_3\log(p^2+\delta_3^2) - \delta_4\log(p^2+\delta_4^2)\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[\delta_1^2\operatorname{arctang}\frac{\delta_1}{p} + \delta_2^2\operatorname{arctang}\frac{\delta_2}{p} - \delta_3^2\operatorname{arctang}\frac{\delta_3}{p} - \delta_4^2\operatorname{arctang}\frac{\delta_4}{p}\right].$$

Gehen wir nun zur Grenze $p = 0$ über, so ist zu beachten, daß $\operatorname{arctang}\frac{\delta}{p}$ gleich $+\frac{\pi}{2}$ oder gleich $-\frac{\pi}{2}$ wird, je nachdem δ positiv oder negativ ist; demnach haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:

---

[1]) Vgl. Meyer-Dirichlet, Vorlesungen über bestimmte Integrale. Leipzig 1871, S. 298.

I. $\alpha > \beta > \gamma$; es ist $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ (δ_3 ist immer > 0, da natürlich α, β, γ positive Zahlen bezeichnen sollen).

1. $$\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma > 0,$$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 - \delta_4^2) = \frac{\pi}{2}\beta\gamma,$$

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_{p=0} = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4) = 0,$$

$$S_0 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma; \tag{40}$$

2. $$\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma = 0,$$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2) = -\frac{\pi}{8}(\beta - \gamma)^2,$$

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3) = 0,$$

$$S_0 = -\frac{\pi}{8}(\beta - \gamma)^2; \tag{40a}$$

3. $$\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma < 0,$$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = -\frac{\pi}{8}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha),$$

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4) = -\frac{\pi}{4}(\alpha - \beta - \gamma),$$

$$S_0 = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2]. \tag{40b}$$

II. $\beta > \alpha > \gamma$; es ist $\delta_1 > 0$ und $\delta_4 < 0$.

1. $$\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma > 0,$$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = -\frac{\pi}{8}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha),$$

$$\left(\frac{\partial J_p}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 + \delta_2 - \delta_3 + \delta_4) = -\frac{\pi}{4}(\alpha - \beta - \gamma),$$

$$S_0 = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2]; \tag{41}$$

2. $$\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma = 0,$$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = -\frac{\pi}{16}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 6\alpha\gamma),$$

$$\left(\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 - \delta_3 + \delta_4) = -\frac{\pi}{8}(\alpha - \beta + \gamma),$$

$$S_0 = \frac{\pi}{16}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2 - 8\alpha\gamma]; \tag{41a}$$

3. $\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma < 0,$

$$J_0 = -\frac{\pi}{16}(\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2 + \delta_4^2) = \frac{\pi}{2}\alpha\gamma,$$

$$\left(\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right)_0 = -\frac{\pi}{8}(\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 + \delta_4) = \frac{\pi}{2}\gamma,$$

$$(41^b) \qquad S_0 = 0.$$

III. $\beta > \gamma > \alpha$; es ist $\delta_1 > 0$, $\delta_4 < 0$, während δ_2 positiv oder negativ sein kann; es gelten also die Formeln des vorhergehenden Falles.

IV. $\gamma > \alpha > \beta$ oder $\gamma > \beta > \alpha$; es ist $\delta_2 > 0$, $\delta_4 < 0$, während δ_1 positiv oder negativ sein kann; wir haben im vorigen Falle β und γ zu vertauschen, also:

1. $\delta_1 = \alpha + \beta - \gamma > 0$; es gelten die vorstehenden Formeln unverändert,

2. $\delta_1 = \alpha + \beta - \gamma = 0$; es gelten ebenfalls die Formeln des vorhergehenden Falles,

3. $\delta_1 = \alpha + \beta - \gamma < 0$; es wird:

$$(42) \qquad J_0 = \frac{\pi}{2}\alpha\beta, \quad \left(\frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right)_0 = \frac{\pi}{2}\beta; \quad S_0 = 0.$$

Unter Beiseitelassung der Grenzfälle, wo eine der Größen δ verschwindet, können wir diese Resultate in folgender Form zusammenfassen:

Stellt man die drei Zahlen α, β, γ durch Strecken dar, und bezeichnet S_0 das in (34^a) definierte Integral, so ist:

$$(43) \qquad S_0 = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2],$$

wenn sich aus den Strecken α, β, γ ein Dreieck bilden läßt, dagegen:

$$(44) \qquad S_0 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma,$$

wenn sich ein solches Dreieck nicht bilden läßt, weil $\alpha > \beta + \gamma$ ist, und:

$$(45) \qquad S_0 = 0,$$

wenn die Bildung des Dreiecks dadurch unmöglich wird, daß $\alpha < \beta - \gamma$ (wenn $\beta > \gamma$) oder $\alpha < \gamma - \beta$ (wenn $\beta < \gamma$) ist.

Es ist von Interesse zu sehen, welches Resultat sich ergibt, wenn man vorstehende Rechnungen durchzuführen versucht, ohne unter dem Integralzeichen den Faktor e^{-px} hinzuzufügen. Zu dem Zwecke geht man von der obigen Gleichung (37^a) aus, welche uns für $p = 0$ sofort lehrt, daß das Integral:

$$(46) \qquad j = \int_0^\infty \sin\alpha x \sin\beta x \sin\gamma x \frac{dx}{x}$$

durch die Gleichung:

$$j = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

gegeben ist, wenn $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ sämtlich positiv sind, dagegen durch:

$$j = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

wenn $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ positiv, δ_4 dagegen negativ ist, wobei $\alpha > \beta > \gamma$ angenommen wurde. Da j in α, β, γ symmetrisch ist, kann man das Resultat in folgender Form aussprechen: Das obige Integral j hat den Wert $\frac{\pi}{4}$ oder 0, je nachdem sich aus den drei Strecken α, β, γ ein Dreieck bilden läßt oder nicht.

Integrieren wir nun j nach α^2 und vertauschen die Integrationsordnung, so wird:

$$\int_0^\alpha j\, \alpha\, d\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x - \alpha \operatorname{cosin} \alpha x}{x^2} \sin \beta x \sin \gamma x \frac{dx}{x} = S_0,$$

wo S_0 wieder das in (35) definierte Integral für $p = 0$ bezeichnet. Setzt man links den gefundenen Wert $\left(\text{also } \frac{\pi}{4} \text{ oder } 0\right)$ für j ein, so ist damit auch S_0 bekannt. Für kleine Werte von α ist sicher $\alpha < \beta + \gamma$ und auch (wenn wir $\beta > \gamma$ voraussetzen) $\alpha < \beta - \gamma$, also ein Dreieck unmöglich und $j = 0$, folglich:

$$S_0 = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < \beta - \gamma, \quad \text{wenn } \beta > \gamma$$

und ebenso:

$$S_0 = 0 \quad \text{für} \quad 0 < \alpha < \gamma - \beta, \quad \text{wenn } \gamma > \beta.$$

Wird aber $\alpha > \beta - \gamma$ (bzw. $\gamma - \beta$), so wird das Dreieck möglich, falls α den Wert $\beta + \gamma$ nicht überschreitet; es ist folglich:

$$S_0 = \int_{\beta-\gamma}^{\alpha} \frac{\pi}{4} \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2] \quad \text{für } 0 < \beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$$

und ebenso:

$$S_0 = \int_{\gamma-\beta}^{\alpha} \frac{\pi}{4} \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{8}[\alpha^2 - (\beta - \gamma)^2] \quad \text{für } 0 < \gamma - \beta < \alpha < \beta + \gamma.$$

Wächst die obere Grenze α weiter und geht über den Wert $\beta + \gamma$ hinaus, so ist das Dreieck wieder unmöglich, d. h. $j = 0$ und:

$$S_0 = \int_{\beta-\gamma}^{\beta+\gamma} \frac{\pi}{4} \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{8}[(\beta + \gamma)^2 - (\beta - \gamma)^2] = \frac{\pi}{2}\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \quad \text{für } \beta > \gamma \text{ und } \alpha > \beta + \gamma$$

und ebenso:

$$S_0 = \int_{\gamma-\beta}^{\gamma+\beta} \frac{\pi}{4} \alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \quad \text{für } \beta < \gamma \text{ und } \alpha > \beta + \gamma.$$

Die hier gefundenen Werte[1]) stimmen mit den in (43), (44) und (45) angegebenen vollständig überein; bei diesen Rechnungen ist es also erlaubt, die vorkommenden Vertauschungen der Integrationsordnungen vorzunehmen. Da aber das Integral j bedingt konvergent ist, gibt das hier zuletzt eingeschlagene Verfahren kein sicheres Resultat.

[1]) Auf dem hier zuletzt eingeschlagenen Wege hat Sommerfeld a. a. O. (Göttinger Nachrichten 1904) die Werte des Integrals S_0 abgeleitet.

§ 5. Über die Zulässigkeit der vorgenommenen Vertauschungen von Differentiationen und Integrationen.

Die im Vorstehenden aufgestellten Relationen sollen uns noch dazu dienen, die am Schlusse von § 3 aufgeworfene Frage zu beantworten, ob die dort vorkommenden Differentiationen unter dem Integralzeichen erlaubt sind. Wir fragen zu dem Zwecke nach der Bildung der Differentialquotienten von S_0 nach γ, d. h. wir bilden den betreffenden Differentialquotienten von S_p und gehen dann zur Grenze $p = 0$ über.

Es ist nach (38) und (39):

$$
\begin{aligned}
S_p = J_p - \alpha \frac{\partial J_p}{\partial \alpha} &= \frac{p}{8}\left[(\beta-\gamma)\log\frac{p^2+\delta_1^2}{p^2+\delta_2^2} - (\beta+\gamma)\log\frac{p^2+\delta_3^2}{p^2+\delta_4^2}\right] \\
&+ \frac{1}{8}\left[\delta_1\delta_2\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{\delta_2}{p}\right) - \delta_3\delta_4\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta_3}{p}+\operatorname{arctg}\frac{\delta_4}{p}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{46}
$$

folglich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S_p}{\partial \gamma} = &-\frac{p}{8}\left[\log\frac{(p^2+\delta_1^2)(p^2+\delta_3^2)}{(p^2+\delta_2^2)(p^2+\delta_4^2)} + (\beta-\gamma)\left(\frac{2\delta_1}{p^2+\delta_1^2}+\frac{2\delta_2}{p^2+\delta_2^2}\right) + (\beta+\gamma)\left(\frac{2\delta_3}{p^2+\delta_3^2}+\frac{2\delta_4}{p^2+\delta_4^2}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[(\beta-\gamma)\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{p}+\operatorname{arctg}\frac{\delta_2}{p}\right) + (\beta+\gamma)\left(\operatorname{arctg}\frac{\delta_3}{p}+\operatorname{arctg}\frac{\delta_4}{p}\right)\right] \\
&- \frac{p}{8}\left[\frac{\delta_1\delta_2}{p^2+\delta_2^2} - \frac{\delta_1\delta_2}{p^2+\delta_1^2} - \frac{\delta_3\delta_4}{p^2+\delta_3^2} + \frac{\delta_3\delta_4}{p^2+\delta_4^2}\right],
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Für $p = 0$ haben wir wieder die obigen verschiedenen Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha > \beta > \gamma$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$.

1. $\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma > 0$,

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = \frac{\pi}{2}\beta = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (40),} \tag{48}$$

2. $\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma = 0$,

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = \frac{\pi}{8}(3\beta - \gamma) \quad \text{nicht in Übereinstimmung mit (40}^{\text{a}}\text{),} \tag{48^{a}}$$

3. $\delta_4 = \alpha - \beta - \gamma < 0$,

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = \frac{\pi}{4}(\beta - \gamma) = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (40}^{\text{b}}\text{).} \tag{48^{b}}$$

II. $\beta > \alpha > \gamma$, $\delta_1 > 0$, $\delta_3 > 0$, $\delta_4 < 0$.

1. $\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma > 0$,

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = \frac{\pi}{4}(\beta - \gamma) = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit (41),} \tag{49}$$

2. $\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma = 0$.

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = \frac{\pi}{8}(\beta - \gamma) \quad \text{nicht in Übereinstimmung mit } (41^a), \tag{49a}$$

3. $\delta_2 = \alpha - \beta + \gamma < 0$.

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}\right)_{p=0} = 0 = \frac{\partial S_0}{\partial \gamma} \quad \text{in Übereinstimmung mit } (41^b), \tag{49b}$$

und analog für III. $\beta > \gamma > \alpha$.

Die Grenzwerte, welche sich für $p = 0$ aus $\frac{\partial S_p}{\partial \gamma}$ ergeben, sind diejenigen Werte, welche man erhält, wenn man in S_0 $\left(\text{also in } J_0 \text{ und } \frac{\partial J_0}{\partial \alpha}\right)$ die Differentiation nach γ unter dem Integralzeichen ausführt. Die Differentiation von S_0 unter dem Integralzeichen führt daher in allen Fällen zu richtigen Resultaten, allein ausgenommen die Grenzfälle $\delta_4 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = 0$.

Bilden wir auch den zweiten Differentialquotienten nach γ und bezeichnen mit P einen Ausdruck der für $p = 0$ verschwindet und deshalb nicht genauer berechnet zu werden braucht, so wird:

$$\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2} = -\tfrac{1}{4}\left[\operatorname{arctg}\frac{\delta_1}{p} + \operatorname{arctg}\frac{\delta_2}{p} - \operatorname{arctg}\frac{\delta_3}{p} - \operatorname{arctg}\frac{\delta_4}{p}\right] + P_4.$$

Die hier auftretende eckige Klammer ist dieselbe, welche in (37^a) auftrat und zu dem Integrale (46) führte. Es ist also $\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2}$ für $p = 0$ bis auf das Vorzeichen mit dem Integrale j identisch, und folglich:

$$\left(\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2}\right)_{p=0} = -\frac{\pi}{4},$$

wenn sich aus den drei Strecken α, β, γ ein Dreieck bilden läßt, dagegen:

$$\left(\frac{\partial^2 S_p}{\partial \gamma^2}\right)_{p=0} = 0,$$

wenn sich ein solches Dreieck nicht bilden läßt.

Die erstere Gleichung erhält man ebenso aus (43) bzw. (48^b) und (49^a), die letztere Gleichung aus (44) und (45), bzw. (48) und (49^b), wenn man vor der Differentiation $p = 0$ setzt und unter dem Integralzeichen differenziert. Auch die Bildung der zweiten Differentialquotienten von S_0 nach γ kann daher so geschehen, daß man einfach unter dem Integralzeichen differenziert. Dies Resultat war nicht mit Sicherheit vorauszusehen, da das durch Differentiation unter dem Integralzeichen entstehende Integral j nur bedingt konvergent ist.

Für die Differentiation von S_0 nach β gilt natürlich dasselbe.

Wenn wir jetzt zu unseren Untersuchungen zurückkehren, so haben wir zunächst zu entscheiden, ob das Integral (34) mit (33) wirklich gleichwertig ist; es ist dies sicher der

Fall, wenn es gestattet ist, die in (33) gegebene Funktion φ unter dem Integralzeichen nach t zu differenzieren. Ersetzen wir φ wieder durch φ_p, indem wir unter dem Integralzeichen den Faktor e^{-ps} hinzufügen, so ist:

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial t} = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \left[\left(\frac{S_p}{R} \right)_{\tau = t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial S_p}{\partial R} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial t} d\tau \right].$$

Nun haben wir soeben gezeigt, daß:

$$\left(\frac{\partial S_p}{\partial R} \right)_{p=0} = \frac{\partial S_0}{\partial R} \tag{50}$$

ist (denn in vorstehenden Formeln ist jetzt α durch a, β durch R und γ durch $c\tau$ zu ersetzen); folglich ist der gefundene Ausdruck für $p = 0$ identisch mit dem aus (34) abgeleiteten Werte $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, und demnach ist hier die Vertauschung der beiden Integrationen nach s und nach τ erlaubt, d. h. die Funktionen φ, wie sie in (33) und (34) angegeben wurden, sind miteinander identisch.

Ebenso läßt sich jetzt die Richtigkeit der Relation (16) nachweisen. Es kam darauf an, ob die Funktion φ unter den drei nach k, l, m genommenen Integralzeichen differenziert werden darf, oder ob die in (34) aufgestellte Funktion φ unter dem nach s genommenen Integrale differenziert werden darf. Jedenfalls ist:

$$\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} = \frac{3 \varepsilon c}{2 \pi^2 a^3} \int_0^t S_p \frac{\partial R^{-1}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} d\tau + \int_0^t \frac{\partial S_p}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{d\tau}{R},$$

und aus (50) folgt dann sofort die Zulässigkeit des Verfahrens. Ebenso ist es bei zweimaliger Differentiation. Es besteht daher in der Tat die Gleichung (16); und die in (34) aufgestellte Funktion φ ist als Integral der Differentialgleichung (6) zu betrachten, und zwar für einen Punkt x, y, z, der sich zur Zeit t im Innern des Elektrons befindet, während die rechte Seite von (6) durch Null zu ersetzen ist, wenn x, y, z die Koordinaten eines äußeren Punktes sind.

§ 6. Das skalare Potential φ für Volumladung bei Translation mit Unterlichtgeschwindigkeit.

Es handelt sich nun darum, die Werte von S in den verschiedenen Fällen zur Auswertung des für φ in (34) gefundenen Ausdrucks wirklich zu benutzen. Dabei haben wir zu verfolgen, wie das Elektron allmählich seine Anfangslage verläßt, um dann die ihm durch die Funktionen ξ, η, ζ (bzw. durch die Komponenten $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$) vorgeschriebene Bahn zu beschreiben. Dabei ist aber die Variable τ zunächst als Zeitmaß zu denken, und diese Zeit τ wird nach rückwärts gemessen.

Für $\tau = 0$ wird nach (26) $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, d. h. das Elektron befindet sich in der zur Zeit t erreichten Endlage, während der Wert $\tau = t$ der ursprünglichen Ruhelage entspricht.

Nach (26) und (34^b) bezeichnet R die Entfernung des Punktes mit den Koordinaten:

$$x + \int_0^t \mathfrak{v}_x \, dt, \quad y + \int_0^t \mathfrak{v}_y \, dt, \quad z + \int_0^t \mathfrak{v}_z \, dt,$$

von dem Punkte mit den Koordinaten:

$$\int_0^{t-\tau} \mathfrak{v}_x \, dt, \quad \int_0^{t-\tau} \mathfrak{v}_y \, dt, \quad \int_0^{t-\tau} \mathfrak{v}_z \, dt,$$

d. h. des Punktes, welchem in Bezug auf das im Elektron feste Koordinatensystem die Koordinaten x, y, z zukommen, von demjenigen Punkte, in welchem sich der Anfangspunkt dieses Koordinatensystems zur Zeit $t - \tau$ befand.

Die geradlinige Entfernung der Anfangspunkte dieser beiden Koordinatensysteme voneinander soll im folgenden mit T bezeichnet werden; es ist also:

$$T^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{51}$$

Um den Wert von φ zu bestimmen, haben wir den ganzen Raum, entsprechend den Ungleichungen, wie sie in § 5 bei Berechnung des Integrales $S_0 (= S)$ benutzt wurden, in verschiedene Gebiete einzuteilen, gleichzeitig aber auch das Anwachsen der Variabeln τ zu berücksichtigen. Es sei:

I. $c\tau < a$.

Dann zerfällt der Raum in folgende drei Gebiete:

1. $R < a - c\tau$, eine Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ um den Punkt O als Mittelpunkt, in welchem sich der Anfangspunkt des Systems x, y, z zur Zeit $t - \tau$ befand.

2. $a + c\tau > R > a - c\tau$, eine Kugelschale, welche nach innen von der Kugel $R = a - c\tau$, und außen von der konzentrischen Kugel $R = a + c\tau$ begrenzt wird.

3. $R > a + c\tau$, der Raum außerhalb der letzteren Kugel.

II. $c\tau > a$.

Dann sind folgende Gebiete zu unterscheiden:

1. $R < c\tau - a$, das Innere der Kugel $R = c\tau - a$.

2. $c\tau + a > R > c\tau - a$, eine Kugelschale, begrenzt von den beiden Kugeln $R = c\tau - a$ und $R = c\tau + a$.

3. $R > c\tau + a$, der Raum außerhalb der Kugel $R = c\tau + a$.

Dementsprechend haben wir folgende Werte von φ:

I. Für $c\tau < a$:

1. $R < a - c\tau$ (also auch $R < a$ und $a > R + c\tau$).

Hier ist (44) anzuwenden, und folglich erhalten wir aus (34):

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\, c^2}{4\,\pi\, a^3} \int_0^t \tau \, d\tau = \frac{3\,\varepsilon\, c^2 \cdot t^2}{8\,\pi\, a^3}. \tag{52}$$

Diese Formel gilt, solange t einen gewissen durch die Gleichung $R = a - c\tau$ bestimmten Wert τ' von τ nicht überschreitet. Da R von x, y, z und ξ, η, ζ abhängt, ist dieser Wert τ'

eine Funktion von t und x, y, z; nur wenn derselbe auch der Bedingung $c\tau' < a$ genügt, ist er hier brauchbar; und diese Ungleichung wird für gewisse Werte von x, y, z und t immer erfüllbar sein.

2. $a - c\tau < R < a + c\tau$; hier ist $a < R + c\tau$, und $a > R - c\tau$ für $R > c\tau$, und da $c\tau < a$ sein soll, auch $a > c\tau - R$ für $R < c\tau$; für $R \gtrless c\tau$ gilt also nach (43) und (34) die Formel:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c^2\,\tau'^2}{8\,\pi\,a^3} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'}^{t}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R} \tag{52a}$$

und zwar, solange t eine gewisse, durch die Gleichung $R = a + c\tau$ bestimmte Größe τ'' nicht überschreitet, welche als Funktion von t, x, y, z erscheint.

3. $a + c\tau < R$, also auch $c\tau < R$ und $a < R - c\tau$, d. h. es ist die Formel (45) für $t > \tau''$ anzuwenden:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c^2\,\tau'^2}{8\,\pi\,a^3} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'}^{\tau''}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R}. \tag{52b}$$

II. Für $c\tau > a$.

1. $R < c\tau - a$, also auch $R < c\tau$ und $a < c\tau - R$, so daß wieder die Formel (45) zur Anwendung kommt, nach welcher das Intervall $\tau'' < \tau < \tau'''$ keinen Beitrag zu der durch (34) gegebenen Funktion φ liefert, wenn τ''' durch die Gleichung $R = c\tau - a$ bestimmt wird (wobei die Wurzel $\tau''' > \frac{a}{c}$ sein muß, wenn sie brauchbar sein soll); es ist also hier ebenso wie im vorigen Falle:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c^2\,\tau'^2}{8\,\pi\,a^3} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'}^{\tau''}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R} \quad \text{für } \tau'' < t < \tau'''. \tag{53}$$

2. $c\tau - a < R < c\tau + a$, also $a > c\tau - R$; überdies ist die Bedingung $a < c\tau + R$ von selbst erfüllt, da hier $a < c\tau$ vorausgesetzt wird; es kommt also Gleichung (43) zur Anwendung, und es wird nach (34):

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c^2\,\tau'^2}{8\,\pi\,a^3} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'}^{\tau''}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'''}^{t}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R}, \tag{53a}$$

wo τ''' definiert ist, wie im vorigen Falle. Die Gleichung hat Gültigkeit für $\tau''' < t < \tau^{IV}$, wenn τ^{IV} als Wurzel der Gleichung $a = c\tau + R$ definiert wird.

3. $c\tau + a < R$, also $a < R - c\tau$ für $c\tau < R$; der Fall $c\tau > R$ kommt hier nicht in Betracht, denn dann wäre $c\tau - R + a < 0$, was nicht sein kann; es ist also Gleichung (45^b) anwendbar, d. h. der Faktor S unter dem Integralzeichen in (34) für dieses Intervall gleich Null und:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c^2\,\tau'^2}{8\,\pi\,a^3} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'}^{\tau''}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R} + \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'''}^{\tau^{IV}}[a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{d\tau}{R} \quad \text{für } t > \tau^{IV}. \tag{53b}$$

Es kommt im folgenden auf die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ an; wir haben nach Gleichung (34[b]):

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x + \xi}{R};$$

demnach ergibt sich aus (52):

(54) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{für } c\tau < a \quad \text{und} \quad R < a - c\tau,$$

dagegen aus (52[a]):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\varepsilon c^2 \tau'}{4\pi a^3}\frac{\partial \tau'}{\partial x} - \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\left(\frac{a^2 - (c\tau - R)^2}{R}\right)_{\tau=\tau'}\frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_{\tau'}^{t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a^2 - (c\tau - R)^2}{R}\right)d\tau.$$

Nun war τ' durch die Bedingung $R = a - c\tau$ definiert; es ist also:

$$c\frac{\partial \tau'}{\partial x} = -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)_{\tau=\tau'} - \left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)_{\tau=\tau'}\frac{\partial \tau'}{\partial x}$$

und:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial R}{\partial \tau}\right)_{\tau=\tau'} &= \left(\frac{\partial R}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial R}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}\right)_{\tau=\tau'}\\ &= \left(\frac{1}{R}\left[(x+\xi)\mathfrak{v}_x + (y+\eta)\mathfrak{v}_y + (z+\zeta)\mathfrak{v}_z\right]\right)_{\tau=\tau'}\\ &= v(\tau')\cdot\operatorname{cosin}(R, v),\end{aligned}$$

somit:

(54[a]) $$\frac{\partial \tau'}{\partial x} = -\left[\frac{x+\xi}{R(c + v\cdot\operatorname{cosin}(R,v))}\right]_{\tau=\tau'},$$

und schließlich:

(54[b]) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\varepsilon c^2 \tau'}{4\pi a^3}\frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_{\tau'}^{t}(c^2\tau^2 - a^2 - R^2)\frac{x+\xi}{R^3}d\tau$$

$$\text{für } c\tau < a \quad \text{und} \quad a - c\tau < R < a + c\tau,$$

wo für $\frac{\partial \tau'}{\partial x}$ der in (54[a]) angegebene Wert einzusetzen ist.

Ebenso erhält man aus (52[b]), da τ'' der Gleichung $a = R - c\tau$ genügen sollte:

(54[c]) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\varepsilon c^2 \tau'}{4\pi a^3}\frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_{\tau'}^{\tau''}(c^2\tau^2 - a^2 - R^2)\frac{x+\xi}{R}d\tau,$$

$$\text{für } c\tau < a \quad \text{und} \quad a + c\tau < R.$$

Dieselbe Formel bleibt für den in (53) behandelten Fall ($c\tau > a$, $R < c\tau - a$) bestehen.

Aus (53[a]) ergibt sich ferner:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\varepsilon c^2 \tau'}{4\pi a^3}\frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_{\tau'''}^{\tau''}(c^2\tau^2 - a^2 - R^2)\frac{x+\xi}{R}d\tau + \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_{\tau'''}^{t}(c^2\tau^2 - a^2 - R^2)\frac{x+\xi}{R}d\tau$$

$$\text{für } c\tau - a < R < c\tau + a,$$

endlich aus (53^b)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3\,\varepsilon\, c^2\, \tau'}{4\, a^3} \frac{\partial \tau'}{\partial x} + \frac{3\,\varepsilon\, c}{8\,\pi\, a^3} \int_{\tau'}^{\tau''} (c^2\, \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x+\xi}{R}\, d\tau + \frac{3\,\varepsilon\, c}{8\,\pi\, a^3} \int_{\tau'''}^{\tau^{IV}} (c^2 \tau^2 - a^2 - R^2) \frac{x+\xi}{R}\, d\tau,$$

denn die durch Differentiation der Grenzen τ''' und τ^{IV} entstehenden Glieder fallen hier infolge der für diese Grenzen geltenden Gleichungen fort.

Im folgenden wird weiters verlangt (und zwar zur Berechnung der auf das Elektron wirkenden Kräfte), diese Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ über das Innere des Elektrons nach x, y, z zu integrieren. Dabei sind die für die verschiedenen Fälle aufgestellten Ungleichungen zu berücksichtigen. Da $\tau', \tau'', \tau''', \tau^{IV}$ nicht näher bekannte Funktionen von x, y, z (und t) sind, so können diese Integrationen im allgemeinen nicht weiter ausgeführt werden. Doch läßt sich durch folgende Überlegung eine Vereinfachung erzielen.

§ 7. Fortsetzung. — **Ausführung der Integration über das Volumen des Elektrons.**

Die verlangten dreifachen Integrale führen wir auf Doppelintegrale mittelst der bekannten Gauß'schen Formel:

$$\int\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = -\int\int \varphi \cdot \operatorname{cosin}(x, n)\, d\sigma \tag{55}$$

zurück, wo n die nach Innen gerichtete Normale und $d\sigma$ das Oberflächenelement der das Elektron darstellenden Kugel bezeichnet. In unserem Falle ist die Normale n der Radius der Kugel und

$$\operatorname{cosin}(x, n) = -\frac{x}{a}, \quad d\sigma = a \sin \Theta\, d\Theta\, d\Psi,$$

wenn Ψ und Θ in bekannter Weise Länge und Breite auf der Kugel bezeichnen, also:

$$\int\int\int \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int\int \varphi\, \frac{x}{a}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{\pi} \varphi \cdot x \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta. \tag{56}$$

Um die Winkel Θ und Ψ analytisch einzuführen, gehen wir von einem rechtwinkligen Hülfssysteme x'', y'', z'' aus, dessen Mittelpunkt im Zentrum des Elektrons liegt, und setzen:

$$\begin{aligned} z'' &= r \operatorname{cosin} \Theta, \\ x'' &= r \sin \Theta \cdot \operatorname{cosin} \Psi, \\ y'' &= r \sin \Theta \cdot \sin \Psi, \end{aligned} \tag{57}$$

wo $r^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und wo auf der Oberfläche der Kugel $r = a$ zu nehmen ist.

Die Achse z'' soll mit der Linie O-M zusammenfallen, welche den Anfangspunkt des im Raume festen Koordinatensystems mit dem Zentrum des Elektrons verbindet, die x''-Achse soll in die x-y-Ebene des im Elektron festen Systems x-y-z fallen; dann ist die Lage des neuen Systems vollständig bestimmt, und man hat in den Substitutionsgleichungen:

$$
(58)\qquad
\begin{aligned}
x &= x'' \cdot \cos(x, x'') + y'' \cdot \cos(x, y'') + z'' \cdot \cos(x, z''),\\
y &= x'' \cdot \cos(y, x'') + y'' \cdot \cos(y, y'') + z'' \cdot \cos(y, z''),\\
z &= x'' \cdot \cos(z, x'') + y'' \cdot \cos(z, y'') + z'' \cdot \cos(z, z'')
\end{aligned}
$$

noch die Koeffizienten zu berechnen. Jedenfalls ist:

$$
(59)\qquad \cos(x, z'') = \frac{\xi}{T},\ \ \cos(y, z'') = \frac{\eta}{T},\ \ \cos(z, z'') = \frac{\zeta}{T}.
$$

Die x''-Achse steht zur y''- und z''-Achse senkrecht, außerdem aber auch zur z-Achse; es ist also:

$$
(60)\qquad \operatorname{cosin}(x'', z) = 0,
$$

und die drei genannten Achsen liegen in einer Ebene, so daß:

$$
(61)\qquad \operatorname{cosin}(z, y'') = \sin(z, z'') = \sin(z, T) = \frac{\sqrt{\eta^2 + \xi^2}}{T}.
$$

Die übrigen Koeffizienten ergeben sich aus den elementaren Formeln der orthogonalen Transformation; man findet so durch leichte Rechnung:

$$
(62)\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{\varrho T}(-x'' \eta T - y'' \xi \zeta + z'' \xi \varrho),\\
y &= \frac{1}{\varrho T}(x'' \xi T \quad - y'' \eta \zeta + z'' \eta \varrho),\\
z &= \frac{1}{\varrho T}(\quad 0 \quad + y'' \varrho^2 + z'' \zeta \varrho),
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ gesetzt ist, oder nach Einführung von Polarkoordinaten mittelst (57):

$$
(63)\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{r}{\varrho T}(-\eta T \sin\Theta \operatorname{cosin}\Psi - \xi \zeta \sin\Theta \sin\Psi + \xi \varrho \operatorname{cosin}\Theta),\\
y &= \frac{r}{\varrho T}(\xi T \sin\Theta \operatorname{cosin}\Psi \quad - \eta \zeta \sin\Theta \sin\Psi + \eta \varrho \operatorname{cosin}\Theta),\\
z &= \frac{r}{\varrho T}(\quad 0 \quad + \varrho^2 \sin\Theta \sin\Psi + \zeta \varrho \operatorname{cosin}\Theta).
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten x, y, z kommen in φ nur vor, insofern sie in R eingehen; man findet sofort aus (63):

$$
(64)\qquad
\begin{aligned}
R^2 &= (x + \xi)^2 + (y + \eta)^2 + (z + \zeta)^2\\
&= r^2 + T^2 + 2(x\xi + y\eta + z\zeta)\\
&= r^2 + T^2 + 2 r T \operatorname{cosin}\Theta.
\end{aligned}
$$

Ferner ist:

$$
(64^a)\qquad \operatorname{cosin}(r, x) = \frac{x}{r} = \frac{1}{\varrho T}(\xi \varrho \operatorname{cosin}\Theta - \eta T \sin\Theta \operatorname{cosin}\Psi - \zeta \xi \sin\Theta \sin\Psi),
$$

und:

$$
(64^b)\qquad \operatorname{cosin}(R, x) = \frac{x + \xi}{R} = \frac{\varrho \xi (r \operatorname{cosin}\Theta + T) - \eta r T \sin\Theta \operatorname{cosin}\Psi - \zeta \xi r \sin\Theta \sin\Psi}{\varrho T \sqrt{r^2 + T^2 + 2 r T \operatorname{cosin}\Theta}}.
$$

Dieser Formeln werden wir uns sofort zur Ausführung der in (55) verlangten Integrationen bedienen.

Vorweg bemerken wir noch, daß es bei diesem Integrationsgeschäfte notwendig wird, zu unterscheiden, ob die Geschwindigkeit, mit der sich das Elektron bewegt, größer oder kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist. Wir nehmen zunächst das letztere an, setzen also zunächst Bewegung mit „Unterlichtgeschwindigkeit" voraus. Wir definieren dieselbe durch die Bedingung:

$$c\tau > T, \tag{65}$$

welche aussagt, daß der vom Lichte in der Zeit τ zurückgelegte geradlinige Weg stets größer ist, als die durch (51) definierte Entfernung des Anfangspunktes O vom Anfangspunkte des Systems x, y, z. Die Bedingung (65) ist sicher immer erfüllt, wenn die Bewegung des Elektrons mit einer Geschwindigkeit v geschieht, welche kleiner als c ist, denn der vom Elektron beschriebene Weg ist im allgemeinen nicht geradlinig und somit größer als T. Aber auch für $v > c$ kann die Ungleichung (65) noch erfüllt sein; auch derartige Bewegungen sind daher in unsere Bedingung (65) für „Unterlichtgeschwindigkeit" mit eingeschlossen.

Wir gehen jetzt zur näheren Behandlung der in (56) angedeuteten Integrationen nach Θ und Ψ über. Es war φ selbst nach (34), bzw. (52), (52[a]) und (52[b]) als ein in Bezug auf die Variable τ gewonnenes Integral gegeben. Die Integration nach τ kann, so lange $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ als Funktionen von t ganz allgemein gelassen werden, nicht weiter ausgeführt werden; Vereinfachungen sind also nur durch Vertauschung der Integrationsordnung möglich: wir denken uns zuerst die Integration nach Θ und Ψ, und dann die nach τ ausgeführt. Die dabei zu berücksichtigenden, je nach dem Werte von τ verschieden zu wählenden, Integrationsgebiete, sind uns durch die in § 6 aufgestellten Ungleichungen vollkommen definiert.

Wir haben demgemäß die sukzessiven Lagen des Elektrons im Raume genau zu verfolgen, und zwar zuerst unter Annahme der Ungleichung (65), d. i. für Unterlichtgeschwindigkeit.

Erste Lage. Für $\tau = 0$ ist $T = 0$, und für kleine Werte von τ kann $a > 2c\tau$ und $a > T$ angenommen werden. Der Mittelpunkt des Elektrons befindet sich in der Entfernung T vom Anfangspunkte O, um den eine Kugel mit dem Radius $c\tau$ gelegt werde; diese Kugel liegt ganz im Innern einer konzentrierten Kugel mit dem Radius $a - c\tau$. Die letztere befindet sich ganz im Innern des Elektrons, d. h. der Kugel mit dem Radius a und mit dem Mittelpunkte M, denn die kürzeste Entfernung A-B (vgl. Fig. 1) zwischen den Peripherien beider Kreise ist gleich:

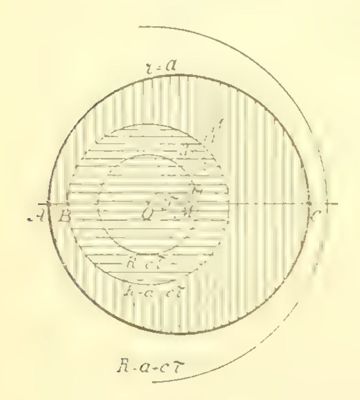


Fig. 1.

$$a - T - (a - c\tau) = c\tau - T > 0 \quad \text{nach (65).}$$

Die Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ teilt das Innere des Elektrons in zwei Gebiete. In dem einen, das in Fig. 1 vertikal schraffiert ist, haben wir $R < T + a$ ($T + a = OC$ in Fig. 1), also auch $a - c\tau < R < a + c\tau$, wenn wieder R die Entfer-

nung des Punktes x, y, z vom Punkte O bezeichnet; es ist hier also φ durch (52^a) bestimmt. In dem andern (horizontal schraffierten) Gebiete ist $R < a - c\tau$, also φ durch (52) gegeben.

Im letzteren Gebiete ist φ von x, y, z unabhängig, folglich das über dasselbe erstreckte Integral (55) gleich Null. Das entsprechende, über das erste Gebiet erstreckte Integral ist die Summe zweier Integrale J_1 und J_2, von denen sich das erste auf die äussere Grenzfläche der Kugelschale, d. i. auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $r = a$ (Oberfläche des Elektrons) bezieht, das andere auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $R = a - c\tau$. Es ist also:

$$J_1 = -\iint \varphi \cdot \cos(r, x) \cdot a^2 \cdot \sin\Theta \cdot d\Theta\, d\Psi,$$

worin $\operatorname{cosin}(r, x)$ durch (64^a) bestimmt ist. Wenn man den zu wählenden Wert von φ aus (52^a) entnimmt, ist zu beachten, daß die Größe τ' jetzt ihre Bedeutung verliert. Früher nämlich handelte es sich darum, für einen gegebenen Wert von R (also auch für gegebene Werte von x, y, z) die Integrationsgrenzen den Ungleichungen gemäß zu bestimmen; jetzt aber (nach Vertauschung der Integrationsordnung) ist ein Wert von τ gegeben, und R soll entsprechend (hier einfach durch die Gleichung $R = a - c\tau$) bestimmt werden. Die früheren Werte $\tau', \tau'', \tau''', \tau^{IV}$ kommen daher jetzt nicht weiter in Betracht; man findet so:

$$J_1 = \frac{-3\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{\pi} [a^2 - (c\tau - R)^2] \operatorname{cosin}(n, x) \cdot \sin\Theta \cdot \frac{d\Theta}{R}.$$

Setzt man hier für R und $\operatorname{cosin}(n, x) = -\operatorname{cosin}(r, x)$ die Werte (64) und (64^a) ein (wobei in ersterem $r = a$ zu nehmen ist), so läßt sich die Integration nach Ψ ausführen, und infolge der Relationen:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{cosin}\Psi\, d\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin\Psi\, d\Psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\Psi = 2\pi,$$

ergibt sich:

$$J_1 = \frac{3\varepsilon c}{4a}\int_0^t \frac{\xi}{T} d\tau \int_0^{\pi} \left[\frac{a^2 - c^2\tau^2}{R} + 2c\tau - R\right] \sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta.$$

Auch die Integration nach Θ ist ausführbar, denn das Glied mit $2c\tau$ fällt ganz heraus, und es ist

$$(66) \quad \int \frac{\sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta}} = \frac{1}{3a^2T^2}(a^2 + T^2 - aT\operatorname{cosin}\Theta)\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta},$$

$$(66^a) \quad \begin{aligned} &\int \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta}.\ \sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta \\ &= \frac{1}{15a^2T^2}(a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta)^{3/2}(a^2 + T^2 - 3aT\operatorname{cosin}\Theta) \end{aligned}$$

also durch Einsetzen der Grenzen 0 und π:

$$(67) \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta}} = -\frac{2T}{3a^2},$$

$$(67^a).\qquad \int_0^\pi \sqrt{a^2+T^2+2aT\,\text{cosin}\,\Theta}.\ \sin\Theta\,\text{cosin}\,\Theta\,d\Theta = \frac{2T}{15a^2}(5a^2-T^2).$$

Mit Hilfe dieser Formeln drückt sich J_1 durch eine Funktion $\Phi_{1x}(a,t)$ aus, die durch die Gleichung:

$$(68)\qquad \Phi_{1x}(a,t) = \frac{\varepsilon c}{10a^3}\int_0^a \xi(T^2-10a^2+5c^2\tau^2)\,d\tau$$

definiert sei, wo sich das zweite Argument von Φ_1 darauf bezieht, daß auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen eine Funktion von t steht; es ist:

$$(68^a)\qquad J_1 = \Phi_{1x}(t,t).$$

Um das auf die Kugel mit dem Radius $R = a - c\tau$ bezügliche Integral zu behandeln, führen wir Polarkoordinaten R, Θ', Ψ' mit dem Mittelpunkte O ein, und zwar mit Hilfe eines rechtwinkligen Systems, dessen Achsen den oben benutzten Achsen x'', y'', z'' parallel sind; d. h. wir setzen, analog zu (63):

$$(69)\qquad \begin{aligned} x+\xi &= \frac{R}{\varrho T}(-\eta T\sin\Theta'\,\text{cosin}\,\Psi' - \xi\zeta\sin\Theta'\sin\Psi' + \xi\varrho\,\text{cosin}\,\Theta'),\\ y+\eta &= \frac{R}{\varrho T}(\xi T\sin\Theta'\,\text{cosin}\,\Psi' - \eta\zeta\sin\Theta'\sin\Psi' + \eta\varrho\,\text{cosin}\,\Theta'),\\ z+\zeta &= \frac{R}{\varrho T}(0 + \varrho^2\sin\Theta'\sin\Psi' + \zeta\varrho\,\text{cosin}\,\Theta'). \end{aligned}$$

Dann ist:

$$(69^a)\qquad \text{cosin}\,(R,x) = \frac{x+\xi}{R} = \frac{1}{\varrho T}(-\eta T\sin\Theta'\,\text{cosin}\,\Psi' - \xi\zeta\sin\Theta'\sin\Psi' + \xi\varrho\,\text{cosin}\,\Theta')$$

und (da hier $\text{cosin}\,(n,x) = +\,\text{cosin}\,(R,x)$ zu nehmen ist):

$$J_2 = -\int_0^{2\pi} d\Psi\int_0^\pi \varphi\cdot\text{cosin}\,(R,x)\,(a-c\tau)^2\sin\Theta'\,d\Theta'$$

$$(70)\qquad = -\frac{3\varepsilon c}{16\pi a^3}\int_0^t d\tau\int_0^{2\pi} d\Psi\int_0^\pi [a^2-(c\tau-R)^2]\,\text{cosin}\,(R,x)\cdot(a-c\tau)\sin\Theta'\,d'\,\Theta,$$

wo nun $R = a - c\tau$ zu setzen und die Integration nach Ψ auszuführen ist; also:

$$(70^a)\qquad J_2 = -\frac{3\varepsilon c}{8a^3}\int_0^t \frac{\xi}{T}\,d\tau\int_0^\pi 4c\tau(a-c\tau)^2\sin\Theta'\,\text{cosin}\,\Theta'\,d\Theta'.$$

Hier ist auch die Integration nach Θ' ausführbar, und es ergibt sich $J_2 = 0$. Für $t < \frac{a}{2c}$ gilt somit die Relation:

$$(71)\qquad \varphi_x = \iiint \varphi\,dx\,dy\,dz = \Phi_{1x}(t,t),$$

wenn die Integration über das Innere des Elektrons ausgedehnt wird, und wenn Φ_{1x} wieder durch (68) definiert ist.

Weitere Entwicklung der ersten Lage. Es ist $c\tau < a < 2c\tau$. In dem horizontal schraffierten Gebiete (Fig. 2) ist wieder φ von x, y, z unabhängig, also das betreffende Raumintegral gleich Null; in dem vertikal schraffierten Gebiete dagegen ist wieder der in (52^a) angegebene Wert von φ zu benutzen, so daß die Formel (71) für das ganze Intervall $0 < t < \frac{a}{c}$ gültig bleibt.

Zweite Lage. Wächst τ weiter, so wird $c\tau > a$, während T (stets $< c\tau$) zunächst noch kleiner, als a bleibt; es ist dann $c\tau - a < a - T$, d. h.:

$$c\tau + T < 2a. \tag{72}$$

Die Kugel mit dem Radius $R = c\tau - a$ liegt also ganz innerhalb der Kugel $R = a - T$ (und letztere berührt die Kugel $r = a$ von innen). Auch hier wird das Elektron durch die Kugel $R = c\tau - a$ in zwei Gebiete getrennt; in dem vertikal schraffierten (vgl. Fig. 3) ist $c\tau - a < R < c\tau + a$, also der entsprechende Beitrag zum Potentiale φ

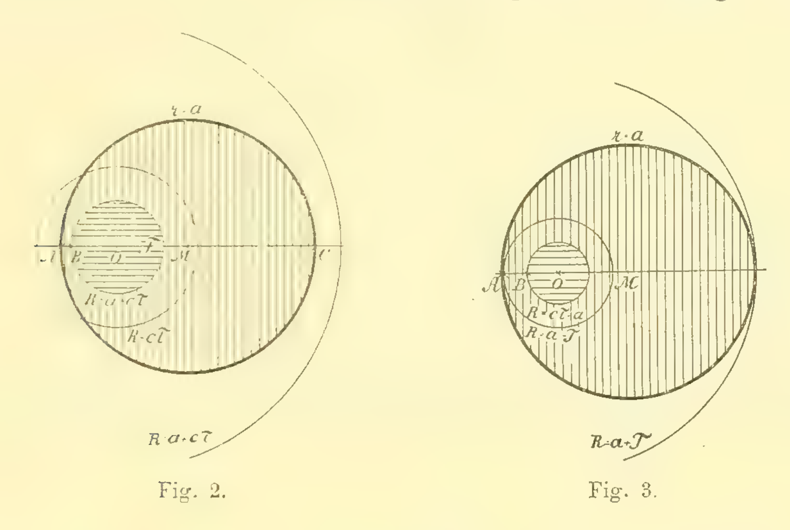


Fig. 2. Fig. 3.

durch (53^a) bestimmt; im andern (horizontal schraffierten) Gebiete ist $R < c\tau - a$, also der fragliche Beitrag gemäß (45) unter Berücksichtigung von (53) zu berechnen; dieser Beitrag ist also gleich Null, und es kommt genau wie in der ersten Lage nur auf das Gebiet

$$c\tau - a < R < c\tau + a$$

an, in welchem der Beitrag zum Potentiale φ durch die Gleichung:

$$d\varphi = \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] d\tau$$

gemäß (53^a) bestimmt wird, also genau wie in der ersten Lage. Wir erhalten durch Anwendung der Gleichung (55) wieder zwei Oberflächenintegrale J_1 und J_2. Das eine (J_1) bezieht sich auf die Kugel $r = a$ und ist wieder durch (68) gegeben; für J_2 gilt wieder die Gleichung (70), in der nur jetzt $R = c\tau - a$ (statt früher $a - c\tau$) zu setzen ist; dann aber wird der unter dem Integralzeichen stehende Faktor:

$$[a^2 - (c\tau - R)^2]$$

gleich Null, und folglich $J_2 = 0$. Da nun auch in der ersten Lage $J_2 = 0$ gefunden wurde, so gilt folglich die Formel (71) auch für die jetzt betrachtete zweite Lage.

Der Gültigkeitsbereich dieser zweiten Lage ist durch die Ungleichung (72) definiert; da τ stets an die Bedingung $0 < \tau < t$ gebunden ist, so wird diese Ungleichung so lange bestehen, wie das ganze Intervall $0 < \tau < t$ in den Bereich der Ungleichung (in der T eine Funktion von τ und t ist) fällt; bei wachsendem t wird schließlich nur ein Teil dieses Intervalles brauchbar, letzteres selbst also durch den Wert t^0, welcher als Wurzel der Gleichung:

$$(c\tau + T)_{\tau = t} = 2a \tag{72a}$$

bestimmt ist, in zwei Teile geteilt; für $0 < \tau < t^0$ gelten die Resultate der ersten und zweiten Lage; für $t^0 < \tau < t$ kommt die folgende Lage in Betracht. Dabei ist der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die Gleichung (72a) nur eine brauchbare Wurzel hat; bei der vollkommenen Unbestimmtheit der Funktion T können hier die verschiedensten Möglichkeiten eintreten; an der Hand einer geometrischen Integration der Gleichung (72a), wie wir sie sofort bei der dritten Lage besprechen, wird man sich in jedem einzelnen Falle leicht über alle Möglichkeiten Rechenschaft geben können. Für die erste und zweite Lage gilt also die Gleichung (71) für $0 < t < t_0$.

Dritte Lage. Bei weiterem Wachsen von τ wird nicht nur $c\tau > a$, sondern auch $c\tau + T > a$ werden,[1]) so daß die Ungleichung (72) nicht mehr erfüllt ist, aber T noch kleiner als a bleibt. Der Punkt O liegt jetzt noch innerhalb des Elektrons. Letzteres wird von der Kugel $R = c\tau - a$ geschnitten und in zwei Gebiete geteilt; in dem einen (in Fig. 4 horizontal schraffierten) Teile ist der Beitrag von φ gleich Null (da $R < c\tau - a$), in dem anderen (wo $R > c\tau - a$ und $r < a$) ist der Beitrag von φ nach (53a) zu berechnen.

Für die Berechnung des Integrals über das Volumen des Elektrons tritt keine weitere Änderung ein, wenn τ so weit wächst, daß auch $T > a$ wird (z. B. Fig. 5); dann liegt O

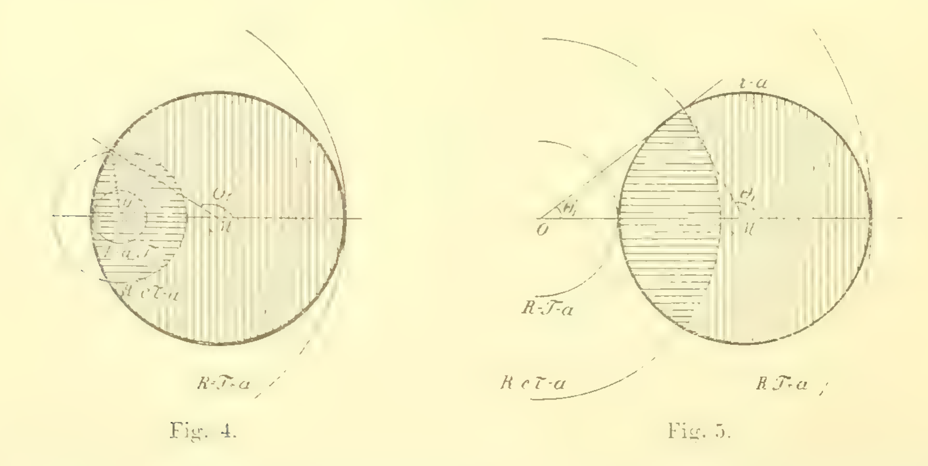


Fig. 4. Fig. 5.

[1]) Es ist hier vorausgesetzt, daß T mit wachsendem τ im wesentlichen wächst; es wäre denkbar, daß andauernd $T < a$ bleibt, so daß das Elektron sich nie um mehr, als die Länge eines Radius beträgt, von der Anfangslage entfernt; dann gilt die Gleichung (71) unbegrenzt für alle Werte von t.

außerhalb des Elektrons, und die Kugel wird, so lange $c\tau - a < T + a$ bleibt, wieder in zwei Teile zerlegt. In dem vertikal schraffierten Gebiete ist:

(73) $$0 < c\tau - a < R < T + a < c\tau + a,$$

also φ wieder durch (53^a) bestimmt, wenn das bei der „ersten Lage" über τ' Gesagte berücksichtigt wird; in dem horizontal schraffierten Gebiete ist $R < c\tau - a$, und demnach φ aus (52^b) zu entnehmen; d. h. dieses letztere Intervall liefert keinen Beitrag zu dem Integrale von φ, und wir haben nur das erstere Gebiet zu berücksichtigen. Dasselbe wird von den Kugeln $R = c\tau - a$ und $r = a$ begrenzt; demnach zerfällt das Integral in die Summe $J_1' + J_2'$, wo:

$$J_1' = -\iint \varphi \cdot \operatorname{cosin}(n, x) \cdot a^2 \sin\Theta\, d\Theta\, d\Psi \qquad \text{für } r = a,$$

$$J_2' = -\iint \varphi \cdot \operatorname{cosin}(n, x) \cdot (a - c\tau)^2 \sin\Theta'\, d\Theta' \cdot d\Psi' \quad \text{für } R = a - c\tau.$$

In J_1' ist $\operatorname{cosin}(n, x) = -\frac{x}{a}$ durch (64^a) gegeben; in einem Schnittpunkte beider Kugeln (vgl. Fig. 4 und 5) ist $\Theta = \Theta_1$, wenn Θ_1 durch die Gleichung:

(73^a) $$(a - c\tau)^2 = a^2 + T^2 + 2\,a\,T \operatorname{cosin}\Theta_1$$

definiert wird. Als Beitrag unseres Gebietes finden wir also, wenn τ^0 entsprechend gewählt wird:

$$J_1' = \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a}\int_{\tau^0}^{t} d\tau \int_0^{2\pi} d\Psi \int_0^{\Theta_1} [a^2 - (c\tau - R)^2]\,\frac{x}{a\,R} \sin\Theta \cdot d\Theta,$$

worin R wieder aus (64) bekannt ist.

Die untere Grenze τ^0 bestimmt sich dadurch, daß für das Intervall $0 < \tau < \tau^0$ die Resultate der ersten und zweiten Lage zur Anwendung kommen müssen. Nun war die Grenze zwischen zweiter und dritter Lage durch die Ungleichung (72) definiert, die für die erste und zweite Lage gelten sollte, während in der dritten Lage:

$$c\tau + T > 2\,a$$

wird; es ist demnach τ^0 als Wurzel der Gleichung:

(73^b) $$c\tau + T = 2\,a$$

als Funktion von t zu definieren. Natürlich ist hierbei vorausgesetzt, daß diese Gleichung eine Wurzel τ^0 zuläßt, die kleiner als t ist; darüber verschafft man sich in jedem einzelnen Falle durch eine geometrische Interpretation des zwischen t und τ gemäß (73^b) bestehenden Abhängigkeitsverhältnisses leicht vollkommene Klarheit; wir kommen darauf sogleich bei Betrachtung der Figuren 6 und 7 zurück (vgl. auch unten die Beispiele in § 12, 13 und 14).

Die in J_1' verlangte räumliche Integration ist ganz wie bei der ersten Lage ausführbar. Man hat, indem man den Wert von $\operatorname{cosin}\Theta_1$ aus (73^a) einsetzt und die unbestimmten Integrale (66) und (66^a) benutzt:

$$U_1 = \int\limits_0^{\Theta_1} \frac{\sin\Theta \cdot \cos\Theta \cdot d\,\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T \cos\Theta}}$$

$$= \frac{1}{6\,a^2\,T^2}[\{3\,(a^2 + T^2) - (a - c\,\tau)^2\}\,(a - c\,\tau) - 2\,(a + T)\,(a^2 + T^2 - a\,T)]$$

$$= \frac{1}{6\,a^2\,T^2}[3\,(a - c\,\tau)\,(T^2 - c^2\,\tau^2) - 2\,T^3],$$

$$U_2 = \int\limits_0^{\Theta_1} \sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T \cos\Theta} \cdot \sin\Theta \cos\Theta\, d\,\Theta$$

$$= \frac{1}{30\,a^2\,T^2}[\{5\,(a^2 + T^2) - 3\,(a - c\,\tau)^2\}\,(a - c\,\tau)^3 - 2\,(T + a)^3\,(a^2 + T^2 - 3\,a\,T)],$$

also:

(74)
$$J_1' = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a}\int\limits_{\tau^0}^{t}[(a^2 - c^2\,\tau^2)\,U_1 - U_2]\,\frac{\xi}{T}\,d\,\tau.$$

In analoger Weise wird J_2' gefunden, indem man in J_2, d. i. in (70), die obere Grenze π des nach Θ' genommenen Integrals durch Θ_1' ersetzt, wobei nach Fig. 4 und 5 der Winkel Θ_1' aus der Gleichung:

(74ª)
$$a^2 = (a - c\,\tau)^2 + T^2 - 2\,(a - c\,\tau)\,T \cos\Theta_1'$$

zu entnehmen ist. Dabei ist in (70) R gleich $c\,\tau - a$ zu setzen; dann verschwindet aber der unter dem Integralzeichen stehende Faktor $a^2 - (c\,\tau - R)^2$; das Integral J_2' ergibt sich folglich gleich Null. Da die Funktion φ_x gleich dem von 0 bis t genonnenen Integrale ist, so ist für das Intervall $0 < \tau < \tau^0$, wo τ^0 durch (73ᵇ) definiert war, die frühere Formel (71) anzuwenden, für das Intervall $\tau^0 < \tau < t$ aber die Funktion (74), d. h.:

(75)
$$\Phi_{2x}(a, t) = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a}\int\limits_{\tau^0}^{a}\frac{\xi}{T}\,[(a^2 - c^2\,\tau^2)\,U_1 - U_2]\,d\,\tau.$$

Es wird also für die dritte Lage:

(76)
$$\varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t),$$

wobei τ^0 durch (73ᵇ) bestimmt wurde.

Dieser Ausdruck ist anwendbar, solange das Elektron von der Kugel mit dem Radius $R = c\,\tau - a$ geschnitten wird, d. h. solange für alle Werte von τ zwischen t^0 und t die Ungleichung $c\,\tau - a < T + a$ erfüllt ist; der äußerste Wert von τ, bei dem dies noch stattfindet, ist die kleinste Wurzel τ', welche $\geqq t^0$ ist und der Gleichung genügt:

(77)
$$c\,\tau - a = T + a.$$

Ist diese Wurzel τ', welche selbst im allgemeinen Funktion von t ist, größer als t, so ist dieselbe nicht brauchbar, da die Variable τ notwendig an die Bedingung $\tau \leqq t$ gebunden ist; dann gilt die Gleichung (76) für alle Werte von t, die der Ungleichung $t < \tau'$ genügen, und durch die Bedingung:

(78)
$$t = \tau' \quad \text{oder} \quad c\,t = T_{\tau = t} + 2\,a$$

ist ein Wert t' bestimmt, bis zu welchem t wachsen kann, ohne die Gleichung (76) zu stören.

Für $t > t'$ wird zugleich (vgl. unten Fig. 6 und 7) $\tau' < t$, und es tritt die sogleich zu besprechende vierte Lage ein.

Vierte Lage. Wenn die erwähnte Wurzel τ' kleiner als t ist, so wird für $t > \tau'$ das betreffende Integral wieder gleich Null (indem die Funktion unter dem Zeichen verschwindet, da dann $c\tau - a > R$ für $\tau' < \tau < t$), und wir erhalten:

$$\varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau', t), \tag{79}$$

wo Φ_1 und Φ_2 bzw. durch (68) und (75) definiert sind.

Zusammenfassend haben wir also für das dreifache Integral von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, erstreckt über das Innere des Elektrons, die Werte:

$$\varphi_x = \Phi_{1x}(t, t) \qquad \text{für } 0 < t \leq t^0, \tag{80}$$

$$\varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) \qquad \text{„ } t^0 < t \leq t', \tag{81}$$

$$\varphi_x = \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau', t) \qquad \text{„ } t' \leq \tau' \leq t, \tag{82}$$

wobei vorausgesetzt ist, daß die Kurve so verläuft, wie es in Figur 6 und 7 schematisch dargestellt ist.

Für die Integrale von $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ gelten ganz analoge Formeln; man hat nur ξ bzw. durch η oder ζ zu ersetzen.

Es empfiehlt sich, diese Verhältnisse an einer Figur zu veranschaulichen. Wir wählen die Variabeln t und τ als Koordinaten, t als Abszisse, τ als Ordinate, und zeichnen die Gerade $t = \tau$ und die Kurve (77), d. h. $c\tau = T + 2a$, und die Kurve $c\tau + T = 2a$. In dem vertikal schraffierten Teile der Ebene ist $\tau > t$; derselbe kommt daher für die Integration nicht in Betracht. Verläuft die Kurve (77) so, wie in beistehender Figur 6, so ist in den schräg schraffierten Intervallen t selbst als obere Grenze des Integrals Φ_{1x} bzw. Φ_{2x} zu wählen, in dem horizontal schraffierten Intervalle dagegen τ'.

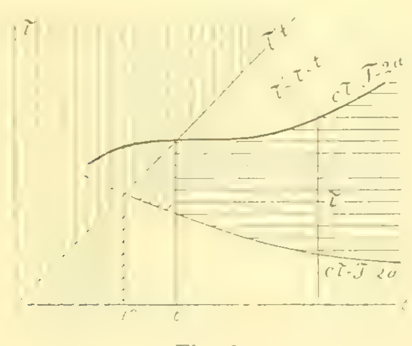


Fig. 6.

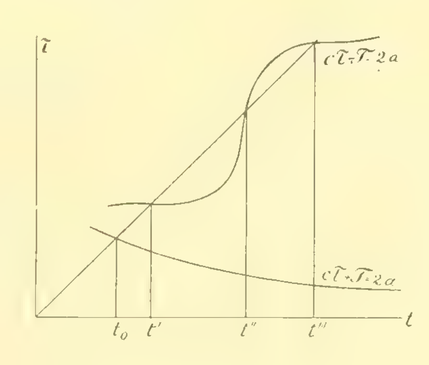


Fig. 7.

Man könnte einen Moment zweifelhaft sein, ob diese Resultate auch gültig bleiben, wenn die Kurve (77), nachdem sie in Fig. 6 die Linie $\tau = t$ an der Stelle $t = t'$ überschritten hat, nicht so verläuft, wie in der Zeichnung angenommen wurde, sondern mit wachsendem t fällt. Wenn nämlich zur Zeit $\tau = t'$ die entsprechende Lage des Elektrons

erreicht ist, so wächst die Variable τ sicher weiter über t' hinaus; fällt also die Kurve mit wachsendem t, so daß $\tau' < t'$ ist für $t > t'$, so können diese Werte τ' unmöglich eine physikalische Bedeutung haben. Diese Überlegung ist aber nur scheinbar berechtigt. Wie nämlich zu Beginn von § 6 hervorgehoben wurde, ist das Elektron zur Zeit t an der durch den Wert $\tau = 0$ gegebenen Stelle und zur Anfangszeit $t = 0$ an der jetzt durch den Wert $\tau = t$ markierten Lage. Ist daher $\tau' < t'$ für $t > t'$, so sagt dies aus, daß der nachwirkende Einfluß der zu Beginn der Bewegung herrschenden Verhältnisse jetzt ein anderer ist, als im Falle $\tau' > t'$, und daß infolgedessen das Intervall $\tau' < \tau < t$ $(t > t')$ keinen Beitrag zum Integrale liefert, indem jetzt τ' die obere Grenze des Integrals wird. Für jeden Wert von t (als Abszisse) ist also die zugeordnete Ordinate zur Darstellung von τ zu benutzen, und der auf ihr liegende Wert von τ' (Schnittpunkt mit der Kurve $c\tau = T + 2a$) kommt für die Rechnung in Gleichung (74) allein in Betracht.

Schneidet also die Kurve (77) die Gerade $t = \tau$ nochmals (in t', t'', t'''), wie in Figur 7, so haben wir:

$$
\begin{aligned}
\varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\;t, t) && \text{für} \quad t^0 < t < t' \\
\varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\;\tau', t) && \text{„} \quad t' < t < t'' \\
\varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\;t, t) && \text{„} \quad t'' < t < t''' \\
\varphi_x &= \Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(\tau''', t) && \text{„} \quad t''' < t \,\ldots\,.
\end{aligned}
\tag{83}
$$

Anders ist es, wenn die Gleichung (77) eine Lösung τ' hat, welche kleiner als $\frac{2a}{c}$ ist; dann ist aber $(T)_{\tau=\tau'} = c\tau' - 2a < 0$; d. h. T würde negativ sein, also T durch 0 hindurchgehen, und das Elektron rückläufig werden. Solche kompliziertere Bewegungen bedürfen einer genaueren Untersuchung in jedem einzelnen Falle.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß entsprechende Formeln und Überlegungen für die dreifachen Integrale φ_y, φ_z der Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ Gültigkeit haben.

§ 8. Das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ für Translation mit Unterlichtgeschwindigkeit bei Volumladung.

Neben dem skalaren Potentiale φ haben wir die drei Vektorpotentiale $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ zu untersuchen, welche durch die Gleichungen (2) definiert werden.

Diese Gleichungen entstehen aus (1), indem auf der rechten Seite bzw. der Faktor:

$$\frac{\mathfrak{v}_x}{c}, \quad \frac{\mathfrak{v}_y}{c}, \quad \frac{\mathfrak{v}_z}{c}$$

hinzugefügt wird, wo $\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z$ gegebene Funktionen von x', y', z' und t sind, und nach Einführung der Koordinaten x, y, z nur noch von t abhängen.

Führen wir wieder das mit dem Elektron fest verbundene System x, y, z ein, so genügen also $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ den Gleichungen, welche aus (6) entstehen, wenn man rechts die gleichen Faktoren hinzufügt. An Stelle von $\mathfrak{A}_x$ führen wir eine Hilfsfunktion $\mathfrak{A}'_x$ ein, die der aus (11) in derselben Weise hervorgehenden Gleichung zu genügen hat, nämlich:

$$(84)\quad \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_x}{\partial t^2} - S\frac{\partial \mathfrak{A}'_x}{\partial x}\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} - 2S\frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_x}{\partial x\,\partial t}\mathfrak{v}_x + SS\frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_x}{\partial x\,\partial y}\mathfrak{v}_x\mathfrak{v}_y - c^2 \Delta^2 \mathfrak{A}'_x = c\,\mathfrak{v}_x\, e^{i(kx+ly+mz)}.$$

Diese wird wieder auf eine zu (18) analoge Gleichung zurückgeführt; es ist dann in (23) rechts wieder c^2 durch $c\,\mathfrak{v}_x$ zu ersetzen, und demnach wird in (27) die rechte Seite in der Form:

$$\frac{1}{s}\int_0^t \mathfrak{v}_x(u)\cdot e^{iSk(x+\xi)} \sin c\,s\,(t-u)\,du$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\, e^{iSk(x+\xi)} \sin c\,s\,\tau\,d\tau$$

erhalten; und schließlich ist (34) zu ersetzen durch:

$$(85)\qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\,\varepsilon}{2\,\pi^2 a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot\frac{S\,d\tau}{R},$$

wo S und R die früheren Bedeutungen haben; und zwar ist R durch (34^b), S durch (43). (44) bzw. (45) definiert; in $\mathfrak{v}_x$ ist unter dem Integralzeichen t durch $t-\tau$ zu ersetzen.

Die Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete ist hier, ebenso wie vorhin bei Berechnung von φ, zu berücksichtigen. Man hat folgende Fälle zu unterscheiden:

I. $c\tau < a$.

1. $R < a - c\tau$ (also auch $R < a$) im Intervalle $0 < \tau < t$ für hinreichend kleine Werte von t:

$$(86)\qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,\pi\,a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\tau\,d\tau$$

nach (34) und (44), analog zu (52);

2. $a - c\tau < R < a + c\tau$ im Intervalle $\tau' < \tau < t$, analog zu (52^a):

$$(86^a)\qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\,\varepsilon}{2\,\pi^2 a^3}\int_0^{\tau'} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau + \frac{3\,\varepsilon}{8\,\pi\,a^3}\int_{\tau'}^t [a^2 - (c\tau - R)^2]\,\mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot\frac{d\tau}{R}$$

nach (34) und (43);

3. $a + c\tau < R$, analog zu (52^b):

$$(86^b)\qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\,\varepsilon}{2\,\pi^2 a^3}\int_0^{\tau''} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau$$

nach (34) und (45), indem diese Formel aus (86^a) für $t = \tau''$ hervorgeht.

II. $c\tau > a$.

1. $R < c\tau - a$, analog zu (53), ebenso wie im vorigen Falle:

$$(87)\qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\,\varepsilon}{2\,\pi^2 a^3}\int_0^{\tau''} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau$$

nach (34) und (45);

2. $c\tau - a < R < c\tau + a$, analog zu ($53^a$):

$$(87^a) \qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3}\int_0^{\tau''} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau + \frac{3\varepsilon}{8\pi a^3}\int_{\tau'''}^{t} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,[a^2-(c\tau-R)^2]\,\frac{d\tau}{R}$$

nach (34) und (43);

3. $c\tau + a < R$, analog zu (30), indem in der vorhergehenden Formel $t = \tau^{IV}$ gesetzt wird:

$$(87^b) \qquad \mathfrak{A}_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3}\int_0^{\tau^{IV}} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau$$

nach (34) und (45) für $t > \tau^{IV}$.

Befindet sich die das Elektron darstellende Kugel zur Zeit τ teils in einem teils in einem anderen der hier gekennzeichneten Raumgebiete, oder genügt für einen gegebenen Wert von R ein Teil des Intervalls $0 < \tau < t$ der einen, ein anderer Teil einer anderen Ungleichung, so müssen für diese verschiedenen Teilintervalle verschiedene Werte von $\mathfrak{A}_x$ angesetzt werden. Das ist besonders bei den zu verlangenden Integrationen über das Volumen des Elektrons wichtig.

Es handelt sich aber nicht um die Integration der Funktionen $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, sondern um die Auswertung der dreifachen Integrale ihrer partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}$, ... Dieselbe geschieht in ganz derselben Weise, wie bei der Funktion φ bzw. ihren partiellen Differentialquotienten, und zwar auf Grund der obigen Relation (55); unter dem nach τ genommenen Integrale ist nur überall der Faktor $\frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{c}$ bzw. $\frac{\mathfrak{v}_y(t-\tau)}{c}$, $\frac{\mathfrak{v}_z(t-\tau)}{c}$ hinzuzufügen. Die betreffenden Integrale bezeichnen wir mit A_{xx}, A_{xy}, ..., die dabei einzuführenden Funktionen mit Ψ_{1xx}, Ψ_{1xy}, ... Man erhält so die folgenden Resultate:

Erste und zweite Lage: $0 < t < t^0$, wo t^0 durch (72^a) definiert sei. Es ist, wie in (71):

$$(88) \qquad A_{xx} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \Psi_{1xx}(t,t),$$

wenn analog zu (68):

$$(88^a) \qquad \Psi_{1xx}(a,t) = \frac{\varepsilon}{10\,a^3}\int^{a} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\xi\,(T^2 - 10\,a^2 + 5\,c^2\tau^2)\,d\tau \quad \text{für } 0 < t < t^0;$$

und ebenso:

$$(89) \qquad A_{xy} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \Psi_{1xy}(t,t),$$

wenn:

$$(89^a) \qquad \Psi_{1xy}(a,t) = \frac{\varepsilon}{10\,a^3}\int_0^{a} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\eta\,(T^2 - 10\,a^2 + 5\,c^2\tau^2)\,d\tau.$$

Dritte Lage: $t^0 < t < \tau'$, wenn τ' wieder durch (77) definiert ist:

$$A_{xx} = \Psi_{1xx}(\tau^0, t) + \Psi_{2xx}(t, t), \tag{90}$$

wenn analog zu (75):

$$\Psi_{2xx}(a, t) = \frac{3\varepsilon}{4a}\int_{\tau^0}^{t} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{\xi}{T}\left[(a^2 - c^2\tau^2)\,U_1 - U_2\right] d\tau, \tag{90a}$$

und ebenso:

$$A_{xy} = \Psi_{1xy}(\tau^0, t) + \Psi_{2xy}(t, t), \tag{91}$$

wenn:

$$\Psi_{2xy}(a, t) = \frac{3\varepsilon}{4a}\int_{\tau^0}^{t} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{\eta}{T}\left[(a^2 - c^2\tau^2)\,U_1 - U_2\right] d\tau. \tag{91a}$$

Vierte Lage: $t > \tau'$, analog zu (79):

$$A_{xx} = \Psi_{1xx}(\tau^0, t) + \Psi_{2xx}(\tau', t), \tag{92}$$

$$A_{xy} = \Psi_{1xy}(\tau^0, t) + \Psi_{2xy}(\tau', t). \tag{93}$$

In Betreff der Bedeutung der Größe τ' und anderer damit zusammenhängender Fragen kann auf die früheren Erörterungen (vgl. den Schluß von § 7) verwiesen werden.

Die den bisherigen Rechnungen zu Grunde liegende wichtige Formel (55) ist nicht mehr anwendbar, wenn es sich um die Integration des partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$ über das Innere des Elektrons handelt; das betreffende dreifache Integral läßt sich deshalb nicht auf ein Doppelintegral zurückführen; es gelingt dies aber teilweise durch die folgenden Erwägungen.

Es hängt $\mathfrak{A}_x$ explizite von R und t ab; in R wiederum geht t dadurch ein, daß R eine Funktion von $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ ist, und daß ξ, η, ζ gemäß (26) von t abhängen. Das von 0 bis t nach der Variabelen τ zu nehmende Integral, durch welches $\mathfrak{A}_x$ nach (85) dargestellt ist, zerfällt zufolge der in § 6 für die Funktion φ bei den Gleichungen (52) bis (53b) angestellten Überlegungen in eine Summe von einzelnen Integralen, deren Grenzen $\tau', \tau'', \ldots$ selbst wieder Funktionen von t sind, da sie durch Gleichungen der Form:

$$R = a - c\tau, \quad R = a + c\tau, \quad a = c\tau, \quad R = c\tau$$

bestimmt werden. Auch diese Grenzen sind also Funktionen von t, aber nicht explizite, sondern nur insofern, als sie von R abhängen. Bei der Differentiation aber kommen diese Grenzen nicht in Betracht; denn die Funktion S ist nach (43), (44) und (45) an ihnen stetig. Ist z. B. ein Wert τ_1 durch die Gleichung $R + c\tau = a$ bestimmt, so wird für $\tau = \tau_1$ und $R + c\tau > a$ nach (43):

$$S = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{c\tau R}{a^2}\right)_{\tau = \tau_1},$$

d. h. gleich demselben Werte der sich für $R + c\tau > a$ aus (44) ergeben würde; da nun τ_1 einmal als obere, das anderemal als untere Grenze auftritt, so heben sich die durch Differentiation der Grenzen entstehenden Glieder fort. Ebenso ist für $a > c\tau - R$ und $a = c\tau - R$,

nach (43) $S = 0$, für $a < c\tau - R$ aber nach (45) ebenfalls $S = 0$. Wir brauchen also bei Bildung von $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$ nur die obere Grenze t und die Funktion unter dem Integralzeichen zu berücksichtigen. Man erhält aus (85):

$$\frac{2\pi^2 a}{\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} = \mathfrak{v}_x(0)\left(\frac{S}{R}\right)_{\tau=t} + \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial t}d\tau + \int_0^t \frac{S}{R}\frac{\partial \mathfrak{v}_x(t-\tau)}{\partial t}d\tau,$$

denn für die untere Grenze $\tau = 0$ verschwindet die Funktion S nach (44). Auf das letzte Glied wenden wir die partielle Integration an und erhalten:

$$\int_0^t \frac{S}{R}\frac{\partial \mathfrak{v}_x(t-\tau)}{\partial t}d\tau = -\int_0^t \frac{S}{R}\frac{\partial \mathfrak{v}_x(t-\tau)}{\partial \tau}d\tau = -\mathfrak{v}_x(0)\left(\frac{S}{R}\right)_{\tau=t} + \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial \tau}d\tau.$$

also:

$$\text{(94)} \qquad \frac{2\pi^2 a}{\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} = \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left[\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial \tau}\right]d\tau.$$

Hierin ist nach (26):

$$\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial \tau} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) + \frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial R}\left((x+\xi)\mathfrak{v}_x + (y+\eta)\mathfrak{v}_y + (z+\zeta)\mathfrak{v}_z\right)\frac{1}{R},$$

wobei mit $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ dasjenige bezeichnet ist, was man erhält, wenn man bei der Differentiation von S die Größe R als konstant betrachtet.

Was soeben über die Differentiation der Grenzen nach t gesagt wurde, gilt ebenso bei der Differentiation nach x; es ist also:

$$\frac{2\pi^2 a}{\varepsilon}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial R}\frac{x+\xi}{R}d\tau,$$

und entsprechende Gleichungen gelten bei Differentiation nach y und z. Sonach folgt aus (94) die später wichtige Relation:

$$\text{(95)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\mathfrak{v}_x - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\mathfrak{v}_y - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}\mathfrak{v}_z = \frac{\varepsilon}{2\pi^2 a}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)\frac{d\tau}{R},$$

und hierin ist für $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ einer der aus (43), (44) und (45) sich ergebenden Werte einzusetzen, nämlich:

$$(96)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) = -\frac{\pi c (c\tau - R)}{4} \quad \text{im Falle (43),}$$

$$(96^a)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) = \frac{\pi c R}{2} \quad \text{" " (44),}$$

$$(96^b)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) = 0 \quad \text{" " (45).}$$

Wenn jetzt das dreifache Integral von $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$, genommen über das Innere des Elektrons, zu berechnen ist, so haben wir uns nur noch mit dem Integrale:

$$(97)\qquad V_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3}\iiint dx\,dy\,dz \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)\frac{d\tau}{R}$$

zu beschäftigen, denn es ist das gesuchte Integral:

$$A_{xt} = \iiint \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\,dx\,dy\,dz$$

infolge von (95) gleich:

$$(98)\qquad A_{xt} = \mathfrak{v}_x A_{xx} + \mathfrak{v}_y A_{xy} + \mathfrak{v}_z A_{xz} + V_x.$$

Zur Berechnung von V_x haben wir wieder die verschiedenen möglichen Lagen durchzugehen:

Erste Lage: $2c\tau < a$. In Fig. 1 (vgl. oben S. 258) ist dasjenige Gebiet vertikal schraffiert, in welchem:

$$a - c\tau < R < a + c\tau \quad \text{und zugleich} \quad r < a$$

ist, so daß hier die Formeln (43) und (96) anzuwenden sind. Das hierauf bezügliche dreifache Integral, das wir V_x' nennen wollen, ist über die Kugelschale auszudehnen, welche nach außen von der Kugelfläche $r = a$, nach innen von der Kugelfläche $R = a - c\tau$ begrenzt wird. Wir führen mittels (69) Polarkoordinaten R, Φ', Ψ' ein; dann variiert (bei gegebenem Werte von Θ') R von $R = a - c\tau$ bis zu einem durch die Gleichung:

$$(99)\qquad a^2 = R_1^2 + T^2 - 2R_1 T \operatorname{cosin}\Theta'$$

bestimmten Werte R_1 (und zwar ist das positive Vorzeichen der betreffenden Quadratwurzel zu wählen); Φ' läuft von 0 bis π, Ψ' von 0 bis 2π; also:

$$V_x' = -\frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int_0^\pi \sin\Theta'\,d\Theta' \int_{a-c\tau}^{R_1}(c\tau - R)\,R\,dR \int_0^{2\pi} d\Psi'$$

$$(100)\qquad = -\frac{3\varepsilon c}{4a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int_0^\pi \sin\Theta' \left[\frac{1}{2}c\tau R^2 - \frac{1}{3}R^3\right]_{a-c\tau}^{R_1} d\Theta'.$$

Hierin ist nach (99):

$$R_1^2 = a^2 - T^2 + 2T^2\operatorname{cosin}^2\Theta' + 2T\operatorname{cosin}\Theta'\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'},$$

also:

(101) $$\int R_1^2 \sin\Theta' \, d\Theta' = -(a^2 - T^2)\cosin\Theta' - \tfrac{2}{3} T^2 \cosin^3\Theta' - \frac{2}{3\,T}(a^2 - T^2\sin^2\Theta')^{3/2},$$

(101ª) $$\int_0^\pi R_1^2 \sin\Theta' \, d\Theta' = 2\,a^2 - \tfrac{2}{3}\,T^2;$$

ferner:

(102) $$R_1^3 = 3\,(a^2 - T^2)\,T\cosin\Theta' + 4\,T^3\cosin^3\Theta' + (a^2 - T^2 + 4\,T^2\cosin^2\Theta')\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}.$$

Bei der Integration nach Θ' haben wir uns der Formeln

$$\int\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}\,\sin\Theta'\,d\Theta' = -\tfrac{1}{2}\cosin\Theta'\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}$$
$$-\frac{a^2 - T^2}{2\,T}\log\left(T\cos\Theta' + \sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}\right),$$

(102ª) $$\int\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}\,\cosin^2\Theta'\,\sin\Theta'\,d\Theta'$$
$$= \frac{(a^2 - T^2)^2}{16\,T^3}\log\left(a^2 - T^2 + 2\,T^2\cosin^2\Theta' + 2\,T\cosin\Theta'\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}\right)$$
$$-\frac{1}{8\,T^2}(a^2 - T^2 + 2\,T^2\cosin^2\Theta')\cosin\Theta'\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}$$

zu bedienen; dieselben ergeben:

(102ᵇ) $$\int_0^\pi\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}\,\sin\Theta'\,d\Theta' = a - \frac{a^2 - T^2}{2\,T}\log\frac{a - T}{a + T},$$
$$\int_0^\pi\sqrt{a^2 - T^2\sin^2\Theta'}\,\cosin^2\Theta'\,\sin\Theta'\,d\Theta' = \frac{a(a^2 + T^2)}{4\,T^2} + \frac{(a^2 - T^2)^2}{8\,T^3}\log\frac{a - T}{a + T};$$

und folglich, indem sich der logarithmische Ausdruck heraushebt:

(103) $$\int_0^\pi R_1^3 \sin\Theta'\,d\Theta' = 2\,a^3,$$

sonach schließlich durch Einsetzen in (100):

(104) $$V_x' = \frac{\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t - \tau)\cdot\left[T^2 - c^2\tau^2 + 6\,(a - c\,\tau)^2\right]\cdot c\,\tau\cdot d\,\tau.$$

Es bleibt das zweite (in Fig. 1 horizontal schraffierte) Gebiet zu betrachten, das bei Integration von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ keinen Beitrag lieferte, jetzt aber einen von Null verschiedenen Wert ergibt. In diesem Gebiete ist $R < a - c\,\tau$; es kommen also die Formeln (44) und (96ª) zur Anwendung; den Beitrag zum Integrale (97) bezeichnen wir mit V_x''; dann wird:

$$V''_x = \frac{3\,c\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\int\limits_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int\limits_0^{a-c\tau} R^2\,dR \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta'\,d\Theta' \int\limits_0^{2\pi} d\Psi$$

(105)

$$= \frac{\varepsilon\,c}{a^3}\int\limits_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot(a-c\,\tau)^3\,d\tau.$$

In (98) ist schließlich:

$$V_x = V'_x + V''_x \tag{106}$$

unter Benutzung der in (104) und (105) angegebenen Resultate einzusetzen, um den gesuchten Wert von A_{xt} zu erhalten.

Weitere Entwicklung der ersten Lage: $\frac{a}{2\,c} < t < \frac{a}{c}$. Wie bei den früheren Betrachtungen tritt hier nur eine Änderung in der Zeichnung der zugehörigen Figur ein, nicht eine Änderung der sonstigen Betrachtungen (vgl. oben Fig. 2). Man hat daher:

$$V_x = V'_x + V''_x = \Psi_{1xt}(t,t) \quad \text{für } 0 < t < \frac{a}{c}, \tag{107}$$

wenn die Funktion Ψ gemäß (104) und (105) durch die Gleichung:

$$\Psi_{1xt}(a,t) = \frac{\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int\limits_0^a \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot[4\,(a-c\,\tau)^3 + 6\,c\,\tau\,(a-c\,\tau)^2 + c\,\tau\,(T^2 - c^2\,\tau^2)]\,d\tau$$

(108)

$$= \frac{\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int\limits_0^a \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot[4\,a^3 - 6\,a^2\,c\,\tau + c^3\,\tau^3 + c\,\tau\,T^2]\,d\tau$$

definiert wird.

Zweite Lage: $c\tau > a$, $T < a$, $c\tau + T < 2\,a$, wie oben in (72); vgl. Fig. 3. Das Elektron zerfällt wieder in zwei Gebiete; in dem vertikal schraffierten haben wir ein Integral V'''_x zu bilden, das aus V'_x entsteht, wenn man in (100) die untere Grenze $a - c\tau$ durch $c\tau - a$ ersetzt, also:

$$V'''_x = -\frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int\limits_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta' \left[\frac{1}{2}\,c\,\tau\,R^2 - \frac{1}{3}\,R^3\right]_{c\tau-a}^{R_1} d\Theta'.$$

Bei der Auswertung bleiben die Formeln (101) bis (103) unverändert anwendbar; und man erhält:

$$V'''_x = \frac{\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int\limits_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,[(T^2 + c^2\,\tau^2 - 6\,a^2)\,c\,\tau + 4\,a^3]\,d\tau.$$

Für das andere (horizontal schraffierte) Gebiet, in dem $R < c\tau - a$ ist, hatten wir nach (45) und (53) einen verschwindenden Beitrag für das Potential φ gefunden, so daß jetzt gemäß (96[b]) und (97) für die zweite Lage einfach:

$$V_x = V'''_x \quad \text{für } \frac{a}{c} < t < t^0$$

zu setzen ist, wenn wieder t^0 durch (72[a]) bestimmt wird. Dieses Integral V_x''' ist aber genau gleich dem für die erste Lage in (108) aufgestellten Integrale. Die Gleichungen (107) und (108) haben daher für die erste und zweite Lage, d. h. für $0 < t < t_0$ gemeinsame Gültigkeit.

Dritte Lage: $0 < c\tau - a < T + a$, $t^0 < t < \tau'$, wenn τ' durch (77) in obiger Weise definiert ist. Wir haben Fig. 4 zu benutzen; in dem vertikal schraffierten Gebiete ist, wie in (73):

$$0 < c\tau - a < R < T + a < c\tau + a,$$

also S durch (43) bestimmt (da $c\tau - R < a < c\tau$ oder $R - c\tau < a < c\tau$ ist), und $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ durch (96). Hier läuft Θ' von $\Theta' = 0$ bis $\Theta' = \Theta_1'$, wenn Θ_1' durch die Gleichung:

$$2\,R\,T \operatorname{cosin} \Theta_1' = R^2 + T^2 - a^2 \tag{109}$$

als Funktion von R und T (also auch von τ und t) bestimmt wird; R läuft von $R = c\tau - a$ bis $R = T + a$; dieses Gebiet liefert also nach (96) zu dem Integrale V_x den Beitrag:

$$\frac{\varepsilon}{2\,\pi^2\,a}\int_{\tau^0}^{t} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int_{c\tau - a}^{T+a} \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right) R\,d\,R \int_0^{\Theta_1'} \sin\Theta'\,d\,\Theta' \int_0^{2\pi} d\,\Psi'$$

$$= -\frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int_{\tau^0}^{t} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau \int_{c\tau-a}^{T+a} (c\tau - R)\,R\,(1 - \operatorname{cosin}\Theta_1')\,d\,R,$$

oder wenn man den Wert von cosin Θ_1' aus (109) einsetzt:

$$\begin{aligned} = -\frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,a^3}\int_{\tau^0}^{t} \frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{T} \Big[\tfrac{1}{4}\left\{(T+a)^4 - (c\tau - a)^4\right\} - \tfrac{1}{3}(2\,T + c\tau)\left\{(T+a)^3 - (c\tau - a)^3\right\} \\ + \tfrac{1}{2}(T^2 - a^2 + 2\,c\tau\,T)\left\{(T+a)^2 - (c\tau - a)^2\right\} - (T + 2\,a - c\tau)\,c\tau\,(T^2 - a^2)\Big]\,d\tau. \end{aligned} \tag{110}$$

In dem horizontal schraffierten Gebiete (Fig. 4) ist $T - a < R < c\tau - a$, also $R < c\tau$ und $a < c\tau - R$, so daß die Gleichungen (45) und (96[b]) zur Anwendung kommen, dieses Gebiet also wie in der zweiten Lage keinen Beitrag zum Integrale liefert. Es wird demnach:

$$V_x = \Psi_{1xt}(\tau^0, t) + \Psi_{2xt}(t, t), \tag{111}$$

wenn Ψ_{2xt} durch die Gleichung:

$$\Psi_{2xt}(a, t) = -\frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,a^3}\int_{\tau^0}^{a} \frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{T}\,G(T, c\tau)\,d\tau \tag{112}$$

definiert wird, in der mit $G(T, c\tau)$ die ganze Funktion von T und $c\tau$ bezeichnet ist, welche in dem Ausdrucke (110) unter dem Integralzeichen auftritt.

Die **vierte Lage** bedarf keiner neuen Erörterung, da für sie keine neuen Funktionen benötigt werden, sondern nur die Grenzen einer eingehenderen Diskussion bedürfen, die ebenso wie vorhin auszuführen ist.

§ 9. Die von den Potentialen φ und $\mathfrak{A}$ bei Unterlichtgeschwindigkeit abhängenden Kräfte.

Durch die berechneten Potentiale φ und $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ läßt sich die auf einen Punkt x, y, z durch die Bewegung des Elektrons ausgeübte Kraft darstellen; es geschieht die durch die Gleichungen:[1])

$$(113)\qquad \begin{aligned} f_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial S\, \mathfrak{v}_x \mathfrak{A}_x}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}, \\ f_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial S\, \mathfrak{v}_x \mathfrak{A}_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial t}, \\ f_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial S\, \mathfrak{v}_x \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial t}, \end{aligned}$$

welche die drei Komponenten bestimmen; und es ist wieder:

$$S\, \mathfrak{v}_x \mathfrak{A}_x = \mathfrak{v}_x \mathfrak{A}_x + \mathfrak{v}_y \mathfrak{A}_y + \mathfrak{v}_z \mathfrak{A}_z,$$

also z. B.:

$$\frac{\partial S\, \mathfrak{v}_x \mathfrak{A}_x}{\partial x} = \mathfrak{v}_x \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}.$$

Die Kraft f bezieht sich auf die Ladungseinheit des Elektrons; für die Gesamtladung ε ergibt sich also durch Integration über das Innere des Elektrons eine Kraft mit den Komponenten:

$$(114)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\iiint f_x\, dx\, dy\, dz, \\ \mathfrak{F}_y &= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\iiint f_y\, dx\, dy\, dz, \\ \mathfrak{F}_z &= \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\iiint f_z\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Die hier verlangten Integrationen sind in den beiden vorhergehenden Paragraphen bereits ausgeführt. Unter Benutzung der dort angewandten Bezeichnung erhalten wir also:

$$(115)\qquad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\varphi_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_x A_{xx} + \mathfrak{v}_y A_{xy} + \mathfrak{v}_z A_{xz}) - \frac{1}{c} A_{xt}.$$

Infolge der obigen Gleichung (95) lassen sich diese Relationen sehr vereinfachen; die Gleichungen (113) nämlich werden:

$$(116)\qquad f_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{2\pi^2 a c}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)\frac{d\tau}{R},$$

worin $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ durch die Gleichungen (96), (96^a) und (96^b) für die verschiedenen Gebiete definiert ist; entsprechendes gilt für f_y und f_z. Ebenso ist die Gleichung (115) infolge von (98) durch die Relation:

[1]) Vgl. Abraham a. a. O.

$$\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\varphi_x - \frac{1}{c}V_x \tag{117}$$

(und die entsprechenden für $\mathfrak{F}_y$ und $\mathfrak{F}_z$) zu ersetzen. Wir haben jetzt nur die in § 6 für φ_x und die in § 8 für V_x gewonnenen Resultate bei den verschiedenen Lagen zu verwerten.

Erste und zweite Lage (Fig. 1, 2 und Fig. 3): $0 < t < t^0$; dann ist nach (71) und (107):

$$\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x}(t,t) - \frac{1}{c}\Psi_{1xt}(t,t); \tag{118}$$

hierbei ist Φ_{1x} durch (68), Ψ_{1xt} durch (108) definiert. Da hier $a > c\tau$ und nach (65) $c\tau > T$ sein soll, so ist offenbar Φ_{1x} negativ, wenn $\mathfrak{v}_x$ positiv ist (da dann auch $\xi > 0$); ebenso ist nach (108) $\Psi_{1xt} < 0$ wegen (72). Die Komponente $\mathfrak{F}_x$ der Kraft ist also in der ersten Lage eine stets positive (und von Null verschiedene) Größe; ebenso ist es in der zweiten Lage. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{F}_y$ und $\mathfrak{F}_z$.

Dritte Lage: $0 < c\tau - a < T + a$, $t^0 < t < \tau'$.

Hier folgt aus (117), (79) und (107):

$$\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x}(\tau^0, t) - \Phi_{2x}(t,t) - \frac{1}{c}\Psi_{1xt}(\tau^0, t) - \frac{1}{c}\Psi_{2xt}(t,t), \tag{118a}$$

wo nun Φ_{2x} durch (75) und Ψ_{2xt} durch (108) definiert ist. Die Funktionen Φ_{1x} und Ψ_{1xt} sind auch hier negativ; ebenso Φ_{2x}, denn nach (74) kann diese Funktion in der Form:

$$\frac{3\varepsilon c}{4a}\int_{\tau^0}^{t}\frac{\xi\, d\tau}{T}\int_0^{\Theta_1}\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{a^2+T^2+2aT\cos\Theta}}\left[a^2 - c^2\tau^2 - (a^2+T^2+2aT\cos\Theta)\right]d\Theta$$

geschrieben werden, worin die eckige Klammer unter dem Integralzeichen offenbar negativ ist.

Um Ψ_{2xt} zu beurteilen, zerlegen wir den Ausdruck in die Summe von Ψ' und Ψ''; es sei:

$$\Psi' = -\frac{3\varepsilon c}{8a^3}\int_{\tau^0}^{t}\frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{T}\left[\tfrac{1}{4}\{(T+a)^4 - (c\tau - a)^4\} - \tfrac{1}{3}(2T + c\tau)\{(T+a)^3 - (c\tau - a)^3\}\right]d\tau;$$

dann ist nach (110):

$$\Psi'' = -\frac{3\varepsilon c}{8a^3}\int_{\tau^0}^{t}\frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{T}\,d\tau\int_{c\tau-a}^{T+a}\left[(T^2 - 2c\tau T - a^2)R - c\tau(T^2 - a^2)\right]dR.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer unter dem Integralzeichen in Ψ' ist gleich:

$$(T+a)^3\left[\tfrac{1}{4}(T+a) - \tfrac{2}{3}T - \tfrac{1}{3}c\tau\right] - (c\tau - a)^3\left[\tfrac{1}{4}(c\tau - a) - \tfrac{2}{3}T - \tfrac{1}{3}c\tau\right];$$

hier sind die beiden eckigen Klammern negativ; das erste Glied überwiegt dem absoluten Werte nach; die Differenz ist folglich negativ.

Ebenso ist die eckige Klammer in Ψ'' negativ, denn es ist $T > a$ und:

$$T^2 - 2c\tau T - a^2 = (T - c\tau)T - c\tau T - a^2.$$

d. h. < 0, da $T < c\tau$ nach (65). Somit ist auch $\Psi_{2xt} < 0$; alle Glieder der rechten Seite von (118ᵃ) sind positiv; auch in der dritten Lage ist daher die Komponente $\mathfrak{F}_x$ der wirkenden Kraft (für positive Werte von $\mathfrak{v}_x$) stets positiv.

Die Gleichung (108ᵃ) ist in dem Intervalle $t^0 < t < \tau'$ anwendbar, wenn τ' die kleinste Wurzel der Gleichung (77) bezeichnet, welche größer als t^0 ist; diese Wurzel ist aber (vgl. oben S. 265) nicht immer brauchbar; es greifen dann diejenigen Überlegungen Platz, die oben am Schlusse von § 7 angestellt wurden, und die wir hier nicht zu wiederholen brauchen; wir stellen hier nur nochmals die Resultate zusammen:

Für $0 < t \leqq t^0$ gilt obige Formel (118), analog zu (71).

Für $t^0 < t \leqq t'$, wo t' durch die Gleichung (78) definiert ist, gilt die Formel (118ᵃ), analog zu (76).

Für $t' < \tau' \leqq t$, wo τ' durch (77) definiert ist, haben wir, analog zu (79):

$$(118^b) \qquad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x}(\tau^0, t) - \Phi_{2x}(\tau', t) - \frac{1}{c}\Psi_{1xt}(\tau^0, t) - \frac{1}{c}\Psi_{2xt}(\tau', t).$$

In gleicher Weise haben die früheren Formeln (83) hier ihre Analoga.

Die in Richtung der Tangente der Bahnlinie wirkende Kraft $\mathfrak{F}_v$ findet man schließlich für jeden einzelnen dieser Fälle aus der Relation:

$$(119) \qquad v \cdot \mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}_x \mathfrak{v}_x + \mathfrak{F}_y \mathfrak{v}_y + \mathfrak{F}_z \mathfrak{v}_z.$$

§ 10. Das Potential φ für Volumladung bei Translation mit Überlichtgeschwindigkeit.

Im Gegensatze zu (65) definieren wir eine „Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit“ durch die Ungleichung:

$$(120) \qquad c\tau < T,$$

welche für alle Werte von τ und T erfüllt sein soll; allerdings kann die Geschwindigkeit des Elektrons größer als die Lichtgeschwindigkeit sein, ohne daß diese Bedingung erfüllt ist, z. B. wenn das Elektron eine Spirale um den Anfangspunkt beschreibt, deren Windungen sehr enge sind; eine solche Bewegung fällt unter die Ungleichung (65), ist also nach unserer Definition als eine Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit zu betrachten.

Die oben (§ 6) vorgenommene Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete bleibt hier unverändert bestehen, demnach auch die Gleichungen (52) und (52ᵃ). Die verschiedenen Lagen, welche zu den weiteren Gleichungen führten, bedürfen aber einer erneuten Besprechung.

Beim Potentiale φ kommt es für die Schlußformeln auf die Integrale:

$$\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx\,dy\,dz, \quad \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\,dy\,dz, \quad \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

an; die Berechnung derselben wird wieder mittelst der fundamentalen Formel (55) auf die Berechnung der entsprechenden Oberflächenintegrale zurückgeführt. Wir brauchen deshalb die in § 6 für Unterlichtgeschwindigkeit durchgeführten Überlegungen und Rechnungen hier nicht in entsprechender Weise zu wiederholen, sondern gehen für Überlichtgeschwindig-

keit sogleich dazu über, die in § 7 ausgeführten Integrationen auch hier in analoger Weise durchzunehmen. Wir beginnen sogleich mit Betrachtung der verschiedenen durch Ungleichungen charakterisierten Lagen:

Erste Lage: Der Mittelpunkt M des Elektrons liegt außerhalb der mit dem Radius $c\tau$ um den Punkt O geschlagenen Kugel (da $T > c\tau$ ist). Für hinreichend kleine Werte von τ liegt diese Kugel ganz im Innern des Elektrons, denn es ist in Fig. 8:

$$AB = AM - BO - OM = a - (c\tau + T),$$

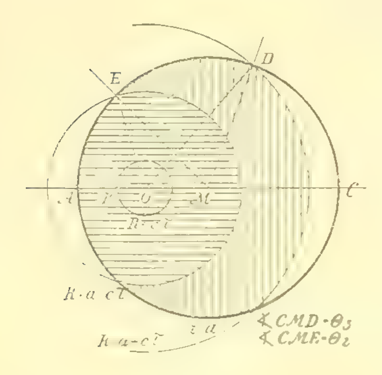


Fig. 8.

also positiv für hinreichend kleine Werte von τ. Für diese erste Lage sei demnach:

(121) $$a > c\tau + T.$$

Nach (120) ist dann auch $a > 2c\tau$, d. h. $c\tau < a - c\tau$, so daß die Kugel mit dem Radius $R = c\tau$ in der Tat so liegt, wie es in Fig. 9 gezeichnet ist.

Die Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ teilt das Innere des Elektrons wieder in zwei Gebiete. In dem einen (in Fig. 8 horizontal schraffierten) ist:

$$R < a - c\tau, \quad a > c\tau, \quad a > R,$$

folglich kommt Gleichung (44) zur Anwendung, und es wird φ wieder durch (52) gegeben; im Innern des Gebietes verschwindet $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; das Gebiet liefert also zu dem Integrale φ_x keinen Beitrag.

In dem andern (in Fig. 8 vertikal schraffierten) Gebiete ist:

(122) $$R > a - c\tau \quad \text{und} \quad R < a + c\tau.$$

Auch die mit dem Radius $a + c\tau$ um O konstruierte Kugel trifft nämlich infolge der Bedingung (120), d. h. hier:

$$a + c\tau < a + T$$

stets das Elektron. In diesem Gebiete ist (43) anzuwenden, und demnach:

(123) $$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_0^t [a^2 - (c\tau - R)^2]\frac{d\tau}{R},$$

also wie in (52^a), wenn dort $\tau' = 0$ genommen wird.

Ein drittes Teilgebiet des Elektrons liegt außerhalb der Kugel mit dem Radius $R = a + c\tau$; hier ist:

(124) $$a + c\tau < R < T + a,$$

so daß Gleichung (45) zur Anwendung kommt und $\varphi = 0$ wird.

Nur das durch (122) charakterisierte Gebiet liefert sonach einen Beitrag zu dem Integrale φ_x; die Oberfläche wird teils durch die Kugel $r = a$, teils durch die Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ gebildet; an letzterer ist nach (123) $\varphi = 0$, so daß nur die beiden ersteren Flächenteile in Betracht kommen. Die darauf bezüglichen Integrale seien bzw. K_1 und K_2; für K_1 wenden wir die Polarkoordinaten r, Φ, Ψ an, die durch die Gleichungen (63) eingeführt wurden. Es wird dann nach (55) und (123):

$$K_1 = \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a}\int\limits_0^t d\,\tau \int\limits_{\Theta_3}^{\Theta_2} [a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,\frac{x}{a}\,\frac{\sin\Theta\,d\,\Theta}{R}\int\limits_0^{2\pi} d\,\Psi,$$

wenn Θ_2 und Θ_3 bzw. durch die Gleichungen:

$$(125)\qquad \begin{aligned}(a + c\,\tau)^2 &= a^2 + T^2 + 2\,a\,T\cos\Theta_3,\\ (a - c\,\tau)^2 &= a^2 + T^2 + 2\,a\,T\cos\Theta_2\end{aligned}$$

bestimmt werden. In K_1 sind R^2 und $\frac{x}{a}$ gemäß (64) und (64ᵃ) als Funktionen von Θ und Ψ für $r = a$ einzusetzen. Die von cosin Ψ und sin Ψ abhängenden Glieder fallen durch die Integration nach Ψ zwischen den Grenzen 0 und $2\,\pi$ heraus, und es bleibt, ähnlich wie oben bei J_1' in § 7, nur das von ξ abhängige Glied stehen, so daß:

$$K_1 = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a}\int\limits_0^t \frac{\xi}{T}\,d\,\tau \int\limits_{\Theta_3}^{\Theta_2}\left[\frac{a^2 - c^2\,\tau^2}{R} - R + 2\,c\,\tau\right]\sin\Theta\cos\Theta\,d\,\Theta$$

wird. Vermöge der früher bei Ableitung von (74) berechneten Integrale U_1 und U_2 läßt sich die Integration nach Θ durchführen; es wird, wenn man cosin Θ_2 und cosin Θ_3 aus (125) einsetzt:

$$W_1 = \int\limits_{\Theta_3}^{\Theta_2} \frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T\cos\Theta}}\,d\,\Theta = \frac{c\,\tau}{3\,a^2\,T^2}(c^2\,\tau^2 - 3\,T^2)$$

$$\begin{aligned}W_2 &= \int\limits_{\Theta_3}^{\Theta_2} \sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T\cos\Theta}\,\sin\Theta\cos\Theta\,d\,\Theta\\ &= \frac{c\,\tau}{15\,a^2\,T^2}(3\,c^4\,\tau^4 + 25\,a^2\,c^2\,\tau^2 - 15\,a^2\,T^2 - 5\,c^2\,\tau^2\,T^2).\end{aligned}$$

Hierzu kommt jetzt das Integral:

$$W_0 = \int\limits_{\Theta_3}^{\Theta_2} \sin\Theta\cos\Theta\,d\,\Theta = \frac{c\,\tau}{a\,T^2}(c^2\,\tau^2 - T^2),$$

und es wird:

$$(126)\qquad \begin{aligned}K_1 &= \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a}\int\limits_0^t \frac{\xi}{T}\,[(a^2 - c^2\,\tau^2)\,W_1 - W_2 + 2\,c\,\tau\,W_0]\,d\,\tau\\ &= \frac{\varepsilon\,c}{10\,a^3}\int\limits_0^t \frac{\xi\,c\,\tau}{T^3}\,[6\,c^4\,\tau^4 - 10\,a^2\,c^2\,\tau^2 + (c^2\,\tau^2 - T^2)(15\,a\,c\,\tau - 4\,c^2\,\tau^2)]\,d\,\tau.\end{aligned}$$

Es bleibt K_2 zu berechnen, d. h. das auf die Oberfläche $R = a - c\,\tau$ bezügliche Doppelintegral, soweit diese Fläche im Innern des Elektrons verläuft; hier ist:

$$\cos(n, x) = \cos(R, x) = \frac{x + \xi}{R},$$

also nach (55) und (123), wo $R = a - c\tau$ zu nehmen ist, unter Benutzung der durch (69) eingeführten Polarkoordinaten R, Θ', Ψ':

$$K_2 = -\frac{3\varepsilon c}{2\pi a^3}\int\limits_0^t \frac{\xi}{T} d\tau \int\limits_0^{\Theta_0'} c\tau (a - c\tau)^2 \sin\Theta' \cdot \operatorname{cosin}\Theta' \, d\Theta' \int\limits_0^{2\pi} d\Psi',$$

wo Θ_0' durch die Gleichung:

$$a^2 = (a - c\tau)^2 + T^2 + 2(a - c\tau) T \operatorname{cosin}\Theta_0'$$

definiert ist; also:

$$K_2 = -\frac{3\varepsilon c^2}{2a^3}\int\limits_0^t \frac{\xi}{T}\tau (a - c\tau)^2 \sin^2\Theta_0' \, d\tau$$

$$(127) \qquad = \frac{3\varepsilon c^2}{8a^3}\int\limits_0^t \frac{\xi}{T^3}\tau [(T^2 + c^2\tau^2 - 2ac\tau)^2 - 4(a - c\tau)^2 T^2] \, d\tau$$

$$= \frac{3\varepsilon c^2}{8a^3}\int\limits_0^t \frac{\xi\tau}{T^3}(T^2 - c^2\tau^2)[(T + c\tau - 2a)(T - c\tau + 2a)] \, d\tau.$$

Die gesuchte Funktion φ_x war gleich $K_1 + K_2$; führen wir also zwei Integrale Φ_{0x}^* und Φ_{1x}^* durch die Gleichungen:

$$(128) \qquad \begin{aligned} \Phi_{0x}^*(a, t) &= \frac{\varepsilon c^2}{10 a^3}\int\limits_0^a \frac{\xi\tau}{T^3} G_0(c\tau, T) \, d\tau \\ \Phi_{1x}^*(a, t) &= \frac{3\varepsilon c^2}{8a^3}\int\limits_0^a \frac{\xi}{T^3}\tau (T^2 - c^2\tau^2) G_1(c\tau, T) \, d\tau \end{aligned}$$

ein, wo G_0 und G_1 bzw. die in K_1 und K_2 unter den Integralzeichen in den eckigen Klammern stehenden ganzen Funktionen bezeichnen, so wird schließlich bei Überlichtgeschwindigkeit:

$$(129) \qquad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t, t) + \Phi_{1x}^*(t, t) \qquad \text{für } a > c\tau + T.$$

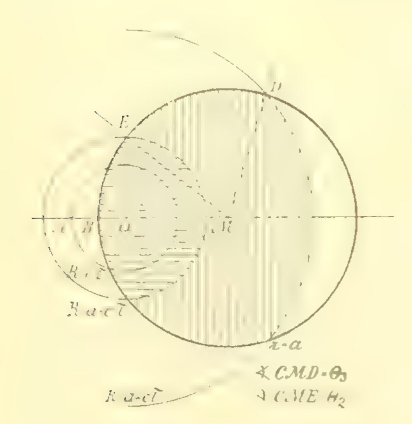


Fig. 9.

Zweite Lage. Ist im Gegensatze zu (121) die Ungleichung:

$$(130) \qquad a < c\tau + T$$

erfüllt, so wird in Fig. 8 die Strecke:

$$AB = a - (c\tau + T)$$

negativ, d. h. das Elektron (Kugel $r = a$) wird von der Kugel $R = c\tau$ geschnitten, so daß die frühere Figur 8 durch beistehende Figur 9 zu ersetzen ist. Auch hier wird das Elektron von den beiden Kugeln mit den Radien $a - c\tau$ und $a + c\tau$ geschnitten; auf die Oberflächen dieser Kugeln kam es aber bei Berechnung von φ_x allein an: es wird daher nichts wesentliches geändert; und die Formel (129) bleibt für diese zweite Lage gültig.

Die Kugel mit dem Radius $R = a - c\tau$ schneidet das Elektron nicht mehr, wenn die Summe der Radien kleiner als die Entfernung der Mittelpunkte, d. h. wenn:

$$a - c\tau + a < T \quad \text{oder} \quad 2a < T + c\tau$$

ist. Dann bleibt aber (wegen $T > c\tau$) noch zunächst $a > c\tau$, so daß die Kugel mit dem Radius $a - c\tau$ noch möglich bleibt. Die Grenze der Anwendbarkeit des in (129) abgeleiteten Resultates ist also durch die Gleichung:

$$2a = T + c\tau \tag{131}$$

gegeben. Hier aber sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Bezeichnen wir mit τ_1 den Wert von τ, welcher sich aus (131) ergibt und der eine Funktion von t ist, und von dem überdies zunächst vorausgesetzt werden möge, daß er kleiner als $\frac{a}{c}$ sei. Dann ist entweder:

$$\tau_1 > t, \tag{132}$$

oder:

$$\tau_1 < t. \tag{132a}$$

Die Variable τ ist stets an die Bedingang $0 < \tau < t$ gebunden; im Falle (132) wird daher das Bestehen der Gleichung (129) nicht gestört. Diese Gleichung gilt weiter, bis $\tau_1 = t_1$ wird, wo t_1 die kleinste positive Wurzel $\left(< \frac{a}{c}\right)$ der Gleichung:

$$2a = (T + c\tau)_{\tau = t} \tag{133}$$

bedeutet. Die Kurve (131) verläuft in diesem Falle (wenn wieder t als Abszisse und τ als Ordinate betrachtet werden) so, wie es in Fig. 10 angedeutet ist; sie schneidet die Linie $t = \tau$ zum ersten Male, indem sie von oben links kommt, und zwar für $t = \tau_1 = t_1$.

Dritte Lage im Falle (132). Dieselbe tritt ein, wenn $t > t_1$ wird, wo t_1 in der eben angegebenen Weise durch (133) definiert ist. Jetzt ist die Gleichung (131) durch Werte τ_2 befriedigt (vgl. Fig. 10; ob die Kurve mit wachsendem τ steigt oder fällt, ist nach den Erörterungen am Schlusse von § 7 gleichgültig), die $< t$ (und $> t_1$) sind. Es ist für $\tau < \tau_2$:

$$2a > T + c\tau,$$

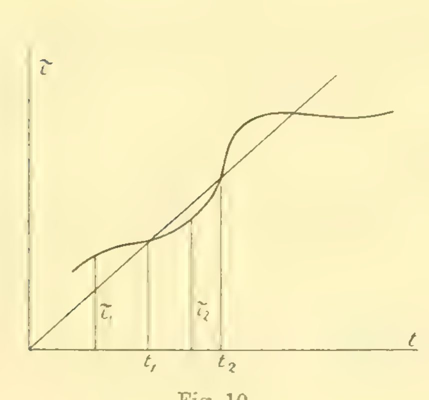
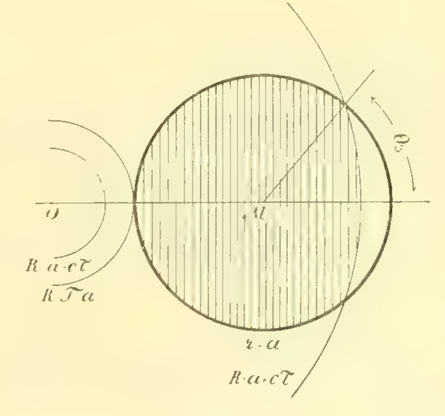


Fig. 10.



Fig, 11.

so daß für diesen Teil des Integrationsintervalles ($0 < \tau < \tau_2$) die Formel (129) gültig bleibt; aber für $\tau > \tau_2$ wird:

$$2a < T + c\tau,$$

und das Elektron wird wohl noch von der Kugel $a + c\tau$, nicht aber von der Kugel $a - c\tau$ geschnitten. Es kommt nur das Doppelintegral über denjenigen Teil der Kugeloberfläche ($r = a$) in Betracht, auf dem Θ von Θ_3 bis π läuft, wo wieder Θ_3 durch die erste Gleichung (125) definiert ist (vgl. Fig. 11). Der betreffende Beitrag wird durch die Funktion:

$$\Phi_{2x}(a, t) = \frac{3\varepsilon c}{4a}\int_{\tau_1}^{a} \frac{\xi}{T} d\tau \int_{\Theta_3}^{\pi} [a^2 - (c\tau - R)^2] \sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta \frac{d\Theta}{R}$$

für $a = t$ dargestellt. Die für (126) aufgestellten Integrale W_0, W_1, W_2 sind jetzt unter Benutzung der in (66) und (66^a) berechneten unbestimmten Integrale bzw. durch W_0^*, W_1^*, W_2^* zu ersetzen; dabei ist:

$$(134)\qquad W_0^* = \int_{\Theta_3}^{\pi} \sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta = \frac{c^2\tau^2 - T^2}{8a^2T^2}[c^2\tau^2 - T^2 + 4a^2 + 4ac\tau],$$

$$(134^a)\qquad W_1^* = \int_{\Theta_3}^{\pi} \frac{\sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta}} = \frac{1}{6a^2T^2}[2(a^2 + T^2 + aT)\sqrt{(a-T)^2}$$
$$- \{3a^2 + 3T^2 - (a + c\tau)^2\}(a + c\tau)].$$

Auf der rechten Seite muß der positive Wert der Quadratwurzel aus $(a - T)^2$ eingesetzt werden. Es ist also zu unterscheiden, ob $a > T$ oder $a < T$ ist. Für kleine Werte von τ ist sicher $a > T$; ob dies aber in unserem Intervalle ($t > t_1$) vorkommen kann, bedarf in jedem Falle der Untersuchung; es möge für $t_1 < \tau < t_1^*$ die Bedingung $a > T$ erfüllt sein, für größere Werte von τ (d. h. $\tau > t_1^*$) nicht; dann ist:

$$(134^b)\qquad W_1^* = \frac{1}{6a^2T^2}[-2T^3 + 3ac^2\tau^2 - 3(a + c\tau)T^2 + c^3\tau^3] \text{ für } t_1 < \tau < t_1^*,$$

dagegen:

$$(134^c)\qquad W_1^* = \frac{1}{6a^2T^2}[2T^3 - 6a^3 + 3ac^2\tau^2 - 3(a + c\tau)T^2 + c^3\tau^3] \text{ für } \tau > t_1^*.$$

In gleicher Weise sind bei Berechnung von W_2^* zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $a > T$ oder $T > a$ ist. Man erhält aus (66^a):

$$W_2^* = \int_{\Theta_3}^{\pi} \sqrt{a^2 + T^2 + 2aT\operatorname{cosin}\Theta} \sin\Theta \operatorname{cosin}\Theta\, d\Theta$$
$$= \frac{1}{30a^2T^2}[2(a-T)^3(a^2 + T^2 + 3aT) - (a + c\tau)^3\{5(a^2 + T^2) - 3(a + c\tau)^2\}]$$

$$(134^d) = \frac{1}{30a^2T^2}[15a^3(c^2\tau^2 - T^2) + 5a^2(2T^3 - 3T^2c\tau + 5c^3\tau^3)$$
$$+ 15ac^2\tau^2(c^2\tau^2 - T^2) - 2T^5 - 5T^2c^3\tau^3 + 3c^5\tau^5] \quad \text{für } a > T,$$

dagegen:

$$W_2^{\cdot} = \frac{1}{30\,a^2\,T^2}\left[2\,(T-a)^3\,(a^2+T^2+3\,a\,T)-(a+c\,\tau)^3\,\{5\,(a^2+T^2)-3\,(a+c\,\tau)^2\}\right]$$

$$(134^e)\qquad = \frac{1}{30\,a^2\,T^2}\left[-4\,a^5+5\,a^3\,(T^2+3\,c^2\,\tau^2)-5\,a^2\,(2\,T^3+3\,T^2\,c\,\tau-5\,c^3\,\tau^3)\right.$$
$$\left.+\,15\,a\,c^2\,\tau^2\,(c^2\,\tau^2-T^2)+2\,T^5-5\,T^2\,c^3\,\tau^3+3\,c^5\,\tau^5\right] \quad \text{für } a < T.$$

Es wird also:

$$(135)\qquad \Phi_{2x}^{\cdot}(a,t) = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a}\int_{\tau_1}^{a}\frac{\xi}{T}\left[(a^2-c^2\,\tau^2)\,W_1^{\cdot}-W_2^{\cdot}+2\,c\,\tau\,W_0^{\cdot}\right]d\,\tau.$$

Dabei ist das Integrationsintervall in zwei Teile (eventuell in mehrere Teile) zu zerlegen; in dem Teilintervalle, in welchem $a > T$ ist, sind $W_1^{\cdot}$ und $W_2^{\cdot}$ bzw. durch die Ausdrücke (134^b) und (134^d) zu ersetzen, in dem Teilintervalle, wo $a < T$ ist, dagegen bzw. durch (134^c) und (134^e). Wir erhalten so:

$$(135^a)\qquad \begin{aligned} &\varphi_x = \Phi_{0x}^{*}(t,t)+\Phi_{1x}^{*}(t,t), \quad \text{wenn } 0 < t < \tau_2 < t_2 \\ &\varphi_x = \Phi_{0x}^{*}(\tau_2,t)+\Phi_{1x}^{*}(\tau_2,t)+\Phi_{2x}^{*}(t,t)-\Phi_{2x}^{*}(\tau_2,t), \quad \text{wenn } t_1 < \tau_2 < t < t_2, \end{aligned}$$

wo nun t_2 die nächst größere Wurzel der Gleichung (133) bezeichnet, die noch kleiner als $a:c$ ist. (Die Bedingung $t_1 < \tau_2$ entspricht der Figur 11; fällt die Kurve mit wachsendem t, so kann auch $\tau_2 < t_1$ werden.)

Vierte Lage für den Fall (132) und $t_2 < t < \frac{a}{c}$, wenn t_2 ebenso wie im vorstehenden definiert ist. Die Wurzel τ der Gleichung (131) wird hier größer als t; sie werde mit τ_3 bezeichnet; sonst bleibt alles unverändert; man erhält also:

$$(136)\qquad \varphi_x = \Phi_{0x}^{*}(t,t)+\Phi_{1x}^{*}(t,t) \quad \text{für } 0 < \tau_2 < t_2 < t < \tau_3 < t_3,$$

wenn t_3 die nächste Wurzel der Gleichung (133) bezeichnet, denn jetzt wird im allgemeinen wieder:

$$2\,a < T + c\,\tau \quad \text{für } \tau > t_2,$$

so daß das Elektron hier wieder von der Kugel $R = a - c\,\tau$ geschnitten wird, und die Funktionen Φ_{0x}^{*}, Φ_{1x}^{*} zur Anwendung kommen.

In ähnlicher Weise geht es weiter, bis $t > \frac{a}{c}$ wird, und wir zur fünften Lage kommen.

Fünfte Lage für den Fall (132) und $t > \frac{a}{c}$. Hier ist statt der Kugel $R = a - c\,\tau$ die Kugel $R = c\,\tau - a$ zu betrachten; letztere schneidet aber das Elektron nicht, da nach (120) $T - a > c\,\tau - a$ vorausgesetzt wird. Infolgedessen bleibt wieder dasselbe Integral Φ_{2x} anwendbar, wie bisher; und wir erhalten im Anschlusse an (136):

$$(137)\quad \varphi_x = \Phi_{0x}^{*}\left(\frac{a}{c},\,t\right)+\Phi_{1x}^{*}\left(\frac{a}{c},\,t\right)+\left|\Phi_{2x}^{*}(t,t)-\Phi_{2x}^{*}\left(\frac{a}{c},\,t\right)\right| \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < t_2 < \frac{a}{c} < t,$$

dagegen z. B.:

$$(137^a)\qquad \varphi_x = \Phi_{0x}^{*}(\tau_2,t)+\Phi_{1x}^{*}(\tau_2,t)+\left[\Phi_{2x}^{*}(t,t)-\Phi_{2x}^{*}(\tau_2,t)\right] \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < \frac{a}{c} < t < t_2,$$

wie man durch entsprechende Überlegungen leicht findet.

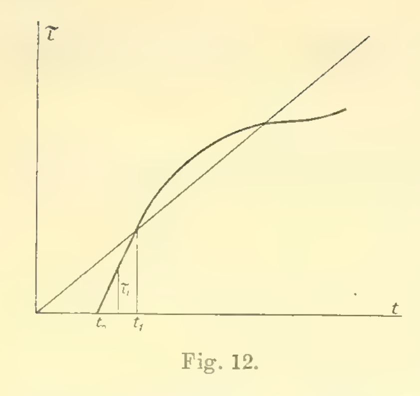


Fig. 12.

Dritte Lage im Falle (132[a]). Verläuft die Kurve (131) derartig, wie es in Fig. 12 gezeichnet ist, indem $\tau_1 < t$ ist, so sei mit t_0 der Schnittpunkt der Kurve mit der τ-Achse bezeichnet; dann ist offenbar die Gleichung (129) anwendbar für $0 < t < t_0$. Wird aber $t > t_0$, so ist $t_0 < \tau_1 < t < \frac{a}{c}$; und für das Intervall von τ_1 bis t wird das Elektron von der Kugel $R = a - c\tau$ nicht geschnitten, so daß hier die Funktion Φ^*_{2x} anzuwenden ist; es muß also in Φ^*_{2x} die untere Grenze t_1 durch τ_1 ersetzt werden, d. h. es ist:

$$(138) \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \Phi^*_{0x}(t,t) + \Phi^*_{1x}(t,t) \quad \text{für } 0 < t < t_0, \quad \text{und} \\ \varphi_x &= \Phi^*_{0x}(\tau_1,t) + \Phi^*_{1x}(\tau_1,t) + [\Phi^*_{2x}(t,t) - \Phi^*_{2x}(\tau_1,t)] \quad \text{für } t_0 < \tau_1 < t < t_1 < \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Vierte Lage im Falle (132[a]). Wächst t über t_1 hinaus, bleibt aber kleiner als $\frac{a}{c}$, so wird das Elektron von der Kugel $R = a - c\tau$ wieder geschnitten; und wir finden:

$$(139) \quad \varphi_x = \Phi^*_{0x}(t_1,t) + \Phi^*_{1x}(t_1,t) + \Phi^*_{2x}(t,t),$$

und so geht es fort.

Fünfte Lage im Falle (132[a]). Es werde $t > \frac{a}{c}$. Dann erhalten wir:

$$(140) \quad \varphi_x = \Phi^*_{0x}(t_1,t) + \Phi^*_{1x}(t_1,t) + \Phi_{2x}(t,t) \quad \text{für } \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < t.$$

Dagegen z. B.:

$$(140^a) \quad \varphi_x = \Phi^*_{0x}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi^*_{1x}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi^*_{2x}(t,t) - \Phi^*_{2x}\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t < t_1.$$

Und so wird man sich an der Hand einer Figur leicht von allen möglichen Fällen Rechenschaft geben, die hier ebenso wie bei Unterlichtgeschwindigkeit in großer Mannigfaltigkeit auftreten können.

Endlich kann T so weit wachsen, daß auch die Kugel mit dem Radius $c\tau + a$ das Elektron nicht mehr schneidet, dann ist:

$$(141) \quad c\tau + a < T - a \quad \text{oder} \quad 2a < T - c\tau,$$

und wir kommen zur

Sechsten Lage: die durch diese Ungleichung (141) charakterisiert sei. Im ganzen Innern des Elektrons ist jetzt $c\tau + a < R$, also (45) anwendbar, und φ verschwindet im ganzen Integrationsgebiete. Bezeichnet demnach τ_4 die kleinste Wurzel der Gleichung:

$$(142) \quad 2a = T - c\tau,$$

welche positiv und $> \frac{a}{c}$ und kleiner als t ist, und zwar derart, daß für $\tau < \tau_4$ die Ungleichung $2a > T - c\tau$, für $\tau > \tau_4$ aber die Ungleichung (141) besteht, so haben wir für $t > \tau_4$ keinen Beitrag zum dreifachen Integrale in Rechnung zu ziehen; es wird z. B. im Anschlusse an (137):

(143) $\varphi_x = \Phi^*_{0x}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi^*_{1x}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \left[\Phi^*_{2x}(\tau_4, t) - \Phi^*_{2x}\left(\frac{a}{c}, t\right)\right]$ für $t_1 < \tau_1 < t_2 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t$

dagegen im Anschlusse an (137ᵃ):

(143ᵃ) $\varphi_x = \Phi^*_{0x}(t_2, t) + \Phi^*_{1x}(t_2, t) + [\Phi^*_{2x}(\tau_4, t) - \Phi^*_{2x}(t_2, t)]$ für $t_1 < \tau_1 < \frac{a}{c} < t_2 < \tau_4 < t.$

Ist aber die Wurzel τ_4 der Gleichung (142) größer als t, so ist in vorstehenden beiden Formeln τ_4 durch t zu ersetzen.

Ebenso wird im Anschlusse an (140):

(144) $$\varphi_x = \Phi^*_{0x}(t_1, t) + \Phi^*_{1x}(t_1, t) + \Phi^*_{2x}(\tau_4, t) \text{ für } \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t$$

und im Anschlusse an (140ᵃ):

(144ᵃ) $\varphi_x = \Phi^*_{0x}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Phi^*_{1x}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \left[\Phi^*_{2x}(\tau_4, t) - \Phi^*_{2x}\left(\frac{a}{c}, t\right)\right]$ für $\tau_0 < \frac{a}{c} < t_1 < \tau_4 < t.$

Auch hier ist für $\tau_4 > t$ die obere Grenze τ_4 durch t zu ersetzen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Ungleichung (141) nur erfüllt sein kann für $c\tau > a$, denn wenn das Elektron ganz außerhalb der Kugel $R = c\tau + a$ liegt, so muß es um so mehr außerhalb der Kugel $R = c\tau - a$ liegen; es muß also der Übergang von $a - c\tau$ zu $c\tau - a$ schon stattgefunden haben.

Hat die Gleichung (142) mehrere Wurzeln, so hat man ganz analoge Überlegungen anzustellen, wie sie im Falle der Unterlichtgeschwindigkeit am Schlusse von § 7 angestellt wurden.

§ 11. Das Potential $\mathfrak{A}$ bei Volumladung und Translation mit Überlichtgeschwindigkeit und die auf das Elektron wirkende Kraft.

Wie in § 8 gezeigt wurde, unterscheidet sich das Potential $\mathfrak{A}$ von dem Potentiale φ hauptsächlich dadurch, daß unter dem Integralzeichen der Faktor:

$$\frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{c} \quad \left(\text{bzw. } \frac{\mathfrak{v}_y(t-\tau)}{c}, \ \frac{\mathfrak{v}_z(t-\tau)}{c}\right)$$

hinzutritt. Die Einteilung des Raumes in verschiedene Gebiete ist aber jetzt eine andere, sie ist durch die für Überlichtgeschwindigkeit $(T > c\tau)$ in § 10 angestellten Überlegungen bedingt.

Unabhängig von dieser Einteilung sind die allgemeinen Betrachtungen, welche zu der Relation (95) und weiterhin zu der Gleichung (116) führten. Aus letzterer folgte, daß die Berechnung der Integrale A_{xx}, A_{xy}, A_{xz}, A_{xt} .... im einzelnen nicht ausgeführt zu werden braucht, denn diese Funktionen heben sich bei Berechnung der Kraftkomponenten $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ heraus; und es wird schließlich gemäß der Formel (117) nur das Integral V_x benötigt, welches durch (97) definiert war:

$$V_x = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a}\iiint dx\,dy\,dz \int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)\frac{d\tau}{R},$$

worin für $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ die in (96), (96^a), (96^b) angegebenen Werte je nach den betrachteten räumlichen Gebietsteilen einzusetzen sind. Wir beschränken uns daher hier auf Berechnung des dreifachen Integrals V_x für die verschiedenen Lagen.

Erste Lage, charakterisiert durch die Bedingung (121), d. h. $a > c\tau + T$, und veranschaulicht durch Fig. 8. Die Kugel $r = a$ (d. i. das Elektron) wird von den Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ in drei Gebiete zerlegt. In dem horizontal schraffierten Gebiete ist $a > R + c\tau$, so daß (44) und (96^a) zur Anwendung kommen. Es ist folglich der entsprechende Teil von V_x gleich:

$$V_x' = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,\pi\,a^3}\iiint dx\,dy\,dz\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau,$$

wobei sich die räumliche Integration auf das von den Kugeln $R = a - c\tau$ und $r = a$ begrenzte Gebiet bezieht. Wir führen wieder mittels (69) Polarkoordinaten R, Θ' Ψ' ein, wobei Ψ' von 0 bis 2π, Θ' von 0 bis π läuft; um also die Grenzen genau anzugeben, zerlegen wir V_x' in die Summe W_1 und W_2.

Es entspreche W_1 dem Innern einer Kugel, die mit dem Radius $a - T$ um den Punkt $R = 0$ konstruiert werde und demnach die Kugel $r = a$ von innen berührt; hier wächst Θ' von Null bis π und R von Null bis $a - T$; es ist folglich:

$$W_1 = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,\pi\,a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau\int_0^{a-T} R^2\,dR\int_0^{\pi}\sin\Theta'\,d\Theta'\int_0^{2\pi} d\Psi'$$

$$= \frac{\varepsilon\,c}{a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot(a-T)^3\,d\tau.$$

Das Gebiet für W_2 werde begrenzt durch die Kugel $R = a - T$, die Kugel $R = a - c\tau$ und die Kugel $r = a$; für einen gegebenen Wert von R läuft Θ' von Null bis zu dem durch die Gleichung:

$$a^2 = T^2 + R^2 - 2\,R\,T\cos\Theta_0' \tag{145}$$

zu berechnenden Werte Θ_0', so daß:

$$W_2 = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,\pi\,a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau\int_{a-T}^{a-c\tau} R^2\,dR\int_0^{\Theta_0'}\sin\Theta'\,d\Theta'\int_0^{2\pi} d\Psi'$$

$$= \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,\frac{d\tau}{T}\int_{a-T}^{a-c\tau}(2\,R\,T - T^2 - R^2 + a^2)\,R\,dR$$

$$= \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a^3}\int^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left[(a^2 - T^2)\frac{R^2}{2} + \tfrac{2}{3}R^3\,T - \tfrac{1}{4}R^4\right]_{a-T}^{a-c\tau}\frac{d\tau}{T}.$$

Es wird demnach:

(146) $$V_x' = W_1 + W_2 = \frac{3\varepsilon c}{4a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left[\tfrac{4}{3}(a-T)^3 T + g(a-c\tau, T) - g(a-T, T)\right]\frac{d\tau}{T},$$

wenn die ganze Funktion $g(R, T)$ durch die Gleichung:

(146ᵃ) $$g(R, T) = \tfrac{1}{2}(a^2 - T^2)R^2 + \tfrac{2}{3}TR^3 - \tfrac{1}{4}R^4$$

definiert war.

Das zweite Gebiet liegt zwischen den Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ und wird seitlich durch die Kugel $r = a$ begrenzt; in ihm ist der Beitrag zum Integrale V_x nach (43) und (96) gleich:

$$V_x'' = \frac{-3\varepsilon c}{8\pi a^3}\iiint dx\,dy\,dz\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot(c\tau - R)\frac{d\tau}{R}.$$

Für einen gegebenen Wert von R läuft hier Θ' von Null bis zu dem durch die Gleichung (145) bestimmten Wert Θ_0', und sodann R von $a - c\tau$ bis $a + c\tau$. Es wird also:

$$V_x'' = \frac{-3\varepsilon c}{8\pi a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau\int_{a-c\tau}^{a+c\tau}(c\tau - R)\,R\,dR\int_0^{\Theta_0'}\sin\Theta'\,d\Theta'\int_0^{2\pi}d\Psi'$$

(147) $$= \frac{-3\varepsilon c}{8a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{d\tau}{T}\int_{a-c\tau}^{a+c\tau}(c\tau - R)(2RT - T^2 - R^2 + a^2)\,dR$$

$$= -\frac{3\varepsilon c}{8a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot\left[c\tau\{g_0(a+c\tau, T) - g_0(a-c\tau, T)\}\right.$$
$$\left. - g(a+c\tau, T) + g(a-c\tau, T)\right]\frac{d\tau}{T},$$

worin g wieder durch (146ᵃ) und g_0 durch die Gleichung:

(147ᵃ) $$g_0(R, T) = (a^2 - T^2)R + TR^2 - \tfrac{1}{3}R^3$$

gegeben wird. Für die erste Lage wird so schließlich:

(148) $$V_x = V_x' + V_x'' = \frac{3\varepsilon c}{8a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left[\tfrac{8}{3}T(a-T)^3 + g(a+c\tau) + g(a-c\tau) - 2g(a-T)\right.$$
$$\left. + c\tau\{g_0(a-c\tau) - g_0(a+c\tau)\}\right]\frac{d\tau}{T},$$

wo in g_0 und g das zweite Argument T nicht angegeben wurde, oder ausgerechnet:

(148ᵃ) $$V_x = \frac{3\varepsilon c}{8a^3}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\cdot\left[\tfrac{1}{6}T^4 - 2a^2T^2 + \tfrac{8}{3}a^3T + c^2\tau^2(T^2 - 2a^2 + \tfrac{1}{6}c^2\tau^2)\right]\frac{d\tau}{T}.$$

Zweite Lage, erläutert durch obige Figur 9. Diese neue Figur war nur notwendig wegen der veränderten Lage der Kugel $R = c\tau$; das Elektron wird auch hier

von den beiden Kugeln $R = a - c\tau$ und $R = a + c\tau$ geschnitten, so daß die Gleichung (148) auch für die zweite Lage gültig bleibt; wir setzen:

$$(149) \qquad \Psi_{1xt}(a, t) = \frac{\varepsilon c}{16\, a^3} \int_0^a \mathfrak{v}_x(t-\tau) \cdot [T^4 + 16 a^3 T + c^4\tau^4 + 6 c^2\tau^2 T^2 - (12 a^2 T^2 + 12 a^2 c^2 \tau^2)] \frac{d\tau}{T}$$

also:

$$(150) \qquad V_x = \Psi^*_{1xt}(t, t) \quad \text{für } 0 < t < t_1 \text{ im Falle (132).}$$
$$\text{„} \quad 0 < t < \tau_0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (132^a).$$

Dritte Lage. Das Elektron wird von der Kugel $R = a - c\tau$ nicht mehr geschnitten; es tritt dies ein, wenn $\tau > \tau_1$ wird, wo τ_1 die kleinste brauchbare Wurzel der in (131) gegebenen Gleichung bezeichnet; und zwar sind zwei Fälle zu unterscheiden, die oben bzw. durch die Ungleichungen (132) und (132[a]) gekennzeichnet werden. Für einen gegebenen Wert von R läuft Θ' von Null bis zu dem durch die Gleichung:

$$a^2 = T^2 + R^2 - 2\, R\, T \cosin \Theta_2'$$

bestimmten Wert Θ_2', R selbst aber läuft von $T - a$ bis $c\tau + a$. Da jetzt Gleichung (96) anzuwenden ist, so wird der dem Gebiete entsprechende Beitrag durch die Funktion:

$$\Psi^*_{2xt}(a, t) = -\frac{3\,\varepsilon c}{4\, a^3} \int_{\tau_1}^{a} \mathfrak{v}_x(t - \tau)\, d\tau \int_{T-a}^{c\tau + a} (c\tau - R)\, R \int_0^{\Theta_2'} \sin\Theta'\, d\Theta'$$

$$(151) \qquad = -\frac{3\,\varepsilon c}{8\, a^3} \int_{\tau_1}^{a} \frac{\mathfrak{v}_x(t-\tau)}{T}\, d\tau \int_{T-a}^{c\tau+a} (c\tau - R)\, [2\, R\, T - R^2 - T^2 + a^2]\, d R$$

$$= -\frac{3\,\varepsilon c}{8\, a^3} \int_{\tau_1}^{a} \mathfrak{v}_x(t-\tau) \cdot [c\tau\, \{g_0(c\tau + a) - g_0(T-a)\} - g(a + c\tau) + g(T-a)] \frac{d\tau}{T}$$

dargestellt, und es wird hier g_0 und g wieder bzw. durch (147[a]) und (146) gegeben, so daß die in der eckigen Klammer stehende ganze Funktion sich in der Form:

$$(151^a) \qquad \begin{gathered} -\tfrac{1}{2}(a^2 - T^2 - 2\, c\tau\, T)\,[(c\tau + a)^2 - (T - a)^2] + (a^2 - T^2)\, c\tau\, (c\tau - T + 2\, a) \\ \tfrac{1}{4}\,[(c\tau + a)^4 - (T - a)^4] - \tfrac{1}{3}(c\tau + 2\, T)\,[c\tau + a)^3 - (T - a)_3] \end{gathered}$$

schreiben läßt, wodurch die Analogie mit der in (112) auftretenden ganzen Funktion deutlich hervortritt.

Es wird jetzt in der dritten Lage für den Fall (132):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(t, t), \quad \text{wenn} \quad 0 < t < \tau_2.$$

$$(152) \qquad V_x = \Psi^*_{1xt}(\tau_2, t) + \Psi^*_{2xt}(t, t) - \Psi^*_{2xt}(\tau_2, t), \quad \text{wenn} \quad t_1 < \tau_2 < t < t_2,$$

dagegen für den Fall (132[a]):

$$(152^a) \qquad V_x = \Psi^*_{1xt}(\tau_1, t) + \Psi^*_{2xt}(t, t) - \Psi^*_{2xt}(\tau_1, t) \quad \text{für } \tau_0 < \tau_1 < t < t_1 < \frac{a}{c},$$

wobei τ_0 und τ_1 dieselbe Bedeutung haben wie in (135) und (138).

Vierte Lage im Falle (132). Es wird:

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(t, t) \quad \text{für } 0 < \tau_2 < t_2 < t < \tau_3 < t_3 < \frac{a}{c} \text{ bzw. } 0 < \tau_2 < t_2 < t < \tau_3 < \frac{a}{c} < t_3. \tag{153}$$

Fünfte Lage für den Fall (132). Es wird analog zu (137):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi^*_{2xt}(t, t) - \Psi^*_{2xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < t_2 < \frac{a}{c} < t, \tag{154}$$

dagegen analog zu (137[a]):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(\tau_2, t) + [\Psi^*_{2xt}(t, t) - \Psi^*_{2xt}(\tau_2, t)] \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < \frac{a}{c} < t < t_2. \tag{155}$$

Dritte Lage im Falle (132[a]); dieselbe ist schon oben durch Gleichung (152[a]) erledigt.

Vierte Lage im Falle (132[a]); es wird analog zu (139):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(t_1, t) + \Psi^*_{2xt}(t, t) \quad \text{für } \tau_0 < \tau_1 < t_1 < t < \frac{a}{c}. \tag{156}$$

Fünfte Lage im Falle (132[a]). Wir haben analog zu (140):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(t_1, t) + \Psi^*_{2xt}(t, t) \quad \text{für } \tau_0 < \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < t \tag{157}$$

also dieselbe Formel wie im vorigen Falle; dagegen z. B. analog zu (140[a]):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi^*_{2xt}(t, t) - \Psi^*_{2xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t < t_1 \quad \text{u. s. f.} \tag{157a}$$

Endlich kann es bei wachsendem t eintreten, daß auch die Kugel mit dem Radius $R = a + c\tau$ das Elektron nicht mehr trifft; wir kommen dann zur **sechsten Lage**. Es sei wieder τ_4 die kleinste brauchbare Wurzel der Gleichung (142), so wird z. B. im Anschlusse an (154):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi^*_{2xt}(\tau_4, t) - \Psi^*_{2xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } t_1 < \tau_1 < t_2 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t, \tag{158}$$

dagegen im Anschlusse an (154[a]):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(t_2, t) + \Psi^*_{2xt}(\tau_4, t) - \Psi^*_{2xt}(t_2, t) \quad \text{für } t_1 < \tau_2 < \frac{a}{c} < t_2 < \tau_4 < t. \tag{158a}$$

Ebenso wird z. B. im Anschlusse an (157), analog zu (144):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}(t_1, t) + \Psi^*_{2xt}(\tau_4, t) \quad \text{für } \tau_1 < t_1 < \frac{a}{c} < \tau_4 < t, \tag{159}$$

dagegen im Anschlusse an (157[a]):

$$V_x = \Psi^*_{1xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) + \Psi^*_{2xt}(\tau_4, t) - \Psi^*_{2xt}\left(\frac{a}{c}, t\right) \quad \text{für } \tau_0 < \frac{a}{c} < t_1 < \tau_4 < t. \tag{159a}$$

Bei der Willkürlichkeit der in T vorkommenden Funktionen $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ sind natürlich auch andere als die hier betrachteten Fälle möglich; dieselben lassen sich indessen immer in analoger Weise erledigen.

Nach Berechnung der Funktionen φ_x und V_x bietet die Bestimmung der Komponenten $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ infolge der Relation (117) keine Schwierigkeiten mehr. Wir können sofort dazu übergehen, die betreffenden Resultate zusammenzustellen.

Erste und zweite Lage, nach (129) und (150):

$$(160)\qquad \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\Phi^*_{0x}(t,t) - \Phi^*_{1x}(t,t) - \frac{1}{c}\Psi^*_{1xt}(t,t) \quad \text{für } 0<t<\tau_2 \text{ im Falle (132)}$$
$$\text{„}\quad 0<t<\tau_0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad (132^a).$$

Um die Richtung der Kraft zu bestimmen, bemerken wir, daß Φ^*_{0x} nach (126) von den Integralen W_0, W_1 und W_2 abhängt. Hier ist W_0 (wegen $c\tau < T$) negativ; es ist:

$$(a^2 - c^2\tau^2)\,W_1 - W_2 = -(c^2\tau^2 + T^2)\,W_1 - 2aT\int_{\Theta_3}^{\Theta_2}\frac{\sin\Theta\cdot\cosin^2\Theta}{\sqrt{a^2+T^2+2aT\cosin\Theta}}\,d\Theta.$$

Hier ist $W_1 = \frac{-c\tau}{3a^2T^2}(3T^2 - c^2\tau^2)$ negativ, das Integral auf der rechten Seite ist positiv; über die in K_1 vorkommende Kombination $(a^2 - c^2\tau^2)\,W_1 - W_2$ ist folglich hinsichtlich des Vorzeichens etwas allgemeines kaum zu sagen. Die Funktion Φ^*_{1x} ist nach der in (127) und (128) gegebenen Definition stets negativ.

In Ψ^*_{1xt} ist:

$$\frac{\partial g_0}{\partial R} = 2RT\cdot(1 - \cosin\Theta_0') > 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial R} = Rg_0 > 0,$$

folglich wachsen g_0 und g mit wachsendem R und es sind in dem Ausdrucke (148) für V_x die vier ersten unter dem Integralzeichen in der eckigen Klammer stehenden Glieder positiv, die in der geschweiften Klammer (Faktor von $c\tau$) stehenden Glieder aber geben etwas negatives. Welcher Teil überwiegt, scheint sich allgemein nicht angeben zu lassen, denn auch in dem ausgerechneten Ausdrucke, wie er in (149) unter dem Integralzeichen steht, könnte es sein, daß das positive Glied a^3T für das Vorzeichen entscheidend wird, und es könnte eintreten, daß ein positiver Wert von Ψ^*_{1xt} auch das Vorzeichen von $\mathfrak{F}_x$ bestimmt, so daß dann die Komponente der Kraft entgegengesetzt der Bewegungsrichtung wirkt.

Dritte Lage im Falle (132). Es wird nach (134) und (152):

$$(161)\qquad \begin{aligned}\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= -\Phi^*_{0x}(\tau_2,t) - \Phi^*_{1x}(\tau_2,t) - [\Phi^*_{2x}(t,t) - \Phi^*_{2x}(\tau_2,t)]\\ &\quad -\frac{1}{c}\Psi^*_{1xt}(\tau_2,t) - \frac{1}{c}[\Psi^*_{2xt}(t,t) - \Psi^*_{2xt}(\tau_2,t)] \quad \text{für } \tau_1<\tau_2<t<t_2.\end{aligned}$$

Hier wird die Entscheidung über das Vorzeichen noch umständlicher; denn auf der rechten Seite von (135) zeigt unter dem Integralzeichen die Summe $(a^2 - c^2\tau^2)\,W^*_1 - W^*_2$ analoges Verhalten wie bei der ersten Lage, aber W^*_0 ist positiv.

In gleicher Weise kann man die übrigen Lagen durchgehen, indem man gemäß der Relation (117) die Ausdrücke $-\varphi_x$ und $-\frac{1}{c}V_x$ addiert; es ist wohl nicht nötig, die entstehenden Formeln hier zusammenzustellen. Das in § 13 zu behandelnde Beispiel konstanter Überlichtgeschwindigkeit wird überdies die Formeln erläutern.

§ 12. Die translatorische geradlinige Bewegung eines Elektrons bei Volumladung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit, bzw. Lichtgeschwindigkeit.

Bei geradliniger Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vereinfachen sich die gewonnenen Resultate außerordentlich, indem sich alle Integrationen ohne Schwierigkeit durchführen und die Wurzeln der auftretenden Gleichungen leicht bestimmen lassen.

Es sei v die gegebene konstante Geschwindigkeit, und die Bewegung finde in Richtung der X-Achse statt; dann ist nach (26):

$$\xi = v \cdot \tau, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

und nach (51):

$$T = \xi = v \cdot \tau, \tag{162}$$

also T nur von der Hilfsvariabeln τ, nicht von t selbst, abhängig. Die Bedingung (65) für Unterlichtgeschwindigkeit wird hier einfach:

$$v < c.$$

Wir haben gemäß § 7 die verschiedenen möglichen Lagen zu besprechen. Für die erste Lage ist die Funktion Φ_{1x} nach (68) zu berechnen. Es wird:

$$\begin{aligned} \Phi_{1x}(a, t) &= \frac{\varepsilon c v}{10 a^3} \int_0^{\alpha} \tau \left[(v^2 + 5 c^2) \tau^2 - 10 a^2 \right] d\tau \\ &= \frac{\varepsilon c v}{10 a^3} \left[(v^2 + 5 c^2) \frac{\alpha^4}{4} - 5 a^2 \alpha^2 \right] \end{aligned} \tag{163}$$

und diese Formel ist für $0 < t < \frac{a}{c}$ gültig. Nach Gleichung (108) wird ferner:

$$\Psi_{1xt}(a, t) = \frac{\varepsilon c v a}{16 a^3} \left[16 a^3 - 12 a^2 c \alpha + (c^2 + v^2) c \alpha^3 \right], \tag{163a}$$

und somit die in Richtung der x-Achse wirkende Kraft, wenn man nach Potenzen von $\frac{ct}{a}$ (welche Zahl kleiner als Eins ist) entwickelt, und $\omega = \frac{v}{c}$ setzt:

$$\frac{4 \pi a^3}{3 \varepsilon} \mathfrak{F}_x = - \Phi_{1x} - \frac{1}{c} \Psi_{1xt} = - \varepsilon v t \left[1 - \frac{5}{4} \frac{ct}{a} + \frac{1}{16} \left(3 + \frac{7}{5} \omega^2 \right) \left(\frac{ct}{a} \right)^3 \right]. \tag{164}$$

Diese für die erste Lage abgeleitete Gleichung bleibt nach obigem auch für die zweite Lage gültig, d. h. so lange $t < t^0$ ist, wo t^0 durch obige Gleichung (72a) bestimmt wird; da jetzt $T = v \tau$ zu nehmen ist, so ergibt sich:

$$t^0 = \frac{2 a}{v + c}. \tag{164a}$$

In der Gleichung (164) ist also die Variable $\frac{ct}{a}$ an die Bedingung

$$\frac{ct}{a} < \frac{2}{1 + \omega}$$

gebunden, wo nun die rechte Seite (für $\omega < 1$) größer als die Einheit ist.

Für kleine Werte von t ist die Kraft $\mathfrak{F}_x$ negativ, d. h. zu Beginn der Bewegung muß eine beschleunigende Kraft hinzugefügt werden, um die Geschwindigkeit konstant zu erhalten; ohne diese Kraft würde das Elektron verzögernd auf sich selbst wirken. Für größere Werte von t sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(165) \qquad 1 - \frac{5}{4} x + \frac{1}{16}\left(3 + \frac{7}{5}\omega^2\right) x^3 = 0$$

zu untersuchen. Die linke Seite ist positiv für $x = 0$ und negativ für $x = -\infty$; eine Wurzel ist demnach jedenfalls reell und negativ, kommt also für uns nicht in Betracht. Die anderen beiden Wurzeln sind ebenfalls reell; für $x = 0$ nämlich ist der Ausdruck (165) positiv, für $x = \frac{2}{1+\omega}$ aber gleich:

$$\frac{1}{4}\frac{\omega}{(1+\omega)^3}\left(\omega^2 + \frac{6}{5}\omega - 2\right), \qquad \text{somit } = 0 \text{ für } \omega = \omega_0 = \tfrac{1}{5}(\sqrt{59} - 3),$$

also für alle Werte von ω, die kleiner als ω_0 sind, negativ. Zwischen 0 und $\frac{2}{1+\omega}$ liegt demnach für $\omega < \omega_0$ immer eine Wurzel der kubischen Gleichung; diese Wurzel bestimmt diejenige Zeit, zu welcher die Kraft $\mathfrak{F}_x$ ihr Vorzeichen ändert, d. h. die Wirkung des Elektrons auf sich selbst aufhört verzögernd zu sein und beschleunigend wird.

Für $t = \frac{a}{c}$, d. h. am Ende der ersten Lage wird:

$$\mathfrak{F}_x\left(\frac{a}{c}\right) = \frac{3\,\varepsilon^2\,\omega}{64\,a^2}\left(1 - \frac{7}{5}\omega^2\right),$$

und am Ende der zweiten Lage:

$$(166) \qquad \mathfrak{F}_x(t^0) = \frac{-3\,\varepsilon^2\,\omega^2}{2\,\pi\,a^2(1+\omega)^4}\left(2 - \tfrac{6}{5}\,\omega - \omega^2\right),$$

und dieser Wert ist für $\omega < \omega_0$ stets positiv, dagegen negativ für $\omega > \omega_0$.

Dritte Lage: $t^0 < t < t'$, wo sich t' aus Gleichung (78) bestimmt, nämlich:

$$t' = \frac{2\,a}{c - v}.$$

Wir haben zuerst die Funktionen Φ_{2x} und Ψ_{2xt} zu berechnen. Für die bei Aufstellung von Gleichung (74) benutzten Integrale U_1 und U_2 findet man in unserem Falle:

$$U_1 = \frac{1}{6\,a^2\,v^2}\left[3\,a\,(v^2 - c^2) - \tau\,(3\,c\,v^2 - 3\,c^3 + 2\,v^3)\right]$$

$$U_2 = \frac{1}{30\,a^2 v^2}\left[15 a^3(v^2 - c^2) + a^2(10 v^3 + 25 c^3 - 15 v^2 c)\tau + 15 a c^2(v^2 - c^2)\tau^2 + (3 c^5 - 5 c^3 v^2 - 2 v^5)\tau^3\right],$$

also:

$$U_1\,(a^2 - c^2\,\tau^2) - U_2 = \frac{-1}{30\,a^2\,v^2}\left[(10\,c^3 + 20\,v^3)\,a^2\,\tau + 30\,(v^2 - c^2)\,a\,c^2\,\tau^2 - (2\,v^5 + 10\,v^3\,c^2 + 20\,v^2\,c^3 - 18\,c^5)\,\tau^3\right],$$

also (wenn $\omega = \frac{v}{c}$ gesetzt wird) nach (75):

$$\Phi_{2x} = \frac{\varepsilon a}{40\,\omega^2}\left[-\frac{1}{2} + 5\,\omega^2 + \frac{15}{2}\,\omega^3 - \frac{1}{2}\,\omega^5 - \left(\frac{c\,t}{a}\right)^2(5 + 10\,\omega^2) - 10\left(\frac{c\,t}{a}\right)^3(\omega^3 - 1)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{c\,t}{a}\right)^4(\omega^5 + 5\,\omega^3 + 10\,\omega^2 - 9)\right].$$

Ferner wird nach (110) und (112) die dort vorkommende ganze Funktion $G(T, c\,\tau)$ jetzt gleich:

$$(166^a)\qquad G = a^4(\omega - 1)\left[\frac{4}{3}\frac{c\,\tau}{a} + (1 - \omega)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}(2 - 3\,\omega^2 - 2\,\omega^3)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^3\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}(1 + \omega - \omega^2 + 3\,\omega^3)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^4\right],$$

und somit, wenn man nach Potenzen von $\frac{c\,\tau}{a}$ und $\omega = \frac{v}{c}$ ordnet:

$$(167)\qquad -\Phi_{2x} - \frac{1}{c}\,\Psi_{2xt} = \varepsilon a \int_{t0}^{t}\left[b_0 + b_1\frac{c\,\tau}{a} + b_2\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^2 + b_3\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^3\right] d\left(\frac{c\,\tau}{a}\right),$$

wo:

$$b_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\omega - 1}{\omega^2},\quad b_1 = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{\omega^2} + 3 + 4\,\omega - 3\,\omega^2\right),$$
$$(167^a)\qquad b_2 = \frac{1}{8}\left(-\frac{6}{\omega^2} + 4 + 2\,\omega + 3\,\omega^2 - \omega^3 - 2\,\omega^4\right),$$
$$b_3 = \frac{1}{160}\left[-\frac{72}{\omega^2} + 65 + 40\,\omega + 30\,\omega^2 - 52\,\omega^3 + 45\,\omega^4\right].$$

Für die dritte Lage wird also gemäß (118^a) die Kraft gleich:

$$(168)\qquad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon^2\,\omega^2}{2\,\pi\,a^2(1 + \omega)^4}\left(2 - \frac{6}{5}\,\omega - \omega^2\right)$$
$$+ \frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi\,a^2}\left[b_0\,\frac{c}{a}(t - t^0) + \frac{1}{2}\,b_1\left(\frac{c}{a}\right)^2(t^2 - t^{02}) + \frac{1}{3}\,b_2\left(\frac{c}{a}\right)^3(t^3 - t^{03}) + \frac{1}{4}\,b_3\left(\frac{c}{a}\right)^4(t^4 - t^{04})\right]$$

und diese Gleichung gilt in dem Intervalle:

$$(t^0 =)\quad \frac{2\,a}{c + v} < t < \frac{2\,a}{c - v}\quad (= t'),$$

denn die Gleichung (78) hat, wie schon erwähnt wurde, nur die (von t unabhängige) Wurzel $\tau' = t' = \frac{2\,a}{c - v}$.

Will man sich die Intervalle an den Figuren 6 und 7 verdeutlichen, so hat man die Kurven $c\,\tau + T = 2\,a$ und $c\,\tau - T = 2\,a$ einfach durch zwei Parallele zur Abszissenachse zu ersetzen, und zwar durch die Geraden:

$$\tau = \frac{2\,a}{c + v}\quad \text{und}\quad \tau = \frac{2\,a}{c - v}.$$

Für $t > t'$ (d. h. für die vierte Lage) ist endlich Gleichung (118^b) anzuwenden, d. h. wir haben in (168) den Wert t durch den konstanten Wert $\tau' = \frac{2a}{c+v}$ zu ersetzen; dadurch ergibt sich:

$$\mathfrak{F}_x = \frac{-\varepsilon^2\omega^2}{2\pi a^2(1+\omega)^4}(2 - \tfrac{6}{5}\omega - \omega^2)$$

$$(169) \qquad + \frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2}\left[2b_0\left(\frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1+\omega}\right) + 2b_1\left\{\left(\frac{1}{1-\omega}\right)^2 - \left(\frac{1}{1+\omega}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left. + \tfrac{8}{3}b_2\left\{\left(\frac{1}{1-\omega}\right)^3 - \left(\frac{1}{1+\omega}\right)^3\right\} + 4b_3\left\{\left(\frac{1}{1-\omega}\right)^4 - \left(\frac{1}{1+\omega}\right)^4\right\}\right] \quad \text{für } t > \frac{2a}{c-v},$$

wo die eckige Klammer der rechten Seite in der einfacheren Gestalt:

$$4b_0\frac{\omega}{1-\omega^2} + 8b_1\frac{\omega}{(1-\omega^2)^2} + \frac{16}{3}b_2\frac{3\omega+\omega^3}{(1-\omega^2)^3} + 32b_3\frac{\omega+\omega^3}{(1-\omega^2)^4}$$

geschrieben werden kann.

Die Kraft ist also nach Ablauf der Zeit $\frac{2a}{c-v}$ stationär, d. h. unabhängig von t, geworden.

Da $\omega\left(=\frac{v}{c}\right)$ kleiner als Eins vorausgesetzt ist, so wird man nach Potenzen von ω entwickeln, um eine Näherungsformel zu erhalten. Da in b_1, b_2, b_3 das Quadrat der Geschwindigkeit v im Nenner vorkommt, so wird die Entwicklung mit negativen Potenzen von ω^2 beginnen; man erhält für den stationären Zustand:

$$(169^a) \qquad \mathfrak{F}_x = \frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2}\left(-\frac{29}{16}\frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} - \frac{3935}{384} - \frac{967}{40}\omega + \cdots\cdots\right).$$

Die Kraft ist also für kleine Werte von ω negativ, d. h. verzögernd. Es muß also für $\omega < \omega_0$ während der dritten Lage noch ein Vorzeichenwechsel eingetreten sein. Im stationären Zustande ist ferner bei Unterlichtgeschwindigkeit ($v < c$) die Kraft in erster Annäherung dem reziproken Werte des Quadrates von $\frac{v}{c}$ proportional.

Natürlich darf man hieraus nicht auf ein Unendlichwerden der Kraft für $v = 0$ schließen, denn die Ableitung der Formel (169^a) setzt voraus, daß schon eine gewisse Zeit hindurch $\left(\text{und zwar von der Dauer } t = \frac{2a}{c-v}\right)$ eine Bewegung mit der Geschwindigkeit v stattgefunden hat; man darf also nicht nachträglich durch die Annahme $v = 0$ dieser Voraussetzung widersprechen; für die Formel (164), welche bei Beginn der Bewegung gilt, ist es dagegen erlaubt $v = 0$ zu nehmen, und sie ergibt dann in der Tat $\mathfrak{F}_x = 0$.

Für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit wird die Wurzel $t' = \tau'$ unendlich groß, die Größe $t'' = \frac{2a}{v+c}$ wird gleich $\frac{a}{c}$, so daß die zweite Lage vollkommen in Wegfall kommt; es gilt also für alle Werte von t, die größer als $\frac{a}{c}$ sind, stets die

Formel (168); die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit bietet demnach keine besonderen Schwierigkeiten. Macht man in b_0, b_1, b_2, b_3 die Substitution $\omega = 1$ (d. h. $v = c$), so ergibt sich:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{3}{4}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{7}{20},$$

also die erzeugte Kraft für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit wird nach (164):

$$(170) \qquad (\mathfrak{F}_x)_{v=c} = -\frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi a^2}\left(\frac{ct}{a}\right)\left[1 - \frac{5}{4}\left(\frac{ct}{a}\right) + \frac{11}{40}\left(\frac{ct}{a}\right)^3\right] \quad \text{für } t < \frac{a}{c},$$

und nach (168ª):

$$(\mathfrak{F}_x)_{v=c} = \frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi a^2}\left[-\frac{1}{40} + \frac{3}{8}\left\{\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - 1\right\} + \frac{7}{80}\left\{\left(\frac{ct}{a}\right)^4 - 1\right\}\right],$$

oder:

$$(170^a) \qquad (\mathfrak{F}_x)_{v=c} = \frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi a^2}\left[-\frac{39}{80} + \frac{3}{8}\left(\frac{ct}{a}\right)^2 + \frac{7}{80}\left(\frac{ct}{a}\right)^4\right]$$

$$= -\frac{117\,\varepsilon^2}{320\,\pi a^2}\left[1 - \frac{10}{13}\left(\frac{ct}{a}\right)^2 - \frac{7}{39}\left(\frac{ct}{a}\right)^4\right] \quad \text{für } t > \frac{a}{c}.$$

Im Gegensatze zu den bisher von anderer Seite aufgestellten Formeln (vgl. unten § 16) erkennt man, daß die Kraft bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit für jeden endlichen Wert der Zeit endlich bleibt. Sie ist nach (170) gleich Null für $t = 0$, negativ für kleine Werte von t, ebenso für große Werte von t. Um zu untersuchen, ob ein Vorzeichenwechsel eintritt, hat man die kubische Gleichung:

$$40 - 50\,x + 11\,x^3 = 0$$

zu betrachten. Eine Wurzel ist reell und negativ, und für uns unbrauchbar, sie liegt zwischen $x = -2$ und $x = -3$; die beiden anderen Wurzeln sind ebenfalls reell und liegen bzw. zwischen $x = 1$ und $x = \frac{6}{5}$ und zwischen $x = \frac{6}{5}$ und $x = 2$. Da aber in der ersten Lage $t < \frac{a}{c}$ sein soll, so ist x an die Bedingung $0 < x < 1$ gebunden; auch die beiden anderen Wurzeln sind also unbrauchbar, d. h. in der ersten Lage tritt kein Vorzeichenwechsel ein. In der zweiten Lage bleibt $\mathfrak{F}_x$ nach (170ª) negativ, denn die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$39 - 30\,x - 7\,x^2 = 0$$

sind imaginär. Bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ist die Kraft demnach andauernd negativ, d. h. wirkt verzögernd.

§ 13. Die translatorische Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit (bzw. Lichtgeschwindigkeit) bei Volumladung.

Wir machen jetzt die Voraussetzung $v > c$ und nehmen wieder v als konstant an, so daß T und ξ wieder durch (162) bestimmt werden. Für die „erste und zweite Lage" kommt es auf Berechnung der in (128) aufgestellten Integrale an. Man findet unter der gemachten Annahme:

$$\Phi^*_{0x}(t) = \frac{\varepsilon c^2}{10 a^3 v^2} \int_0^t [2 (c^4 + 2 v^2 c)^2 \tau^3 + 15 a c (c^2 - v^2) \tau^2 - 10 a^2 c^2 \tau] \, d\tau,$$

$$\Phi^*_{1x}(t) = \frac{3 \varepsilon c^2}{8 a^3 v^2} (v^2 - c^2) \int_0^t (\tau^3 (v^2 - c^2) + 4 a c \tau^2 - 4 a^2 \tau) \, d\tau,$$

also:

$$\varphi_x = \Phi^*_{0x}(t) + \Phi^*_{1x}(t)$$

(171)
$$= \frac{\varepsilon a}{4 \omega^2} \left(\frac{c t}{a}\right)^2 \left[(1 - 3 \omega^2) + \frac{1}{4}(1 - \omega^2) \left(\frac{c t}{a}\right) + \frac{1}{40}(23 - 14 \omega^2 + 15 \omega^4) \left(\frac{c t}{a}\right)^2\right],$$

wenn wieder $\omega = \frac{v}{c}$ gesetzt wird, wobei jetzt $\omega > 1$ ist. Die Grenze der Gültigkeit dieser Formel ist durch die Gleichung (133) gegeben d. h. hier durch die Bedingung:

(171ª)
$$t < t_1, \quad \text{wenn} \quad t_1 (= \tau_1) = \frac{2 a}{v + c}$$

ist; an der Grenze, d. h. für $t = \frac{2 a}{v + c}$, wird

(172)
$$\varphi_x \left(\frac{2 a}{v + c}\right) = \frac{\varepsilon a}{20 (1 + \omega)^4 \omega^2} (- 45 \omega^4 - 130 \omega^3 - 64 \omega^2 + 50 \omega + 53).$$

Für die erste Lage berechnen wir sofort auch das Integral V_x gemäß Gleichung (148ª); es wird:

(173)
$$\Psi^*_{1xt}(t) = V_x = \frac{3 \varepsilon c}{8 a^3} \int_0^t \left[\tau^3 \left(\frac{1}{6} v^4 + c^2 v^2 + \frac{1}{6} c^4\right) - 2 a^2 \tau (c^2 + v^2) + \frac{8}{3} a^3 v\right] d\tau$$

$$= \frac{3}{8} \varepsilon c a \left[\frac{8}{3} \omega \left(\frac{c t}{a}\right) - (1 + \omega^2) \left(\frac{c t}{a}\right)^2 + \frac{1}{24}(1 + 6 \omega^2 + \omega^4) \left(\frac{c t}{a}\right)^4\right].$$

Hieraus folgt nach (160) für die wirkende Kraft in der ersten Lage der Wert:

(174)
$$\mathfrak{F}_x = - \frac{3 \varepsilon}{4 \pi a^3} \left(\varphi_x + \frac{1}{c} V_x\right) = - \frac{3 \varepsilon^2}{4 \pi a^2 \omega^2} \left[\omega \left(\frac{c t}{a}\right) - \frac{1}{8}(1 + 9 \omega^2) \left(\frac{c t}{a}\right)^2 - \frac{5}{16}(1 - \omega^2) \left(\frac{c t}{a}\right)^3 + \frac{1}{320}(51 + 2 \omega^2 + 35 \omega^4) \left(\frac{c t}{a}\right)^4\right].$$

Für kleine Werte von t ist das Vorzeichen der Kraft negativ wie bei Unterlichtgeschwindigkeit; um zu untersuchen, ob sich das Vorzeichen mit wachsendem t ändert, hat man die in $x \left(= \frac{a}{c t}\right)$ kubische Gleichung:

$$\omega x^3 - \frac{1 + 9 \omega^2}{8} x^2 + \frac{5}{16}(\omega^2 - 1) x + \frac{51 + 2 \omega^2 + 35 \omega^4}{320} = 0$$

zu betrachten. Dieselbe enthält zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge, hat also jedenfalls eine reelle negative Wurzel (die unbrauchbar ist) und vielleicht zwei positive Wurzeln. Sind letztere vorhanden, so muß der Differentialquotient der linken Seite:

$$3\,\omega\, x^2 - \frac{1+9\,\omega^2}{4}\, x + \frac{5}{16}(\omega^2 - 1)$$

reelle lineare Faktoren enthalten; die Diskriminante dieses quadratischen Ausdrucks ist:

$$\frac{1}{64}(81\,\omega^4 - 60\,\omega^3 + 60\,\omega + 1 + 18\,\omega^2);$$

sie ist für kleine Werte von ω positiv und kann das Zeichen nur wechseln, wenn $60\,\omega^3 > 81\,\omega^4$, also auch $\omega < 1$ ist; dann aber ist $60\,\omega > 60\,\omega^3$, und sie bleibt positiv; jene linearen Faktoren sind also reell, und es ist in jedem Falle zu untersuchen, ob ihnen reelle Wurzeln der kubischen Gleichung zugehören, d. h. ob die Kraft ihr Zeichen wechseln kann.

Die Gleichung (131) hat in diesem Falle nur die eine Wurzel $t = \frac{2\,a}{c+v}$, indem die in Fig. 10 gezeichnete Kurve hier eine gerade Linie ist, welche parallel zur Abszissenachse im Abstande $\frac{2\,a}{v+c}$ verläuft und demnach die Linie $t = \tau$ nur einmal schneidet. Es ist also τ_2 konstant, und zwar gleich $\frac{2\,a}{v+c}$; und es kommt die Formel (135ᵃ) zur Anwendung, wo der angegebene Wert für τ_2 einzusetzen ist. Die Summe der beiden ersten Glieder Φ_{0x}^* und Φ_{1x}^* entsteht aus (171), wenn dort $t = \tau_2$ genommen wird; d. h. es ist:

$$\text{(175)}\quad \begin{aligned} \Phi_{0x}^*(\tau_2, t) + \Phi_{1x}^*(\tau_2, t) &= \frac{\varepsilon\, a}{(1+\omega)^2}\left[(1 - 3\,\omega^2) + \frac{1}{4}(1-\omega^2) + \frac{1}{40}\,\frac{23 - 14\,\omega^2 + 15\,\omega^4}{(1+\omega)^2}\right] \\ &= \frac{\varepsilon\, a}{40\,(1+\omega)^4}(73 - 104\,\omega^2 + 12\,\omega^4). \end{aligned}$$

Wir erhalten ferner nach (135):

$$\text{(175}^a\text{)}\qquad \Phi_{2x}^*(t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2) = \frac{3\,\varepsilon\, c}{4\,a}\int_{\tau_2}^{t}[(a^2 - c^2\,\tau^2)\, W_1^* - W_2^* + 2\,c\,\tau\, W_0^*]\, d\,\tau.$$

Da die Wurzel t_2 in diesem Falle nicht existiert, so gilt die Gleichung für das ganze Intervall $\tau_2 < t < \frac{a}{c}$, und es kommt die vierte Lage, die durch (136) dargestellt war, hier nicht in Betracht; in dem ganzen Integrationsintervalle ist also $\tau < \frac{a}{c}$, so daß $a - T = a - v\,\tau$ stets positiv bleibt, und die oben im Anschlusse an (135) gemachte Bemerkung über die Zerlegung des Integrationsintervalles hier (und im folgenden) nicht zur Anwendung kommt, wie aus den Ungleichungen:

$$\frac{a}{c} < \frac{2\,a}{c+v} < \frac{a}{c} < \frac{a}{v-c}$$

sofort hervorgeht.

Es ist demnach W_1^* durch (134ᵇ), W_2^* durch (134ᵈ) und außerdem W_0^* durch (134) gegeben; und zwar wird:

$$W_0^* = \frac{1-\omega^2}{8\,\omega}\left[4 + 4\frac{c\,\tau}{a} + (1-\omega^2)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^2\right]$$

$$W_1^* = \frac{1}{6\,a\,\omega^2}\left[3\,(1-\omega^2) + (1 - 3\,\omega^2 - 2\,\omega^3)\frac{c\,\tau}{a}\right]$$

$$W_2^* = \frac{a}{30\,\omega^2}\left[15(1-\omega^2) + (25 - 15\,\omega^2 + 10\,\omega^3)\frac{c\,\tau}{a} + 15(1-\omega^2)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^2 + (3 - 5\,\omega^2 - 2\,\omega^3)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^3\right].$$

Setzt man diese Werte ein, so ergibt sich aus (135):

$$\Phi_{2x}^*(t) = \frac{\varepsilon\,c}{160\,\omega^2}\int_{t_1}^{t}\left[-15\,(1-\omega^2) + 35\,(1 - 3\,\omega^2 - 2\,\omega^3)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)\right.$$
$$\left. + 15\,(1-\omega^2)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^2 + (13 + 5\,\omega^2 + 68\,\omega^3)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^3\right]d\,t,$$

und somit:

$$\Phi_{2x}^*(t) - \Phi_{2x}^*(\tau_2) = \frac{\varepsilon\,a}{160\,\omega^2}\left[-15\,(1-\omega^2)\left(\frac{c\,t}{a} - \frac{2}{1+\omega}\right)\right.$$
$$(175^b)\quad + \frac{35}{2}\,(1 - 3\,\omega^2 - 2\,\omega^3)\left\{\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^2 - \left(\frac{2}{1+\omega}\right)\right\} + 5\,(1-\omega^2)\left\{\left(\frac{c\,t}{a}\right)^3 - \left(\frac{2}{1+\omega}\right)^3\right\}$$
$$\left. + \frac{1}{4}\,(13 + 5\,\omega^2 + 68\,\omega^3)\left\{\left(\frac{c\,t}{a}\right)^4 - \left(\frac{2}{1+\omega}\right)^4\right\}\right].$$

Zur Berechnung der Kraft dient ferner der Ausdruck Ψ_{2xt}; wir haben nach (151):

$$(175^c)\quad \Psi_{2xt}^*(t) = +\frac{\varepsilon\,a}{2}(\omega - 1)\int_{t_1}^{t}\left[1 + \frac{3}{4}(\omega - 1)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right) + \frac{1}{8}(\omega^3 + 3\,\omega^2 - 4)\left(\frac{c\,\tau}{a}\right)^3\right]d\left(\frac{c\,\tau}{a}\right).$$

Die wirkende Kraft wird schließlich nach (161):

$$(176)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,\pi\,a^3}\Bigg[&\Phi_{0x}^*\left(\frac{2\,a}{c+v}\right) + \Phi_{1x}^*\left(\frac{2\,a}{c+v}\right) + \Phi_{2x}^*(t) - \Phi_{2x}^*\left(\frac{2\,a}{c+v}\right) \\ &- \frac{1}{c}\,\Psi_{1xt}^*\left(\frac{2\,a}{c+v}\right) + \frac{1}{c}\,\Psi_{2xt}^*(t) - \frac{1}{c}\,\Psi_{2xt}^*\left(\frac{2\,a}{c+v}\right)\Bigg] \end{aligned} \qquad \text{für } \frac{2\,a}{v+c} < t < \frac{a}{c}.$$

wo nun die einzelnen Werte aus (175), (175[b]), (173), (175[c]) einzusetzen sind.

Für das nächste Intervall ist Gleichung (137[a]) anzuwenden, d. h. es bleibt dieselbe Formel (176) auch für $t > \frac{a}{c}$ gültig, und zwar so lange, bis die obere Grenze t des nach τ genommenen Integrals gleich einer Wurzel der Gleichung (142) wird; diese Gleichung lautet hier:

$$(177)\qquad 2\,a = (v - c)\,\tau;$$

die Wurzel:

$$(177^a)\qquad \tau = \frac{2\,a}{v - c}$$

ist also wieder von t unabhängig. Ist endlich $t > \frac{2\,a}{v-c}$, so wird die Kraft stationär,

indem alle Integrale Φ_{2x} und Ψ_{2xt} sich nicht mehr ändern, wenn t über diese Grenze hinaus wächst. Diese stationäre Kraft ist also für die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit gleich:

$$(178)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3}\Big[& \Phi^*_{0x}\left(\frac{2a}{v+c}\right) + \Phi^*_{1x}\left(\frac{2a}{v+c}\right) + \Phi^*_{2x}\left(\frac{2a}{v-c}\right) - \Phi^*_{2x}\left(\frac{2a}{v+c}\right) \\ & + \frac{1}{c}\Psi^*_{1xt}\left(\frac{2a}{v+c}\right) + \frac{1}{c}\Psi^*_{2xt}\left(\frac{2a}{v-c}\right) - \frac{1}{c}\Psi^*_{2xt}\left(\frac{2a}{v+c}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist eine rationale Funktion von ω, deren Nenner sich aus Potenzen von ω, $1-\omega$ und $1+\omega$ zusammensetzt. Diese Glieder werden also für $\omega = 1$ (d. h. für Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit) sehr groß. Trotzdem bleibt die stationäre Kraft $\mathfrak{F}_x$ immer endlich, denn die Formel (178) ist nur anwendbar für $t > \frac{2a}{v-c}$; wird also $v = c$, so gibt es keine Werte der Zeit t, die dieser Bedingung genügen; und folglich ist dann für alle Werte von $t\left(> \frac{a}{c}\right)$ die frühere Formel (176) anzuwenden.

Damit sind wir schon in die Diskussion des Falles $v = c$ eingetreten. Dieser Fall ist bereits oben als Grenzfall der Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit (§ 12) eingehend behandelt, so daß es kaum nötig ist, hier darauf zurückzukommen. Immerhin mag man sich davon überzeugen, daß die jetzt für die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit entstehenden Resultate mit den früheren vollständig übereinstimmen.

Zunächst nämlich ist das zuerst in Betracht kommende Intervall (171[a]) mit dem früheren Intervalle $0 < t < \frac{a}{c}$ im Falle $\omega = 1$ (d. h. $v = c$) vollkommen identisch. Die für dieses Intervall abgeleitete Kraft $\mathfrak{F}_x$, wie sie in (170) berechnet war, ergibt sich jetzt genau ebenso aus (174). In der Tat wird das in § 10 behandelte Integral K_1 mit dem in § 7 behandelten Integrale J_1 identisch, indem sich aus (125) jetzt (d. i. für $v = c$, $T = c\tau$) $\Theta_3 = 0$, $\Theta_2 = \pi$ ergibt, so daß die Grenzen beider Integrale übereinstimmen; ebenso wird in dem durch (100) gegebenen Integrale V'_x das Integrationsgebiet jetzt identisch mit dem Integrationsgebiete des Integrals V''_x in § 11; die Übereinstimmung ist nur nicht so unmittelbar einleuchtend, weil früher (§ 8) erst nach R und dann nach Θ', später (§ 11) erst nach Θ' und dann nach R integriert wurde; die Übereinstimmung tritt aber im Resultate hervor, indem der in (148[a]) für V_x gefundene Ausdruck jetzt (d. i. für $v = c$) in den Ausdruck (107) bzw. (108) direkt übergeht. Die Identität der beiden in (170) und (174) für den Fall $v = c$ erhaltenen Ausdrücke der Kraft $\mathfrak{F}_x$ gibt überdies eine nützliche Kontrolle der Rechnung.

Das zweite Intervall $\frac{2a}{c+v} < t < \frac{a}{c}$ kommt für $v = c$ nicht in Betracht, da hier obere und untere Grenze zusammenfallen; die Formeln (174), (175) und (176) gelten aber auch im nächsten Intervalle, dessen obere Grenze $\frac{2a}{v-c}$ hier unendlich groß wird, wo wir diese Formeln für:

$$\frac{a}{c} < t < \infty$$

anzuwenden haben. Das Integral W_0^* wird gleich Null für $T = c\tau$, das Integral W_1^* mit dem früheren Integrale U_1 in (74) identisch, nämlich $= -\frac{2c\tau}{3a^2}$, denn es wird jetzt $\Theta_1 = \pi$ und $\Theta_3 = 0$; ebenso wird W_2^* mit dem früheren U_2 identisch, nämlich $= \frac{2c\tau}{15}(5a^2 - c^2\tau^2)$; für $v = c$ fällt also in der Tat die jetzige Funktion Φ_{2x}^* mit der früheren Funktion Φ_{2x} zusammen.

Ebenso wird endlich das in (112) aufgestellte Integral Ψ_{2xt} mit dem jetzt in (151) auftretenden Integrale $\Psi_{2xt}^*(t) - \Psi_{2xt}^*\left(\frac{2a}{c+v}\right)$ für $v = c$ und $T = c\tau$ identisch, indem dann sowohl die Grenzen als die Funktionen unter dem Integralzeichen übereinstimmen; in der Tat wird auch nach (166ᵃ) die frühere ganze Funktion G jetzt gleich Null, und derselbe Wert ergibt sich für die in Ψ_{2xt}^* auftretende ganze Funktion, wie sie oben in (151ᵃ) angegeben wurde. Es ergibt sich hierbei also, daß der durch das skalare Potential gegebene Teil der Kraft $\mathfrak{F}_x$ bei Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit schon nach der Zeit $t = \frac{a}{c}$ stationär wird, während der durch das Vektorpotential gegebene Teil der Kraft stets von t abhängig bleibt.

§ 14. Die geradlinige, gleichförmig beschleunigte (bzw. verzögerte) Bewegung eines Elektrons mit Volumladung. — Übergang von Unterlichtgeschwindigkeit zu Überlichtgeschwindigkeit.

Das Beispiel der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (§ 12 und 13) war zu einfach, um das Wesen der aufgestellten allgemeinen Formeln ganz erkennen zu lassen; es ist deshalb nützlich, auch noch das nächst einfache Beispiel, d. h. die gleichförmig beschleunigte Bewegung, kurz durchzugehen. Es sei demnach:

$$\mathfrak{v}_x = v + q\,t, \quad \mathfrak{v}_y = 0, \quad \mathfrak{v}_z = 0,$$

so daß die Bewegung wieder in der x-Achse stattfindet und mit der Geschwindigheit v beginnt. Wir erhaltan aus (26):

$$\xi = T = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x\,d\tau = (v + q\,t)\,\tau - \frac{q}{2}\tau^2, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0. \tag{179}$$

Ist $v < c$, so ist jedenfalls zu Anfang der Bewegung, d. i. für kleine Werte von t, Unterlichtgeschwindigkeit vorhanden; bei wachsendem t wird dieselbe aber allmählich in Überlichtgeschwindigkeit übergehen. Die Grenze zwischen beiden Geschwindigkeiten wird durch die Gleichung $c\tau = T$, d. h. nach Absonderung des Faktors τ, durch die folgende Gleichung gegeben:

$$q\,t - \frac{q}{2}\tau + v - c = 0. \tag{180}$$

Wählen wir wieder t als Abszisse, τ als Ordinate, so stellt diese Gleichung eine gerade Linie (L in Fig. 13) dar, welche die Achse $\tau = 0$ im Punkte $t = \frac{c - v}{q}$ (Punkt A in Fig. 13) und die Achse $t = 0$ im Punkte $\tau = 2\frac{c - v}{q}$ (Punkt B) schneidet. Für alle Punkte rechts von dieser ziemlich steil verlaufenden Geraden ist $T > c\tau$, links von ihr ist $T < c\tau$. Da τ an die Bedingung $\tau < t$ gebunden ist, so kommen für die Formeln der Unterlichtgeschwindigkeit nur die Punkte t, τ des Dreiecks $O\,A\,C$ in Betracht. In Figur 13 ist das oberhalb der Linie $\tau = t$ liegende Gebiet (das für uns keine Bedeutung hat) vertikal schraffiert, das Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit horizontal, das Gebiet der Unterlichtgeschwindigkeit schräge.

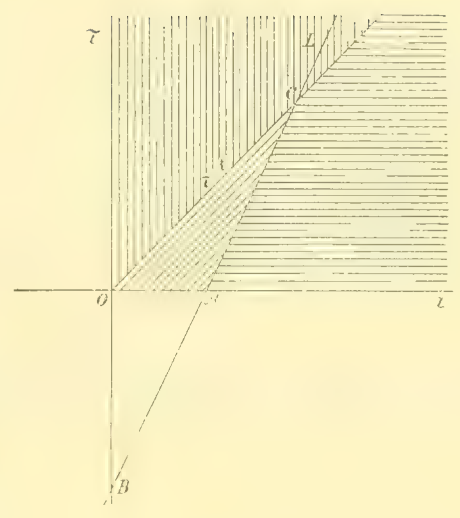


Fig. 13.

Für die erste und zweite Lage gemeinsam gilt die Formel (118), d. h. es ist hier:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\left[\Phi_{1x}(t, t) + \Psi_{1xt}(t, t)\right] \quad \text{für } 0 < t < t^0, \tag{181}$$

dabei ist t^0 durch die Gleichung (72^a) definiert, welche hier nach (179) die Gestalt:

$$q\,t^2 + 2\,(c + v)\,t - 4\,a = 0$$

annimmt, so daß:

$$t^0 = -\frac{c + v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c + v}{q}\right)^2 + \frac{4\,a}{q}} \tag{181a}$$

wird (also für positive Werte von q auch stets reell ist). In (181) sind die Funktionen Φ und Ψ durch die obigen Gleichungen (68) und (108) definiert; man sieht, daß diese Integrale infolge von (179) rationale ganze Funktionen von t (also nirgends unendlich) werden.

Für $t > t^0$ haben wir die Gleichung (118^a) anzuwenden; in ihr ist τ^0 durch die Gleichung (73^b) als Funktion von t definiert; diese Gleichung lautet hier:

$$q\,\tau^2 - 2\,q\,\tau\,t - 2\,(c + v)\,\tau + 4\,a = 0. \tag{181b}$$

Nimmt man wieder t als Abszisse, τ als Ordinate, so ist dies die Gleichung einer Hyperbel; ihr Mittelpunkt M' liegt an der Stelle:

$$t = -\frac{c + v}{q}, \quad \tau = 0;$$

ihre Asymptoten haben die Gleichungen:

$$\tau = 2\,t + \frac{c + v}{q} \quad \text{und} \quad \tau = 0.$$

Die Lage der Hyperbel ist in Fig. 14 veranschaulicht; sie ist dort mit H_1 bezeichnet. Durch Auflösung von (181^b) findet man für τ^0 den Wert:

$$\tau^0 = t + \frac{c+v}{q} - \sqrt{\left(t + \frac{c+v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}; \tag{181^c}$$

hierbei ist das negative Vorzeichen zu wählen, da nur solche Werte τ^0 in Betracht kommen, die kleiner als t sind (vgl. oben die Erörterungen bei Einführung von τ^0). Die Abszisse t^0 des Schnittpunktes der Hyperbel mit der Linie $\tau = t$ ist durch (181ᵃ) gegeben, also stets reell; sie entspricht dem Punkte E in Figur 14. Der Schnittpunkt F mit der durch (180) dargestellten Linie L hat die Koordinaten:

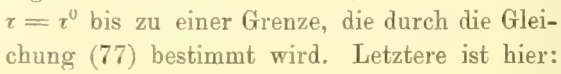
$$t = \frac{a}{2c} + \frac{c-v}{q} \quad (= t_3), \quad \tau = \frac{a}{c}. \tag{181^d}$$

Der rechts von diesem Schnittpunkte gelegene Teil der Hyperbel H_1 hat für uns zunächst keine Bedeutung, da er im Gebiete der Überlichtgeschwindigkeit liegt, in dem andere Formeln gelten. Die Schnittpunkte mit der Achse $t = 0$ haben die Koordinaten:

$$\tau = \frac{c+v}{q} \pm \sqrt{\left(\frac{c+v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}},$$

können also reell oder imaginär sein; da sie oberhalb der Linie $\tau = t$ liegen, kommen sie für uns nicht in Betracht.

Für $t > t^0$ zerfällt das Integrationsintervall der Variabeln τ in zwei Teile, wie früher erörtert wurde (vgl. oben S. 263 f.), das eine geht von $\tau = 0$ bis $\tau = \tau^0$, das andere von



$\tau = \tau^0$ bis zu einer Grenze, die durch die Gleichung (77) bestimmt wird. Letztere ist hier:

$$q\tau^2 - 2qt\tau + 2(c-v)\tau - 4a = 0. \tag{182}$$

Sie stellt also in der t-τ-Ebene eine Hyperbel dar. Ihr Mittelpunkt ist durch die Gleichungen:

$$t = \frac{c-v}{q} \,(= t_2), \quad \tau = 0 \tag{182^a}$$

bestimmt, liegt demnach im Punkte A (Fig. 14); Asymptoten sind die t-Achse und die durch (180) dargestellte Linie L. Die Hyperbel ist in Fig. 14 mit H_2 bezeichnet. Nur diejenigen Punkte derselben haben für uns Bedeutung, für welche $\tau < t$ ist: es müssen deshalb ihre Schnittpunkte mit der Geraden $t = \tau$ gesucht werden; diese sind: [1])

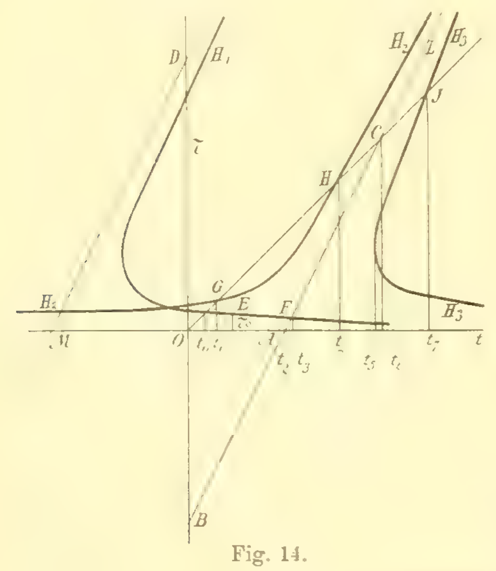


Fig. 14.

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{c-v}{q} - \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}} \quad \text{(Punkt } G \text{ in Fig. 14)}, \\ t_4 &= \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}} \quad (\;\;\text{„}\;\; H \;\;\text{„}\;\; \text{Fig. 14}). \end{aligned} \tag{183}$$

[1]) In Fig. 14 ist vorausgesetzt, daß $t_1 > t^0$ sei; das tritt ein, wenn $4aq > c(3c + 4v)$ ist; andernfalls sind noch weitere Fälle zu unterscheiden.

Wir haben demnach zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist $(c-v)^2 < 4\,a\,q$, die Schnittpunkte (t_1 und t_4) sind imaginär; hier gilt die Formel (118ᵃ) in dem ganzen Intervalle $t_1 < t < t_2$ (wenn wieder $t_2 = \frac{c-v}{q}$ gesetzt wird); es ist also:

(184) $$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\left[\Phi_{1x}(\tau^0, t) + \Phi_{2x}(t, t) + \frac{1}{c}\Psi_{1xt}(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_{2xt}(t, t)\right] \quad \text{für } t^0 < t < t_2.$$

b) Es ist $(c-v)^2 > 4\,a\,q$; hier muß das Intervall in mehrere Teile zerlegt werden; man hat (indem wir hier und im folgenden die Indices x und t an den Funktionen Φ und Ψ der Kürze wegen fortlassen):

(184ᵃ) $$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c}\Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(t, t)\right] \quad \text{für } t^0 < t < t_1,$$

(184ᵇ) $$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau_1, t)\right] \quad \text{für } t_1 < t < t_2,$$

wobei τ_1 die positive Wurzel der Gleichung (182) bedeutet:

(184ᶜ) $$\tau_1 = t - \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(t - \frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4\,a}{q}}$$

und an Stelle des in (79) und (118ᵇ) gebrauchten Zeichens τ' steht, während t^0, t_1, t_2 wieder bzw. durch (181ᵃ), (183), (182ᵃ) gegeben werden.

Wächst t über t_2 hinaus, so treten wir in das Gebiet ein, in welchem die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit erfolgt, und das rechts von der Linie L liegt. Die allgemeine Formel (34) behält ihre Gültigkeit; das Integrationsintervall ist nur in verschiedene Teile zu zerlegen, nämlich:

$0 < \tau < \tau^*$, wo die Formeln für Unterlichtgeschwindigkeit anzuwenden sind,

$\tau^* < \tau < t$, wo die Formeln für Überlichtgeschwindigkeit in Betracht kommen.

Dabei bedeutet τ^* die Ordinate des Schnittpunktes der durch (180) dargestellten Linie L mit der Parallelen zur τ-Achse, welche in der Entfernung t von derselben gezogen wird, d. h. es ist:

(185) $$\tau^* = 2\,t - 2\,\frac{v-c}{q}.$$

Da aber $\tau < t$ sein muß, so gilt diese Zerlegung:

(186) $$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,a^3\,\pi^8}\left[\int\limits_{t}^{\tau^*}\frac{S}{R}\,d\,\tau + \int\limits_{\tau^*}^{t}\frac{S}{R}\,d\,\tau\right]$$

nur, solange auch $\tau^* < t$ bleibt, d. h. für:

(187) $$\frac{v-c}{q} < t < 2\,\frac{v-c}{q}; \quad \text{d. h. } t_2 < t < t_6,$$

wenn t_6 die Abszisse des Punktes C in Fig. 14 bezeichnet, d. i. des Punktes, in dem die Linie L von der Linie $\tau = t$ geschnitten wird.

Man erkennt hieraus, daß der allmähliche Übergang von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit keinen Schwierigkeiten begegnet; insbesondere wird die Kraft nicht unendlich groß (wie von anderer Seite behauptet wurde), denn die Integrale Φ_2 und Ψ_2 bleiben durchaus endlich; in der Tat tritt in Φ_2 nach (75) nur die Funktion T im Nenner unter dem Integralzeichen auf; es verschwindet aber T nur für $\tau = 0$, und dieser Wert liegt außerhalb der für (184), (184^a) und (184^b) vorausgesetzten Intervalle; und außerdem ist $T = 0$ nur für:

$$\tau = 2t + 2\frac{v}{q},$$

und dieser Wert ist größer als t, wenn q (wie wir jetzt annehmen) positiv ist, kommt also auch nicht in Betracht.

Für das Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit müssen wir zunächst die kritischen Kurven (131) und (142) untersuchen; die erstere wird hier durch die Gleichung gegeben:

$$\tau^2 - 2t\tau - 2\frac{v+c}{q}\tau + \frac{4a}{q} = 0,$$

also mit der obigen Hyperbel (181^b) identisch, die in Fig. 14 durch H_1 dargestellt war, und deren rechts von der Linie L verlaufender Zweig nunmehr auch für uns Bedeutung gewinnt.

Wir finden demnach für das nächste Intervall und für den obigen Fall a) nach (129) und (186):

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^*, t) \\ &+ [\Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] \\ &+ \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(t, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3 \text{ im Falle a).} \end{aligned} \tag{188}$$

Im Falle b) dagegen sind wieder zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

b$_\alpha$) Es ist $t_4 > t_3$, d. h. $\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 > \frac{4a}{q} + \left(\frac{a}{2c}\right)^2$; dann gilt im ganzen Intervalle die Gleichung:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t)\ \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^*, t) \\ &+ [\Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] \\ &+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau_1, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3; \end{aligned} \tag{188a}$$

dieser Fall entspricht der Zeichnung in Fig. 14.

b$_\beta$) Es ist $t_4 < t_3$, d. h. $\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 < \frac{4a}{q} + \left(\frac{a}{2c}\right)^2$; dann muß das Intervall in zwei Teile zerspalten haben, und wir erhalten die Gleichung (188^a) für das Intervall $t_2 < t < t_4$; dagegen:

$$(188_b)\quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*, t) + \Phi_1^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^*, t) \\ &+ [\Phi_1(\tau^0, t) - \Phi_1(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_1(\tau^0, t) - \Psi_1(\tau^*, t)] \\ &+ \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(t, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_3. \end{aligned}$$

Die Kurve (142) ist hier durch die Hyperbel H_3, d. i. durch die Gleichung:

$$(189)\quad \tau^2 - 2\tau t + 2\frac{c-v}{q}\tau + \frac{4a}{q} = 0$$

gegeben; ihr Mittelpunkt fällt mit demjenigen der Hyperbel H_2 zusammen; auch die Asymptoten sind beiden Kurven gemeinsam; die letzteren liegen aber in verschiedenen Winkelräumen zwischen den Asymptoten. Löst man die Gleichung (189) auf, so ergibt sich:

$$(190)\quad \begin{aligned} \tau_3 &= t - \frac{c-v}{q} - \sqrt{\left(t - \frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}, \\ \tau_4 &= t - \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(t - \frac{c-v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}. \end{aligned}$$

Die für uns in Betracht kommende vertikale Tangente ist also durch die Gleichung:

$$(190^a)\quad t = \frac{c-v}{q} + 2\sqrt{\frac{a}{q}} \quad (= t_5)$$

bestimmt. Durch diesen Wert t_5 ist ein weiteres Intervall abgegrenzt. Der Schnitt J der Hyperbel (189) mit der Linie $\tau = t$ liefert den Wert:

$$(191)\quad t = \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} \quad (= t_7)$$

und es ist $t_7 > t_5$, so daß durch t_5 und t_7 dann ein weiteres Intervall abzugrenzen ist. Dazwischen schaltet sich als zu beachtender Punkt noch der Schnittpunkt C der Linie L mit der Linie $\tau = t$ ein:

$$(192)\quad t = \tau = 2\frac{c-v}{q} \quad (= t_6);$$

dieser Wert ist stets kleiner als t_7; er liegt zwischen t_5 und t_7 in obigem Falle b), dagegen zwischen t_4 und t_5 in obigem Falle a): demgemäß ist die Unterscheidung dieser Fälle auch im folgenden beizubehalten. Wir erhalten:

Im Falle a) für $t_2 < t < t_3$ zunächst obige Gleichung (188); dann:

$$(193)\quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau^*, t) \\ &+ [\Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_3 < t < t_6, \end{aligned}$$

wobei als untere Grenze der Integrale Φ_2^* und Ψ_2^* der Wert τ^0 zu nehmen ist; dieselbe untere Grenze ist im folgenden für diese Integrale zu wählen; das Einsetzen einer anderen unteren Grenze ist durch entsprechende Differenzbildung (in den eckigen Klammern) angedeutet. Ferner:

$$(193^a)\quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau_0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(t, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(t, t) \quad \text{für } t_6 < t < t_5. \end{aligned}$$

Für $t > t_5$ ist zu beachten, daß die beiden Schnittpunkte einer Parallelen zur τ-Achse mit der Hyperbel H_3 verschiedene Intervalle ergeben, in denen das Integral Φ_2 von Null verschieden ist, während dazwischen (d. h. für $\tau_3 < \tau < \tau_4$) die Integrale Φ_2 und Ψ_2 verschwinden. Weiter wird:

$$(193^b)\quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \\ &+ [\Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_7. \end{aligned}$$

In (193^a) und (193^b) hat der Einfluß der früheren Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit ganz aufgehört $\left(\text{also nach Ablauf der Zeit } t_6 = 2\,\frac{c - v}{q}\right)$; und endlich:

$$(193^c)\quad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_7. \end{aligned}$$

Je mehr t wächst, um so mehr nähern sich die Werte τ^0 und τ_3 einander und der Null; bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung (mit Überlichtgeschwindigkeit) nimmt also die von dem Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft bei hinreichend großen Werten von t scheinbar andauernd ab; da aber t auch in den Funktionen unter den Integralzeichen vorkommt, so kann doch der Wert der Integrale bei wachsendem t alle Grenzen übersteigen; jedenfalls läßt sich ohne genauere Untersuchung hierüber nichts aussagen.

Im Falle b) ist zu beachten, daß das Auftreten der reellen Schnittpunkte der Geraden $t = \tau$ mit der Hyperbel H_1 (die den Abszissen t_1 und t_4 entsprechen) eine andere Abgrenzung der Intervalle bedingt. Man hat zunächst für $t_2 < t < t_3$ obige Gleichung (188^a) für den Fall b_α), dagegen für den Fall b_β) die Gleichung (188^a) nur im Intervalle $t_2 < t < t_4$ und (188^b) im Intervalle $t_4 < t < t_3$. Für $t > t_3$ sind wieder die beiden Unterabteilungen zu unterscheiden; aber es tritt noch eine weitere Unterscheidung hinzu, je nachdem $t_4 < t_5$ oder $t_4 > t_5$ ist. Wir haben also:

$b_{\alpha\alpha}$) $t_4 > t_3$ wie oben in b_α) und dazu $t_5 > t_4$, d. h. $\dfrac{8a}{q} > \left(\dfrac{c - v}{q}\right)^2$; dann ist:

$$-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t)$$

(194)
$$+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau^*, t)$$

$$+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_1(\tau_1, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_4$$

und

$$-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t)$$

(194^a)
$$+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau^*, t)$$

$$+ \Phi_2(t, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(t, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_5.$$

Für $t > t_5$ kommt wieder der Umstand in Betracht, daß eine Parallele zur τ-Achse die Hyperbel H_3 in zwei Punkten (τ_3 und τ_4) schneidet; demnach wird:

$$-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t)$$

$$+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t)$$

(194^b)
$$+ [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)]$$

$$+ [\Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_6.$$

Für $t > t_6$ kommt das Gebiet links von der Linie L (d. h. der Einfluß der zu Anfang bestehenden Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit) nicht mehr in Betracht, und es wird:

$$-\frac{4\pi a_3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^*, t)$$

(194^c)
$$+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t)$$

$$+ [\Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \quad \text{für } t_6 < t < t_7.$$

Endlich, nachdem die Hyperbel H_3 die Linie $\tau = t$ in J überschritten hat:

(194^d)
$$+\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Psi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t)$$

$$+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_7.$$

b$_{\alpha\beta}$) $t_4 > t_3$, wie vorhin, aber $t_5 < t_4$, d. h. $\frac{8a}{q} < \left(\frac{c-v}{q}\right)^2$; dann ist:

(195) Gleichung (194) gültig für das Intervall $t_3 < t < t_5$.

Für $t > t_5$ kommen jetzt die Punkte τ_3 und τ_4 auf der Hyperbel H_3 in Betracht; also:

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\
& + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \\
& + [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
& + [\Phi_2(\tau_1, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2(\tau_1, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_4.
\end{aligned} \tag{195a}
$$

Ferner:

(195[b]) Gleichung (194[b]) für das Intervall $t_4 < t < t_6$,

(195[c]) „ (194[c]) „ „ „ $t_6 < t < t_7$,

(195[d]) „ (194[d]) „ „ „ $t > t_7$.

b$_\beta$) Es ist $t_4 < t_3$, wie oben. Die folgenden Gleichungen schließen sich also an Gleichung (188[b]) an; hier ist immer $t_6 < t_5$, d. i. $\frac{c-q}{q} < 2\sqrt{\frac{a}{q}}$; wir haben also keine weiteren Unterabteilungen, und erhalten:

(196) Gleichung (194[a]) für das Intervall $t_3 < t < t_5$.

Ferner:

(196[a]) „ (194[b]) „ „ „ $t_5 < t < t_6$,

wie oben und ebenso:

(196[b]) Gleichung (194[c]) „ „ „ $t_6 < t < t_7$,

(196[c]) „ (194[d]) „ „ „ $t > t_7$.

Hiermit ist die gleichförmig beschleunigte Bewegung vollständig behandelt; die Auswertung der auftretenden Integrale bietet im einzelnen kaum größeres Interesse.

Ist q sehr klein, so liegt der Punkt $t_2 = \frac{c-v}{q}$ sehr weit nach rechts entfernt; dann nennt man die Bewegung quasistationär. Für diese quasistationäre Bewegung gilt also die Gleichung (184[b]), in der nur die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \Psi_1, \Psi_2$ vorkommen (die sich also nur auf Unterlichtgeschwindigkeit bezieht), für ein sehr weites Intervall. Das Interesse, welches sich an diese Bewegungsform knüpfte, beruht wesentlich darauf, daß die gleichförmige Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit bisher als „kräftefrei“ (unter der Bedingung $\mathfrak{F}_x = 0$ erfolgend) betrachtet wurde; es kam deshalb darauf an, den einfachsten Fall der nicht kräftefreien Bewegung näherungsweise zu behandeln. Nachdem aber obige genauere Behandlung gezeigt hat, daß auch die gleichförmige Bewegung nicht kräftefrei ist, können wir eine eingehendere Behandlung der quasistationären Bewegung zunächst übergehen.

In ganz analoger Weise läßt sich die gleichmäßig verzögerte Bewegung behandeln. Es genügt, für diesen Fall die verschiedenen Hyperbeln zu zeichnen; aus der Figur entnimmt man leicht die zu unterscheidenden Intervalle. Jetzt ist die Beschleunigung q negativ; wir setzen sie gleich $-\varkappa$. Die Gerade (180) wird dann:

$$2\varkappa t - \varkappa\tau - (v - c) = 0;$$

sie trennt in der t-τ-Ebene wieder das Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit von dem der Unterlichtgeschwindigkeit. Sie liegt so, wie in Fig. 13 die Linie L, wenn:

$$OA = \frac{v - c}{2\varkappa}, \quad OB = \frac{v - c}{\varkappa}$$

gewählt wird, wobei jetzt $v > c$ sei, so daß die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit beginnt: aber jetzt entspricht das schräg schraffierte Gebiet der Überlichtgeschwindigkeit, das horizontal schraffierte (rechts von L gelegene) Gebiet der Unterlichtgeschwindigkeit.

Die durch (181^b) dargestellte Hyperbel H_1 hat hier die Gleichung:

$$\varkappa\tau^2 - 2\varkappa\tau t + 2(c + v)\tau - 4a = 0.$$

Ihr Mittelpunkt M' hat die Koordinaten:

$$t = \frac{c + v}{\varkappa}, \quad \tau = 0;$$

er liegt also rechts vom Punkte A (vgl. Figur 15); die Asymptoten sind die Linien:

$$\tau = 2t - 2\frac{c + v}{\varkappa} \quad \text{und} \quad \tau = 0.$$

Erstere Linie geht durch M' und ist parallel zu L; die Lage der Kurve H_1 ist in Figur 15 schematisch angegeben. Die Hyperbel H_2 ist nach (182):

$$\varkappa\tau^2 - 2\varkappa t\tau + 2(v - c)\tau + 4a = 0;$$

sie hat den Mittelpunkt:

$$t = \frac{v - c}{\varkappa}, \quad \tau = 0;$$

derselbe liegt also in A; die Asymptoten sind die Linie L und die Achse $\tau = 0$; die Kurve liegt also so, wie die Hyperbel H_3 in Figur 14. Umgekehrt liegt jetzt (in Fig. 15) die Hyperbel H_3, d. i. nach (189) die Kurve:

$$\varkappa(\tau^2 - 2\tau t) + 2(v - c)\tau - 4a = 0$$

so, wie früher die Hyperbel H_2; sie hat Mittelpunkt und Asymptoten mit H_2 gemeinsam.

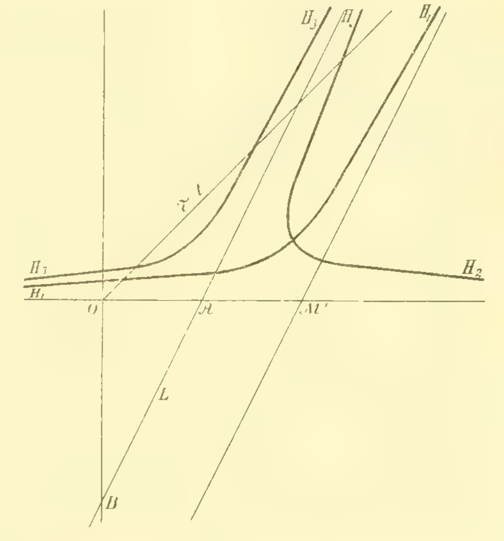


Fig. 15.

Die Hyperbeln H_1 und H_2 schneiden sich in einem Punkte mit den Koordinaten:

$$t = \frac{a}{c} + \frac{v}{\varkappa}, \quad \tau = \frac{2a}{c}.$$

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob dieser Schnittpunkt einen störenden Einfluß auf die Bestimmung der einzelnen Intervalle habe; tatsächlich ist das aber nicht

der Fall; denn zur Zeit $t = \frac{v}{\varkappa}$ ist die Geschwindigkeit des bewegten Elektrons gleich Null geworden, und dieser Zeitpunkt liegt immer vor demjenigen, welcher dem erwähnten Schnittpunkte entspricht. Sobald aber nun die Geschwindigkeit negativ wird, hat man den Anfangspunkt der Zeit zu verlegen, d. h. eine neue Zeit t^* einzuführen, so daß:

$$t^* = \frac{v}{\varkappa} - t, \quad \mathfrak{v}_x = \varkappa t^*$$

wird, und für die neue Zeit t^* eine neue Figur zu entwerfen; dabei darf man natürlich nicht versäumen, die im Intervalle $0 < t < \frac{v}{\varkappa}$ gewonnenen Beiträge zur Kraft $\mathfrak{F}_x$ auch für die weitere rückläufige Bewegung zu berücksichtigen. Auch der allmähliche Übergang von Überlichtgeschwindigkeit auf Unterlichtgeschwindigkeit bereitet demnach keine Schwierigkeit.

§ 15. Ergänzende Betrachtung über den Anfangszustand der Bewegung, insbesondere bei gleichförmiger und bei gleichförmig beschleunigter Bewegung des Elektrons.

Bei der bisherigen Behandlung der Bewegung eines elektrischen Teilchens haben wir angenommen, daß dasselbe zur Zeit $t = 0$ seine Bewegung beginnt und gleichzeitig seine elektrische Ladung empfängt. Denkt man sich aber das bewegte Teilchen als ein Elektron, d. h. als durch und durch aus Elektrizität bestehend, so ist die Ladung schon vor der Zeit $t = 0$ vorhanden gewesen, und schon vor Beginn der Bewegung hat sich ein elektrisches Feld durch den ganzen Raum ausgebreitet, während unsere Behandlung nur das vom Momente $t = 0$ ab entstehende und vom bewegten Elektron mitgeführte Feld berücksichtigt. Jenes schon vorhandene Feld wird natürlich die Bewegung mit beeinflussen, es sei denn, daß die Wirkung vor der Zeit $t = 0$ durch andere Elektronen und sonstige Umstände neutralisiert wurde.

Um nun die Wirkung dieser neuen Voraussetzung über den Anfangszustand mathematisch zu behandeln, könnte man von dem elektrostatischen Potentiale der vor der Zeit $t = 0$ ruhenden Kugel auf die bewegte Kugel ausgehen. Von jedem Punkte der ersteren aus zieht sich das elektrische Feld mit der Geschwindigkeit c zurück, so daß jedes Volumelement der ersteren nur auf diejenigen Punkte der bewegten Kugel eine Wirkung ausübt, die zur Zeit t sich außerhalb einer Kugel mit dem Radius ct befinden, in deren Zentrum jenes Volumelement liegt. Dabei wäre ferner zu berücksichtigen, daß die bewegte Kugel eine gewisse Zeit hindurch die feste Kugel schneidet, daß daher ein Teil der ersteren im Innern der ruhenden Kugel sich befindet, ein anderer Teil außerhalb dieser Kugel, und daß für beide Teile verschiedene Werte des Potentials zu benützen sind. Einfacher kommt man indessen durch folgende Betrachtung zum Ziel.

Unsere allgemeinen Formeln gelten bei ganz beliebigen Annahmen über die Geschwindigkeitskomponenten $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$, z. B. also auch dann, wenn die Bewegung durch eine Ruhezeit unterbrochen und dann wieder fortgesetzt wird. Legen wir nun eine solche Ruhezeit in den Anfang der Bewegung, so kommt dies darauf hinaus, daß wir:

1. die am Schlusse von § 3 in den Moment $t = 0$ verlegte Anfangszeit durch einen negativen Wert $t = -t_0$ ersetzen, d. h. in den allgemeinen Formeln t_0 durch $-t_0$ ersetzen, so daß die Bewegung zur Zeit $t = 0$ beginnt, wie bisher;
2. für die Zeit von $t = -t_0$ bis $t = 0$ die Werte der Funktionen $\mathfrak{v}_x(\tau)$, $\mathfrak{v}_y(\tau)$, $\mathfrak{v}_z(\tau)$ gleich Null annehmen, so daß die Ausdrücke für die in (26) gegebenen Funktionen ξ, η, ζ und für T in (51) vollständig ungeändert bleiben;
3. den Anfangspunkt $t = -t_0$ so bestimmen, daß die vor Beginn der Bewegung vom Elektron ausgehenden Kraftwirkungen volle Berücksichtigung finden.

Die allgemeine Formel (34) wird jetzt:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int\limits_0^{t+t_0}\frac{S}{R}\,d\tau, \tag{197}$$

wo wieder S durch (34ᵃ), R durch (34ᵇ) gegeben sind. Der einzige Unterschied gegen früher besteht darin, daß die Variable τ (welche die Zeit von dem Momente t aus rückwärts mißt, so daß $\tau = 0$ dem gerade betrachteten Endpunkte der Bahn, $\tau = t$ dem Anfangspunkte entspricht) jetzt für das erweiterte Intervall von $\tau = 0$ bis $\tau = t + t_0$ in Betracht kommt. Die Bestimmung von t_0 ist für Unter- und Überlichtgeschwindigkeit naturgemäß eine verschiedene.

Wir setzen zunächst wieder Unterlichtgeschwindigkeit voraus (also $T < c\tau$). Sei $T_0 = (T)_{\tau=t}$, so bedeutet T_0 die Entfernung des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit t von seiner Anfangslage. Die Wirkung der Anfangslage auf das Elektron hört offenbar auf, wenn dasselbe von der Kugel, welche mit dem Radius $c\,t$ um den am weitesten entfernten Punkt der anfänglichen Lage der Kugel geschlagen werden kann, überholt wird, d. h. wenn das Elektron diese Kugel mit dem Radius $c\,t$ von innen berührt; dadurch ist die Zeit $t = -t_0$ bestimmt; dies ergibt die Bedingung:

$$c\,t = T_0 + 2\,a \qquad \text{für } t = t_0,$$

oder:

$$(T_0)_{t=t_0} + 2\,a = c\,t_0. \tag{198}$$

Durch diese Gleichung ist bei Unterlichtgeschwindigkeit die in (197) einzusetzende Größe t_0 bestimmt.

Die Abgrenzung der einzelnen Intervalle ist jetzt ebenfalls zu ändern, denn dieselbe beruht wesentlich darauf, daß die Variable τ an die Bedingung $0 < \tau < t$ gebunden war, während dies Intervall jetzt auf:

$$0 < \tau < t + t_0 \tag{199}$$

erweitert ist. Die sonstigen Überlegungen bleiben indessen ungeändert. Demgemäß bleibt das in § 7 besprochene erste und zweite Intervall ($0 < \tau < t^0$) ungeändert, insoweit die Variable τ in Betracht kommt; die obere Grenze des zweiten ist jetzt durch die Gleichung, welche aus (72ᵃ) hervorgeht, indem man τ durch $t + t_0$ ersetzt, d. h. durch:

$$(c\,\tau + T)_{\tau=t+t_0} = 2\,a \tag{200}$$

definiert. Die Größe τ^0 bleibt aber untere Grenze der Integrale Φ_{2x} und Ψ_{2x}; indessen ist die obere Grenze des zweiten Intervalls nicht mehr durch (77) gegeben; es behält nämlich die Kurve (73[b]) ihre Bedeutung, aber die Grenze der Anwendbarkeit ist nicht mehr durch die Bedingung $\tau = t$, sondern durch die Bedingung $\tau = t + t_0$ gegeben, so daß (77) durch die Gleichung:

$$c\,(t + t_0) = (T)_{\tau = t + t_0} + 2\,a \tag{201}$$

zu ersetzen ist. Bei der im Anschlusse an die Figuren 6 und 7 angestellten geometrischen Diskussion ist also die Gerade $\tau = t$ durch die Gerade:

$$\tau = t + t_0 \tag{202}$$

zu ersetzen, um dem jetzt vorausgesetzten Anfangszustande gerecht zu werden; im übrigen bleibt dieselbe unverändert anwendbar.

Wir nehmen als Beispiel wieder die geradlinige Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit. Hier war $T = v\,\tau$ (vgl. § 12); somit erhalten wir aus (198):

$$t_0 = + \frac{2\,a}{c - v}. \tag{203}$$

Die Gleichung (200) gibt infolgedessen für die obere Grenze des ersten Intervalls den Wert:

$$t = t_0 - t^0 = \frac{2\,a}{c + v} - \frac{2\,a}{c - v} = - \frac{a}{c} \frac{4}{1 - \omega^2}, \tag{204}$$

und die Gleichung (164) für die wirkende Kraft im ersten Intervalle würde ergeben:

$$\mathfrak{F}_x = - \frac{3\,\varepsilon^2\,\omega}{4\,\pi\,a^2} \left(\frac{ct}{a} - \frac{4}{1 - \omega^2}\right) \left[1 - \frac{5}{4} \frac{c}{a} \left(\frac{ct}{a} - \frac{4}{1 - \omega^2}\right) + \frac{1}{16} \left(3 + \frac{7}{2}\,\omega^2\right) \left(\frac{ct}{a} - \frac{4}{1 - \omega^2}\right)^3\right]. \tag{205}$$

Da aber die obere Grenze des zugehörigen Intervalles nach (204) negativ ist, das Intervall selbst also ganz im Negativen liegt, so hat diese Gleichung für uns keine Bedeutung; denn ihrer Ableitung nach stellt sie die Kraft nur nach dem Beginne der Bewegung (d. h. für $0 < v < c$) dar; für $t < 0$ wäre auch $\omega = 0$ zu setzen, und dann resultiert in der Tat der richtige Wert $\mathfrak{F}_x = 0$: die Kraft der elektrischen Vollkugel auf sich selbst.

Die Gleichung (201) liefert jetzt für die früher benutzte Größe $\tau' = t'$ (obere Grenze des zweiten Intervalles) die Relation:

$$c\,(\tau' + t_0) = v\,(\tau' + t_0) + 2\,a \quad \text{oder} \quad t' = \frac{2\,a}{c - v} - t_0 = 0. \tag{206}$$

Auch dieses Intervall liegt also ganz im Negativen und kommt nicht in Betracht, so daß die Gleichung (168) hier zu keiner entsprechenden Gleichung führt. Die Bewegung beginnt also im vierten Intervalle, für welches die Gleichung (169) aufgestellt wurde, d. i. die Gleichung der stationären Kraft. Die Gleichung (169) für den Wert $\mathfrak{F}_x$ der

Kraft im stationären Zustande gilt also jetzt ebenso wie früher; dieser Zustand tritt aber schon bei Beginn der Bewegung ein.

Bei Überlichtgeschwindigkeit befindet sich das Elektron nach einer gewissen Zeit t_0^* dauernd im elektrischen Felde, das von ihm selbst in seiner Ruhelage erzeugt wurde; diese Zeit t_0^* wird wieder durch den Moment bestimmt, wo die Kugel mit dem Radius $c\,t_0^*$, welche den vom Elektron entferntesten Punkt der Ruhelage zum Mittelpunkt hat, mit dem Elektron eine Berührung (aber jetzt von außen) eingeht, d. h. durch die zu (198) analoge Gleichung:

(207) $$(T_0)_{t=t_0^*} - 2\,a = c\,t_0^*\,.$$

Dieselbe Überlegung kann man für einen beliebigen Zeitpunkt τ anstellen (von der Zeit t nach rückwärts gerechnet); es bestimmt die Gleichung:

(207[a]) $$(T)_{t=t_0^*} - 2\,a = c\,t_0^*$$

diejenige Zeit t_0^*, während welcher die zur Zeit τ vom Elektron ausgehende Kraftwirkung noch auf die Bewegung des Elektrons von Einfluß ist. Diese Zeit t_0^* ist im Sinne der wachsenden Größe τ gemessen, also vom zur Zeit t (d. h. $\tau = 0$) erreichten Endpunkte nach rückwärts. Setzen wir nun $\tau = t$, d. h. betrachten wir den Anfangspunkt der Bewegung, und ist dann $t = t_0^*$ die kleinste brauchbare Lösung von (207[a]), d. h. von der für $\tau = t$ aus ihr hervorgehenden Gleichung (207), so muß die gesuchte Zeit t_0 durch die Gleichung:

(208) $$t_0 = +\,t_0^*$$

bestimmt werden; denn wir hatten die Anfangszeit mit $-\,t_0$ bezeichnet, so daß t_0 in der gleichen Richtung von t_0^* gemessen wird. Dieser Wert ist für die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit in die obere Grenze des auf der rechten Seite von (197) auftretenden Integrals einzusetzen, um der jetzigen Annahme über den Anfangszustand zu entsprechen.

Die dadurch notwendige Abänderung der früheren Formeln tritt besonders bei Bestimmung der zu berücksichtigenden Intervalle hervor. Zunächst sind die Ungleichungen (132) und (132[a]) bzw. durch die Bedingungen:

$$\tau_1 > t + t_0 \quad \text{und} \quad \tau_1 < t + t_0$$

zu ersetzen; alsdann tritt an Stelle der Gleichung (133) die Gleichung:

(209) $$2\,a = (T + c\,\tau)_{\tau = t + t_0},$$

während die Gleichung (131) und die entsprechende Kurve ihre Bedeutung behalten; der sich hieraus ergebende Wert von t ist aber in Φ_{2x}^* und Ψ_{2xt}^* nicht als untere Grenze einzusetzen, als solche ist vielmehr der frühere Wert τ_1 beizubehalten; es tritt eine allgemeine Verschiebung der Intervallgrenzen gegen die Integralgrenzen ein (wie bei Unterlichtgeschwindigkeit). Die zweite kritische Gleichung, nämlich (142), oder:

$$2\,a = T - c\,\tau$$

definiert wieder τ_3 als Funktion von t; aber die Grenze der Anwendbarkeit ist verschoben und jetzt durch die Gleichung:

$$(210)\qquad 2a = (T - c\tau)_{\tau=t+t_0}, \quad \text{also durch} \quad \tau_3 = t + t_0$$

festgelegt (während früher $\tau_3 = t$ zu setzen war).

Es möge dies wieder durch das Beispiel der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit erläutert werden (vgl. § 13). Die Formel (174) bleibt im ersten Intervalle gültig, wenn man dort t durch $t + t_0$ ersetzt, wobei t_0 gemäß (207) und (208) zu berechnen ist; es ergibt sich:[1])

$$(211)\qquad t_0 = \frac{2a}{v - c}.$$

Für das erste Intervall erhalten wir dann aus (174):

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon^2}{4\pi a^2 \omega^2}\left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1}\right)\left[1 - \frac{1 + 9\omega^2}{8}\left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1}\right) - \frac{5}{16}(1 - \omega^2)\left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1}\right)^2 + \frac{1}{320}(51 + 2\omega^2 + 35\omega^4)\left(\frac{ct}{a} + \frac{2}{\omega - 1}\right)^3\right],$$

und diese Gleichung würde anwendbar sein in dem Intervalle:

$$0 < t + t_0 < \frac{2a}{c + v},$$

oder:

$$-\frac{2a}{c - v} < t < \frac{2a}{c + v} - \frac{2a}{v - c}.$$

Dieses ganze Intervall liegt aber im Negativen; da die Variable τ nur positive Werte annehmen kann ($0 < \tau < t + t_0$), so hat dieses ganze Intervall und die zugehörige letzte Formel für $\mathfrak{F}_x$ für die Bewegung des Elektrons keine Bedeutung mehr. Will man die Formel für $\mathfrak{F}_x$ dennoch anwenden, so muß man bedenken, daß v für negative Werte von t gleich Null ist, wodurch auch $\mathfrak{F}_x$ gleich Null wird. Wir haben demnach sogleich mit dem nächsten Intervalle zu beginnen, für das die Formel (176) abgeleitet wurde, und das nach obigem durch den Wert (177^a) begrenzt wurde. Letzterer ist nach (211) jetzt durch die Gleichung:

$$(t + t_0)(v - c) = 2a,$$

oder:

$$t = \frac{2a}{v - c} - t_0 = 0$$

bestimmt. Auch dieses Intervall hat also keine Bedeutung mehr, und ebenso der zugehörige Wert von $\mathfrak{F}_x$, und wir kommen sofort zum dritten Intervalle; in ihm war die Bewegung stationär und die Kraft $\mathfrak{F}_x$ durch (178) bestimmt. Diese Gleichung ist ebenso wie im Falle der Unterlichtgeschwindigkeit unverändert anwendbar, da ja nur die Intervallgrenzen, nicht die Integralgrenzen gegen früher geändert werden. Bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand ist daher die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit von Anfang an stationär.

---

[1]) Bezeichnet AB einen in Richtung der Bewegung des Elektrons von A nach B gezogenen Durchmesser desselben, so ist t_0 die Zeit, welche die von B ausgehende elektrische Kraft gebraucht, um sich rückwärts bis A fortzupflanzen.

Besonderes Interesse bietet die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ($\omega = 1$, $v = c$). Geht man von der Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit aus, so werden die entsprechenden Formeln (205), (168) und (169) scheinbar unbrauchbar, indem sie unendlich große Werte von $\mathfrak{F}_x$ ergeben. Tatsächlich aber darf keine dieser Formeln für den Fall $\omega = 1$ angewandt werden; denn wir haben gesehen, daß die den Gleichungen (205) und (168) entsprechenden Intervalle jetzt zu negativen Werten der Zeit gehören, also keine Bedeutung haben; die Gleichung (169) aber entspricht dem stationären Zustande, und der ihm zugehörige Wert der Kraft wird gewonnen, indem man in den Ausdruck der Kraft für das zuletzt vorhergehende Intervall die Zeit t (sofern sie in der oberen Grenze des Integrals (197) erscheint, und bei konstanter Geschwindigkeit kommt sie unter dem Integralzeichen nicht vor) durch die obere Grenze dieses vorhergehenden Intervalles ersetzt, also hier durch Null ersetzt. Nun war aber jene Kraft im vorhergehenden Intervalle ($t < 0$) gleich Null; folglich bleibt sie gleich Null im stationären Zustande, d. h. das Integral (197) ist für $v = c$ bei jedem Werte von t gleich Null (indem der Wert von τ, der den stationären Zustand liefert, hier mit der unteren Grenze Null zusammenfällt). Bei unserer jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand der Bewegung (wo das Elektron nach unendlich langer Ruhe die Bewegung plötzlich mit Lichtgeschwindigkeit beginnt) ist die geradlinige gleichförmige Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit „kräftefrei.“ Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man von Überlichtgeschwindigkeit ausgeht, denn auch bei dieser kommt nur das dem stationären Zustande entsprechende Intervall in Betracht, dessen untere Grenze ebenfalls an der Stelle $t = 0$ liegt.

Drittens betrachten wir das in § 14 behandelte Beispiel der gleichmäßig beschleunigten Bewegung unter den jetzigen Voraussetzungen. Die zur Bestimmung von t_0 dienende Gleichung (198) wird hier gemäß (179):

$$\frac{q}{2} t^2 - (c - v) t - 2a = 0;$$

sie hat eine negative und eine positive Wurzel; nur die letztere ist für uns brauchbar, also:

$$t_0 = \frac{c - v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c - v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}. \tag{212}$$

Die frühere Gleichung (180), welche in der t-τ-Ebene das Gebiet der Unterlichtgeschwindigkeit durch die Linie L von dem Gebiete der Überlichtgeschwindigkeit trennte (vgl. Fig. 13), bleibt hier unverändert bestehen. Das erste Intervall ($0 < t < t^0$), für welches Gleichung (181) aufgestellt war, wird hier:

$$0 < t < t^0 - t_0 = -\frac{2c}{q} + \sqrt{\left(\frac{c + v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} - \sqrt{\left(\frac{c - v}{q}\right)^2 - \frac{4a}{q}}. \tag{212a}$$

Die rechte Seite kann positiv oder negativ sein; nehmen wir das letztere an, so kommt das ganze Intervall für uns nicht in Betracht.

Es handelt sich weiter um die Hyperbel (182); jetzt ist aber die Linie $\tau = t$ durch die Gerade $\tau = t + t_0$ zu ersetzen; die Wurzel τ_1 der genannten Gleichung (wie sie in (184c) angegeben wurde) ist nur brauchbar, wenn sie kleiner als $t + t_0$ ausfällt. Wir müssen also die Linie $\tau = t + t_0$ mit der Hyperbel (182) zum Schnitt bringen; das gibt die beiden Wurzeln:

$$t_1^* = -\left(t_0 - \frac{c-v}{q}\right) - \sqrt{\left(t_0 - \frac{c-v}{q}\right)^2 + 2\frac{c-v}{q}t_0 - \frac{4a}{q}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} - \sqrt{\frac{c-v}{q}\left[3\frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}\right]}$$

und:

$$(213) \qquad t_4^* = -\sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}} + \sqrt{\frac{c-v}{q}\left[3\frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}}\right]},$$

welche an Stelle der früheren Größen t_1 und t_4 treten; diese Wurzeln sind immer reell; die erste aber ist negativ und kommt nicht in Betracht; die zweite ist positiv und größer als $t_2 \left(= \frac{c-v}{q}\right)$, auch größer als $t_3 \left(= \frac{a}{2c} + \frac{c-v}{q}\right)$.

Der früher mit a) bezeichnete Fall, in dem t_1 und t_4 imaginär waren, scheidet hier ganz aus; es kommt nur die Möglichkeit b), bzw. ihr jetziges Analogon, in Betracht; wir erhalten also nach (184^b):

$$(214) \qquad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau_1, t)\right] \quad \text{für } 0 < t < t_2,$$

wobei τ_1 wieder durch (184^c) definiert ist.

Für $t > t_2$ geschieht die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit; hierdurch ist die obere Grenze des zuletzt betrachteten Intervalles festgelegt; diese Grenze ist unabhängig von t_0. Das nächste Intervall erstreckt sich von t_2 bis t_3 und wir erhalten, analog zu (188^a):

$$(215) \qquad \begin{aligned} \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \left[\Phi_1\left(\frac{a}{c}, t\right) - \Phi_1(\tau^*, t)\right] + \frac{1}{c}\left[\Psi_1\left(\frac{a}{c}, t\right) - \Psi_1(\tau^*, t)\right] \\ &+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau_1, t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3. \end{aligned}$$

Man macht sich die Abgrenzung der einzelnen Intervalle wieder durch nebenstehende Figur 16 leicht klar (eine analoge Zeichnung hätte auch für den obigen Fall der gleichförmigen Bewegung mit Vorteil benutzt werden können).

Das nächste Intervall erstreckt sich von t_3 bis t_5, wo t_5 wieder die vertikale Tangente der Hyperbel H_3 bestimmt und durch (190^a) gegeben ist; t_4^* ist hier stets größer als t_5, kommt also noch nicht in Betracht.

$$(216) \qquad \begin{aligned} \frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(\tau^*, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau^*, t) \\ &+ \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau_1, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_5. \end{aligned}$$

Da t_4^* zwischen $t_5 = t_5^*$ und t_6^* liegt, so erhalten wir im nächsten Intervalle, indem nun auch die Hyperbel H_3 in Betracht kommt:

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\
& + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \\
& + [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
& + [\Phi_2(\tau_1, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2(\tau_1, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \quad \text{für } t_5 < t < t_4^*.
\end{aligned}
\tag{217}
$$

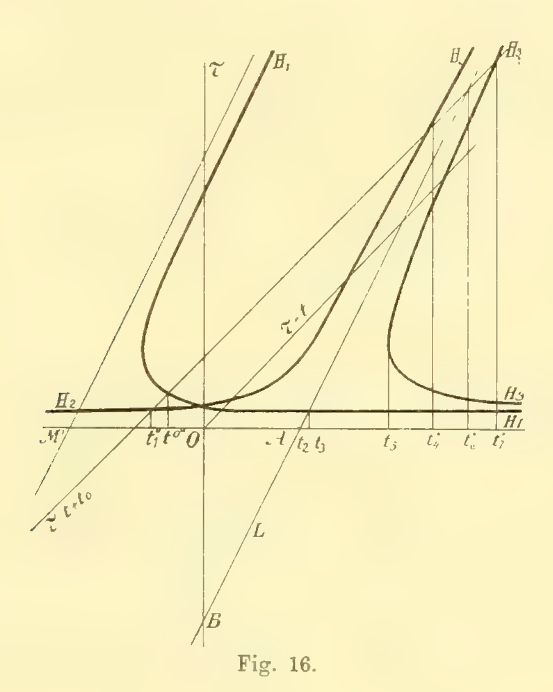


Fig. 16.

An der Stelle t_4^* wird die Hyperbel H_3 von der Linie $\tau = t + t_0$ geschnitten, so daß jetzt der Hyperbelzweig durch diese Linie zu ersetzen ist; wir erhalten demnach:

$$
\begin{aligned}
-\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\
& + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \\
& + [\Phi_2^*(\tau^*, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(\tau^*, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \\
& + [\Phi_2(t + t_0, t) - \Phi_2(\tau^*, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2(t + t_0, t) - \Psi_2(\tau^*, t)] \\
& \text{für } t_4 < t < t_6^*;
\end{aligned}
\tag{218}
$$

dabei bestimmt t_6^* den Schnittpunkt der Linie L, die durch (180) gegeben war, mit der Linie $\tau = t + t_0$; es ist also:

$$t_6^* = 2\frac{c - v}{q} + t_0.$$

Endlich bezeichne t_7^* den Schnittpunkt der durch (189) dargestellten Hyperbel H_3 mit der Geraden $\tau = t + t_0$; dann wird:

$$\begin{aligned}(219)\qquad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \\ &+ [\Phi_2^*(t + t_0, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t)] + \frac{1}{c}[\Psi_2^*(t + t_0, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)] \quad \text{für } t_6^* < t < t_7^*.\end{aligned}$$

Hier sind die Glieder, welche von Φ und Ψ, also von der anfänglichen Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit herrühren, verschwunden; der Einfluß des anfänglichen Ruhezustandes macht sich aber noch in den Argumenten geltend, indem $t + t_0$ an Stelle von t getreten ist. Wächst endlich t noch weiter, so wird:

$$\begin{aligned}(220)\qquad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) \\ &+ \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \qquad \text{für } t > t_7^*.\end{aligned}$$

Auch bei der jetzigen Annahme über den Anfangszustand macht hiernach der Übergang von Unter- zu Überlichtgeschwindigkeit durchaus keine Schwierigkeit; er vollzieht sich vielmehr vollständig stetig; der nahezu stationäre Zustand, wie er durch (220), bzw. oben (194^d), gegeben wird, stellt sich nur erst nach längerer Zeit her (denn es ist $t_7^* > t_7$). Ein Unterschied macht sich ferner darin geltend, daß jetzt schon für $t = 0$, gemäß (214), sich eine endliche Kraft ergibt, während bei der früheren Annahme, d. i. nach (182), diese Kraft für $t = 0$ gleich Null war.

§ 16. Vergleichung mit anderen Bearbeitungen der behandelten Probleme.

Im Laufe der Untersuchung ist wiederholt hervorgehoben worden, daß unsere Resultate mit den von anderer Seite erhaltenen nicht übereinstimmen. Es ist daher notwendig, die Gründe dieser Divergenz klarzulegen.

Von Lorentz, Searle und Abraham wurde die Bewegung eines Elektrons mit konstanter Geschwindigkeit behandelt, besonders von letzterem auf Grund seiner allgemeinen Formeln zur Dynamik des Elektrons, und zwar unter der Annahme, daß diese Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit schon unendlich lange Zeit angehalten habe, so daß sich ein stationärer Zustand herausgebildet hat, d. h. ein Zustand, der für einen mit dem Elektron fest verbundenen Punkt von der Zeit unabhängig geworden ist. Es ist dann (bei gleichförmiger Bewegung, nach unendlich langer Zeit) in jedem Momente die Vorgeschichte des Problems dieselbe; mithin ist das Feld des skalaren Potentials φ und des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$, bezogen auf ein translatorisch mitbewegtes Achsenkreuz, konstant. Wir haben zu untersuchen, inwieweit dieser Schluß mit unseren Formeln übereinstimmt.

Für den Fall der Translation mit konstanter Geschwindigkeit v, geht unsere Differentialgleichung (6), die auf das im Elektron feste Koordinatensystem bezogen ist, in die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = c^2 \varrho$$

über. Für den stationären Zustand $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \right)$ wird also:

$$(221) \qquad (1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = - \varrho.$$

d. h. in der Tat dieselbe Gleichung, welche Abraham zu Grunde legt. Durch die Transformation:

$$(222) \qquad x' \sqrt{1 - \omega^2} = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

wird dieselbe:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = - \varrho,$$

d. h. die gewöhnliche Poisson-Laplacesche Gleichung für das elektrostatische Potential. Jene Transformation führt aber die Kugel des Elektrons in ein verlängertes Rotationsellipsoid über (wenn $\omega < 1$, also bei Unterlichtgeschwindigkeit):

$$x'^2 (1 - \omega^2) + y'^2 + z'^2 = a^2.$$

Es ist also φ das elektrostatische Potential eines Rotationsellipsoides in Variablen x', y', z'. Ebenso lassen sich die Gleichungen für $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ transformieren; wir erhalten aus (2):

$$(1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = \varrho \, \omega,$$

$$(1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial z^2} = 0,$$

$$(1 - \omega^2) \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2} = 0,$$

so daß $\mathfrak{A}_x = \omega \cdot \varphi$ wird, während $\mathfrak{A}_y$ und $\mathfrak{A}_z$ in den Ausdrücken für die Kraftkomponenten bzw. mit $\mathfrak{v}_y (= 0)$ und $\mathfrak{v}_z (= 0)$ multipliziert erscheinen und ganz herausfallen.

Die Komponenten der wirkenden Kraft werden dann nach (113):

$$f_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} = - (1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \sqrt{1 - \omega^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x'},$$

$$(222^a) \qquad f_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = - (1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - (1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y'},$$

$$f_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{v}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} = - (1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - (1 - \omega^2) \frac{\partial \varphi}{\partial z'}.$$

Die auf das Elektron wirkenden Kraftkomponenten werden durch Integration über das Innere desselben gewonnen; sie sind nach (114), wenn ϱ im Innern konstant ist:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2)\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2)\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x'}\,dx'\,dy'\,dz', \\
\text{(223)}\quad \mathfrak{F}_y &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2)\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2)\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial y'}\,dx'\,dy'\,dz', \\
\mathfrak{F}_z &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2)\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}(1-\omega^2)\iiint \frac{\partial \varphi}{\partial z'}\,dx'\,dy'\,dz'.
\end{aligned}
$$

Die Integrationen nach x', y', z' beziehen sich auf das Innere des Rotationsellipsoids, welches aus dem kugelförmigen Elektron durch die Transformation (222) entsteht. Diese Integrale sind bekanntlich gleich Null, da die Kraft, die das Ellipsoid auf sich selbst ausübt, verschwindet, und so ergibt sich scheinbar das von den genannten Forschern erhaltene Resultat, daß die stationäre Bewegung eines Elektrons „kräftefrei" sei. Trotzdem sind diese Schlüsse nicht einwurfsfrei.

Zunächst könnte man zweifeln, ob die Annahme, daß das Potential φ nach unendlich langer Zeit von t unabhängig werde, d. h. daß sich $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = \infty$ der Grenze Null und φ einer bestimmten endlichen Grenze nähere, berechtigt ist. Dieses Verhalten von φ ist aber in der Tat eine Folge unserer allgemeinen Formeln. Bei gleichförmiger Bewegung ist nämlich $\xi = v\tau$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, folglich:

$$R^2 = (x + v\tau)^2 + y^2 + z^2,$$

und wenn man diesen Wert von R in die Gleichung (53[b]) einsetzt, so wird die rechte Seite der letzteren in der Tat unabhängig von t, indem die Grenzen τ', τ'', τ''', τ^{IV} bzw. durch die Gleichungen:

$$R = a - c\tau, \quad R = a + c\tau \quad (c\tau < a); \quad R = c\tau - a, \quad R = a + c\tau \quad (c\tau > a),$$

als Funktionen von x, y, z definiert werden. Es wird also φ schon für endliche Werte von t stationär, um so mehr für unendlich große Werte von t, wie vorausgesetzt wurde; dasselbe gilt für das Vektorpotential $\mathfrak{A}$. Der in (53[b]) gegebene Ausdruck φ ist übrigens für den Fall der gleichförmigen Bewegung auf elementare Funktionen zurückführbar, indem sich die Integrationen ausführen lassen; er muß eine von der gewöhnlichen abweichende Form für das elektrostatische Potential des Ellipsoids darstellen, wenn man in ihm die Transformation (222) ausführt.

Die Schwierigkeit liegt demnach an einer andern Stelle. Wenn man den stationären Zustand der Bewegung beurteilen will, so kommt es nicht so sehr auf den Grenzwert des Potentials für $t = \infty$, sondern auf den Grenzwert der Kraft an. Die Formeln (223) entstehen, wenn man, ausgehend von den Gleichungen (113) und (114) den folgenden Grenzprozeß macht:

$$\text{(224)}\qquad \lim \mathfrak{F}_x = -\iiint \lim_{t=\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{v}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right] dx\,dy\,dz,$$

und die Integration rechts über das ganze Volumen des Elektrons ausdehnt. Zur Darstellung des stationären Zustandes benötigt man aber den Grenzwert:

$$\text{(225)}\qquad \lim_{t=\infty} \mathfrak{F}_x = -\lim_{t=\infty} \iiint \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{v}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}\right] dx\,dy\,dz;$$

und dabei ist die Integration rechts nicht über das ganze Volumen auszudehnen, sondern nur über den Teil, welcher zwischen den Kugeln mit den Radien $R - c\tau$ und $R + c\tau$ sich befindet, wie in § 7 und 8 näher ausgeführt wurde, wenigstens für $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, während für $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}$ noch andere Gebiete im Innern in Betracht kommen, nicht aber das ganze Volumen der Kugel. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Integration nach τ zuletzt, die Integration über das Volumen zuerst ausgeführt werde; eine solche Vertauschung der Integrationsordnung ist ja bei endlichen Grenzen und endlichen Funktionen stets erlaubt (und in obigen Rechnungen durchgeführt). Auf der rechten Seite von (225) hängen also die Grenzen des Volumintegrals (nach der Vertauschung) von τ, und somit auch von t ab, woraus hervorgeht, daß eine Identität der beiden Grenzprozesse (224) und (225) nicht zu erwarten ist; in der Tat ist ja schon in einem einfachen Beispiele:

$$\int_0^a \lim_{t=\infty} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 0 \quad \text{dagegen} \quad \lim_{t=\infty} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \infty .$$

Für die Lösung des physikalischen Problems, das uns beschäftigt, kommt es aber auf den zweiten, durch (225) gekennzeichneten Grenzübergang ausschließlich an; diesen haben wir in unseren Entwicklungen durchgeführt; die letzteren geben daher die einzig brauchbare Lösung der Aufgabe. Sie lautete dahin (vgl. § 12 und § 15), daß bei geradliniger Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit nach einer gewissen endlichen Zeit die Kraft stationär (aber nicht gleich Null) wird.

Daß andauernd eine Kraft nötig ist, um die konstante Geschwindigkeit aufrecht zu erhalten, kann man auch durch folgende Überlegung einsehen. Es sei AB ein Durchmesser des Elektrons, der von A nach B in Richtung der Bewegung weist. Von B und von der Umgebung des Punktes B gehen in jedem Momente elektrische Wirkungen aus, und zwar auch rückwärts in Richtung auf den Punkt A und dessen Umgebung. Diese Kräfte muß das Elektron in jedem Momente überwinden, und nur in der Ruhe werden sie durch die entgegengesetzt wirkenden Kräfte aufgehoben. Daran wird nichts geändert, wie lange auch die Bewegung gedauert hat; auch nach unendlich langer Zeit wird daher eine Kraft aufzuwenden sein, und die Zeit, während welcher diese von jedem Momente ab wirkt, ist gleich der Zeit, welche die elektrische Kraft braucht, um sich rückwärts von B nach A mit der Geschwindigkeit c fortzupflanzen, also (da das Elektron sich mit der Geschwindigkeit v in entgegengesetzter Richtung bewegt) gleich $\frac{2a}{c-v}$. So wird es verständlich, daß die benötigte Kraft durch ein zwischen den Grenzen 0 und $\frac{2a}{c-v}$ genommenes Integral dargestellt wird, dessen Variable τ die Zeit von der augenblicklichen (d. h. zur Zeit t erreichten) Lage des Elektrons nach rückwärts mißt.

Andererseits beruht die Lorenz-Abrahamsche Lösung des Problems der Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit sicher auf einer unter der Annahme $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ zulässigen Lösung der zu Grunde liegenden partiellen Differentialgleichung; daß dieselbe trotzdem

im vorliegenden Falle nicht anwendbar ist, erkennt man ohne Hilfe der obigen ausführlichen Rechnungen durch folgende Überlegung. Wenn man ein mit dem Elektron fest verbundenes Koordinatensystem eingeführt hat, so denkt man sich selbst mit diesem Systeme (und mit dem Elektron) in starrer Verbindung; das Elektron wird also als ruhend betrachtet, während der ganze Raum sich mit der Geschwindigkeit $-v$ vom Elektron fortbewegt. Die Formel (221) Abrahams ist anwendbar auf alle Punkte bzw. Körper, die sich mit dem Elektron ebenfalls in starrer Verbindung befinden. Das hier zu behandelnde Problem verlangt aber, die Wirkung des Elektrons auf seine früheren Lagen (bzw. die Wirkung der letzteren auf das Elektron) zu berechnen; die früheren Lagen sind aber mit dem Raume, nicht mit dem Elektron starr verbunden; man hat also die Wirkung des letztern auf diese früheren Lagen, d. h. auf kongruente Elektronen zu berechnen die sich mit der Geschwindigkeit $-v$ vom Elektron fort (also nach rückwärts) bewegen und diese früheren Lagen markieren. In den Gleichungen (223) ist also nicht über das Innere des (jetzt ruhend gedachten) Rotationsellipsoides zu integrieren, sondern über das Innere anderer Ellipsoide, die sich vom gegebenen aus nach rückwärts bewegen; und dann kommt auch die Zeit in die Resultate hinein, und man erkennt, daß es auf die Variable τ ankommt, welche oben eingeführt wurde und die Zeit vom (ruhenden) Elektron aus nach rückwärts mißt. Zur weiteren Durchführung der Integration hätte man die verschiedenen Lagen genau so studieren müssen, wie wir es getan haben, und es wird kaum möglich sein, hier wesentliche Vereinfachungen zu erzielen.

Allerdings war Sommerfeld[1]) durch seine Bearbeitung des allgemeinen Problems der Elektronenbewegung auch zu dem Resultate gekommen, daß die gleichförmige Bewegung des Elektrons mit Unterlichtgeschwindigkeit kräftefrei sei; aber die dahin führenden mathematischen Entwicklungen unterliegen gewissen Bedenken, die hier dargelegt werden mögen. Sommerfeld hat den allgemeinen Ansatz gegeben, der die Lösung des Problems ermöglicht; wir haben uns ihm in den ersten Paragraphen (§ 1 bis 3), wie dort schon hervorgehoben wurde, ziemlich enge angeschlossen. Der Unterschied beginnt bei der Gleichung (25) bez. (27); dort kommt die Anfangszeit t_0 vor, die wir der Einfachheit halber an die Stelle $t=0$ legten; Sommerfeld nimmt dagegen $t_0=-\infty$, so daß die obere Grenze $t-t_0$ durch ∞ ersetzt wird, und ebenso alle folgenden Integrationen nach τ von $\tau=0$ bis $\tau=\infty$, statt von $\tau=0$ bis $\tau=t$ ausgeführt werden. Er begründet die Annahme $t_0=-\infty$ damit, daß im Laufe der Entwicklung die unendliche Grenze doch wieder durch eine endliche Grenze ersetzt wird (wie auch wir es fanden, vgl. Gleichung (79), (118^b) und viele andere, insbesondere den stationären Zustand in § 12, 13 und 15); das ist allerdings richtig, aber diese endliche Grenze ist dann im allgemeinen eine Funktion von t (Wurzel der Gleichung (78) oder (133) bzw. (142)); dasselbe gilt für die Potentiale $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$; bei Berechnung der Kraft werden die letzteren gemäß den Formeln (113) nach der Zeit t differenziert; da nun $\mathfrak{A}_x$ bei uns durch das Integral (85) dargestellt war, in dessen oberer Grenze die Zeit (später eine Funktion der Zeit) vorkommt, so entstehen durch Differentiation nach der oberen Grenze Glieder, die fortfallen, wenn man diese Grenze konstant (nämlich gleich ∞) gesetzt hat; diese Glieder sind von uns in § 7 bzw. § 11 berücksichtigt. Überdies aber gab gerade das Auftreten der Veränderlichen in der oberen Grenze uns die

[1]) Göttinger Nachrichten, a. a. O., Jahrgang 1904.

Veranlassung, die verschiedenen Fälle zu unterscheiden, die z. B. in § 7 (d. h. für Unterlichtgeschwindigkeit) eingehend diskutiert sind; die Unterscheidung dieser Fälle brachte es mit sich, daß im ersten Intervalle $0 < t < \frac{a}{c}$ eine Funktion unter dem Integralzeichen auftritt, die für $\tau = 0$ nicht unendlich wird, während die einzelnen Sommerfeldschen Integrale für $\tau = \infty$ unendlich groß werden, und dieses Unendlichwerden erst in der Schlußformel wieder herausfällt.

Nur bei gleichförmiger Bewegung tritt im stationären Zustande (der der Annahme $t_0 = -\infty$ entsprechen würde) eine konstante obere Grenze in den Integralen für φ_x und $\mathfrak{A}_x$ auf (vgl. § 12); diesen Fall der geradlinigen stationären Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit müßten daher die Sommerfeldschen Formeln richtig darstellen. Aber auch hier sind die Resultate dadurch entstellt, daß das bei Ausführung der Volumintegrationen angewandte Verfahren nicht einwandfrei ist.

Es handelte sich in § 7 um Ausführung des Integrals:

$$K = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx\,dy\,dz = \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \int_0^t d\tau \iiint \frac{\partial\left(\frac{S}{R}\right)}{\partial x} dx\,dy\,dz,$$

wo nach (34^a):

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3} \sin c s \tau \cdot \sin R s \cdot ds. \tag{226}$$

Da x, y, z nur in R, d. h. in der Verbindung $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ vorkommen, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{S}{R}\right).$$

Dem entsprechend setzt Sommerfeld, bei dem (wie schon erwähnt) die obere Grenze t des nach τ genommenen Integrals durch ∞ ersetzt wird, jenes Integral gleich:

$$\frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} dx\,dy\,dz = K'.$$

Dabei ist das dreifache Integral wieder über das ganze Innere des Elektrons zu erstrecken; nun hat aber die Funktion S die Eigenschaft, in einem Teile dieses Innern zu verschwinden, und nur im andern Teile (dessen genauere Begrenzung von T abhängt, wie aus obigen Entwicklungen in § 4 hervorgeht, wie wir auch sogleich noch sehen werden) von Null verschieden ist; es bezeichne $d'\omega$ das Volumelement in demjenigen Teile, wo S von Null verschieden ist; dann würde:

$$K' = \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi} \iiint \frac{S}{R} d'\omega;$$

und wenn wir mit ∂' die Differentiation nach ξ, in den Grenzen des Raumintegrals bezeichnen:

$$K' = \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3} \int_0^\infty \left[\frac{\partial'}{\partial' \xi} \iiint \frac{S}{R} d'\omega + \iiint \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{S}{R}\right) d'\omega\right] d\tau.$$

Da aber $\frac{\partial S}{\partial \xi}$ in demselben Gebiete verschwindet, in welchem S gleich Null ist, so ist andererseits:

$$K = \frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3}\int_0^t d\tau \iiint \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{S}{R}\right) d'\omega,$$

und so ist es evident, daß die Integrale K und K' sich wesentlich voneinander unterscheiden. Was die Abhängigkeit der genaueren Begrenzung von T (und somit von ξ, η, ζ) angeht, so sei z. B. auf obige Gleichung (74) verwiesen, wo Θ_1 durch (73[a]) als Funktion von T und τ definiert ist; ebenso ist es bei Sommerfeld, in dessen Gleichungen (19) die Werte von S für die verschiedenen Intervalle als Funktionen von R angegeben sind; bei der Integration nach R kommen so auch bei ihm unter Berücksichtigung dieser Intervalle Funktionen von T in die Grenzen des dreifachen Integrals. Trotzdem kann allerdings unter besonderen Verhältnissen eine Identität beider Operationen eintreten.

Es ist leicht, diese allgemeinen Überlegungen durch ein Beispiel zu erläutern, das alle wesentlichen Momente der vorstehenden Erörterungen deutlich hervortreten läßt, aber sehr viel einfacher ist. Wir betrachten das Integral:

$$L = \int_0^a dx \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(x + a\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \operatorname{cosin} x s}{s} ds\right],$$

wo $0 < \xi < a$ sei. Das nach s genommene Integral ist der Dirichletsche Diskontinuitätsfaktor, also:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \operatorname{cosin} x s}{s} ds = \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } x < \xi,$$
$$= 0 \qquad \text{,, } x > \xi.$$

Folglich wird:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(x + a\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \operatorname{cosin} x s}{s} ds = a\frac{\pi}{2} \qquad \text{für } x < \xi,$$
$$= 0 \qquad \text{,, } x > \xi,$$

und:

$$L = \frac{\pi}{2} a \int_0^\xi dx = \frac{\pi}{2}\xi a.$$

Damit vergleichen wir das Integral:

$$L' = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^a \left[(x + a\xi)\int_0^\infty \frac{\sin \xi s \cdot \operatorname{cosin} x s}{s} ds\right] dx.$$

Dasselbe ist:

$$L' = \frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^\xi (x + a\xi)\frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2}(1 + a)\xi + \int_0^\xi \frac{\pi}{2} a\, dx = (1 + 2a)\frac{\pi}{2}\xi.$$

Es entstehen also in der Tat ganz verschiedene Werte bei verschiedener Anordnung der Operation des Differenzierens und des Integrierens. Nur für $a = -1$ geben beide Integrale denselben Wert $-\frac{\pi}{2}\xi$.

Fassen wir die Sommerfeldschen Formeln zusammen, bevor die betreffenden Integrale ausgewertet sind, so läßt sich sein Ausdruck für die Kraftkomponente $\mathfrak{F}_x$ in der folgenden Form schreiben:

$$-\frac{9\,\varepsilon^2 c}{8\,\pi^3 a^4}\Bigg[\int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \xi}\iiint\left(1-\frac{1}{c^2}\,S\,\mathfrak{v}_x(t)\,\mathfrak{v}_x(t-\tau)\right)\cdot\left(\frac{S}{R}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,d\tau\iiint\frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\Bigg].$$

wobei unter S wieder das obige Integral (226) verstanden werde. Zufolge der von uns erlangten Resultate würde dagegen die entsprechende Formel lauten:

$$(227)\quad \mathfrak{F}_x = -\frac{9\,\varepsilon^2 c}{8\,\pi^3 a^4}\Bigg[\int_0^t d\tau\iiint\left(1-\frac{1}{c^2}\,S\,\mathfrak{v}_x(t)\,\mathfrak{v}_x(t-\tau)\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{S}{R}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+\frac{1}{c}\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\frac{S}{R}\,d\tau\right\}dx\,dy\,dz\Bigg],$$

und hierin treten die von uns besprochenen Unterschiede deutlich hervor (Wahl der oberen Grenze für das Integral nach τ und Vertauschung verschiedener Integrationen und Differentiationen). Allerdings haben wir die Kraft $\mathfrak{F}_x$ oben nicht in dieser Form gegeben, teils weil wir die einzelnen Bestandteile gesondert auswerteten, teils weil wir das Glied $S\,\mathfrak{v}_x(t)\,\mathfrak{v}_x(t-\tau)$ im ersten Gliede der rechten Seite von (227) zuvor mittelst der Relation (95) fortschafften, so daß sich das Resultat auf Grund der Gleichungen (94), (114) und (116) in der einfacheren Form darbot:

$$(228)\quad \mathfrak{F}_x = -\frac{9\,\varepsilon^2 c}{8\,\pi^3 a^4}\Bigg[\int_0^t d\tau\iiint\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{S}{R}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+\frac{1}{c}\iiint dx\,dy\,dz\int_0^t \mathfrak{v}_x(t-\tau)\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)\frac{d\tau}{R}\Bigg].$$

Wir hatten ferner weitere Vereinfachungen erzielt, indem wir in § 7 auf Grund der Gleichung (55) das erste Integral der rechten Seite auf die folgende Form brachten:

$$(228^a)\quad \int_0^t d\tau\iiint\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S}{R}\right)dx\,dy\,dz = -\int_0^t d\tau\iint\frac{S}{R}\operatorname{cosin}(n,r)\,d\sigma$$
$$= -\iint d\sigma\int_0^t\frac{S}{R}\operatorname{cosin}(n,r)\,d\tau,$$

wobei n die innere Normale der Kugel des Elektrons und $d\sigma$ das Oberflächenelement desselben bezeichnete. Durch diese Umformungen wird der direkte Vergleich unserer Formeln mit den bisherigen erschwert, weshalb obige Zusammenfassung in der Form (227) nützlich sein dürfte.

Sommerfeld sucht die notwendige (und von uns durchgeführte) Diskussion der einzelnen Fälle durch ein anderes Integrationsverfahren zu umgehen; nachdem das Integral von $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ durch den angegebenen (nicht zulässigen) Ansatz auf den Differentialquotienten des Integrals:

$$P = \int_0^t d\tau \iiint \frac{S}{R}\, dx\, dy\, dz = \int_0^t d\tau \iiint \chi\, dx\, dy\, dz$$

nach ξ zurückgeführt ist, kommt es noch auf Behandlung dieses letzteren Integrals an (nur daß bei Sommerfeld als obere Grenze nicht t, sondern ∞ steht). Setzt man zur Abkürzung:

$$u = \frac{\sin R s}{R},$$

so ist:

$$\chi = \int_0^\infty u \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2} \sin c s \tau \cdot ds.$$

Es genügt u bekanntlich der partiellen Gleichung:

$$\Delta^2 u + s^2 \cdot u = 0; \tag{229}$$

es ist also:

$$\iiint u\, dx\, dy\, dz = -\frac{1}{s^2} \iiint \Delta^2 u\, dx\, dy\, dz = -\frac{1}{s^2} \iint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ das Oberflächenelement des Elektrons bezeichnet. Nun ist bekanntlich:[1])

$$\iint \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -4\pi \frac{\sin T s}{T} \cdot \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s}, \tag{230}$$

und folglich wird:

$$\iiint \chi\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{T} \int_0^\infty \left(\frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2}\right)^2 \sin c s \tau \cdot \sin T s \cdot \frac{ds}{s^2}.$$

Die Auswertung des obigen Integrals P ist also auf die Berechnung des Integrals Q zurückgeführt, wo:

$$Q = \int_0^\infty \left(\frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2}\right)^2 \sin c s \tau \cdot \sin T s \cdot \frac{ds}{s^2}.$$

Diese Berechnung kann in analoger Weise geschehen, wie die Berechnung anderer Integrale oben in § 4: die Sonderung der verschiedenen Fälle wird dann nachträglich bei

[1]) Vgl. Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig 1891, Seite 217.

Ausführung dieser Integration notwendig, während sie bei unserem obigen Verfahren vorher geschah. Dieses von Sommerfeld für das Integral Q eingeschlagene Verfahren wäre übrigens für uns auch anwendbar gewesen; allerdings kommt es, wie schon gesagt, nicht auf das Integral P an, sondern auf dasjenige Integral, welches aus P entsteht, wenn man u durch $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ ersetzt. Die obige Hülfsformel (230) gilt allgemein für jede Funktion u, welche der Differentialgleichung (229) genügt; da nun auch:

$$\varDelta^2 \frac{\partial u}{\partial x} + s^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ist, so wird nach (230):

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial x} \, dx\, dy\, dz = -\frac{1}{s^2} \iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) d\sigma = 4\pi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sin Ts}{T}\right) \cdot \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3}.$$

Wir hätten also nach der Methode von § 7 das Integral:

$$4\pi \int_0^\infty \left(\frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^2}\right)^2 \cdot \frac{\sin c s \tau}{s^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sin s T}{T}\right) \cdot ds \tag{231}$$

auszuwerten gehabt, um dann nachträglich die Diskussion der verschiedenen Fälle durchzuführen, wie sie auf anderem Wege oben in § 7 gegeben wurde. Es dürfte allerdings kaum eine wesentliche Vereinfachung dadurch erzielt werden; überdies läßt sich gegen dies Verfahren noch ein Einwand erheben. Dasselbe setzt nämlich voraus, daß die Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞ noch mit der dreifachen Integration über das Volumen des Elektrons vertauscht wird; ob aber diese Vertauschung gestattet ist, bedarf erst der Untersuchung; ohne weiteres würde sie gestattet sein, wenn in dem Integrale (231) unter dem Integralzeichen die vierte Potenz von s im Nenner stände an Stelle der tatsächlich (durch Differentiation nach ξ) vorkommenden dritten Potenz.

Es muß noch bemerkt werden, daß die Berechnung des von Sommerfeld benutzten Hülfsintegrals Q von ihm nicht korrekt durchgeführt ist. Bezeichnen wir wieder mit S das in § 4 eingehend behandelte Integral:

$$S = \int_0^\infty \frac{\sin a x - a x \operatorname{cosin} a x}{x^3} \sin \beta x \cdot \sin \gamma x \cdot dx,$$

so ist zunächst:

$$Q = \tfrac{1}{2} \int_{c\tau - T}^{c\tau + T} d\gamma \int_0^a S \cdot \beta \cdot d\beta,$$

es kommt also darauf an, das Integral:

$$\Omega = \int_0^a S \cdot \beta \cdot d\beta$$

zu berechnen; dabei sind die Gleichungen (40) bis (42) von § 7 zu Rate zu ziehen.

Lassen wir a von 0 ab allmählich wachsen, so ist zunächst das Intervall $0 < a < \frac{\gamma}{2}$ zu betrachten, in dem während der Integration $0 < \beta < a$ ist; wir haben hier $a < \gamma - \beta$; ersetzen wir also a durch a, so ist $0 < \beta < a < \gamma$ und $\delta_1 = a + \beta - \gamma < 0$, d. h. es kommen die Gleichungen (42) zur Anwendung, nach denen S gleich Null zu nehmen ist. Somit ergibt sich das erste Resultat:

$$\Omega = 0 \quad \text{für} \quad 0 < a < \frac{\gamma}{2}. \tag{232}$$

Im nächsten Intervalle $\frac{\gamma}{2} < a < \gamma$ ist $\frac{\gamma}{2} < \beta < a$, also $\beta < a < \gamma$ und $a > \gamma - \beta$; hier haben wir den Fall IV) von § 4, und zwar ist $\delta_1 > 0$, folglich nach (41):

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_1 &= \frac{\pi}{8}\int_{\frac{\gamma}{2}}^{a} [a^2 - (\beta - \gamma)^2]\,\beta\,d\beta = \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}a^2\beta^2 - \frac{1}{3}\beta(\beta-\gamma)^3 + \frac{1}{12}(\beta-\gamma)^4\right]_{\frac{1}{2}\gamma}^{a} \\ &= \frac{\pi}{8}\left\{\frac{a^4}{4} + \frac{2}{3}a^3\gamma - \frac{5}{8}a^2\gamma^2 + \frac{5}{64}\gamma^4\right\} \quad \text{für } \frac{\gamma}{2} < a < \gamma. \end{aligned} \tag{233}$$

Alsdann möge a den Wert γ überschreiten, aber β während der Integration zunächst kleiner als $a - \gamma$ bleiben; hier ist $a > \beta > \gamma$ und $\delta_4 = a - \beta - \gamma > 0$, also nach (40):

$$S = \frac{\pi}{2}\beta\gamma.$$

Überschreitet dagegen β den Wert $a - \gamma$, so wird $\delta_4 < 0$ und nach (40^b):

$$S = \frac{\pi}{8}[a^2 - (\beta - \gamma)^2],$$

also:

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_2 &= \frac{\pi}{8}\int_{\frac{\gamma}{2}}^{\gamma}[a^2 - (\beta-\gamma)^2]\,\beta\,d\beta + \frac{\pi}{2}\int_{\gamma}^{a-\gamma}\beta^2\gamma\,d\beta + \frac{\pi}{8}\int_{a-\gamma}^{a}[a^2 - (\beta-\gamma)^2]\,\beta\,d\beta \\ &= \frac{\pi}{8}\,\frac{67}{192}\gamma^4 + \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{3}(a-\gamma)^3\gamma - \frac{1}{3}\gamma^4\right] + \frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{2}a^2\beta^2 - \frac{1}{3}\beta(\beta-\gamma)^3 + \frac{1}{12}(\beta-\gamma)^4\right]_{a-\gamma}^{a} \\ &= \frac{\pi}{16}\left[\frac{1}{2}a^4 + 4a^3\gamma - 9a^2\gamma^2 + 8a\gamma^3 - \frac{175}{32}\gamma^4\right] \quad \text{für } a > \gamma. \end{aligned} \tag{234}$$

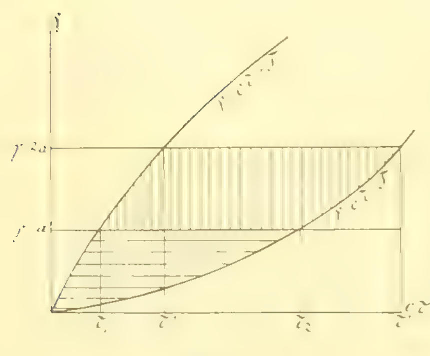


Fig. 17.

Dieses Resultat ist von dem bei Sommerfeld gegebenen verschieden; bei ihm wird nämlich die obige Gleichung (40) für das ganze Intervall $0 < \beta < a - \gamma$ in Anspruch genommen, während wir oben das Intervall $0 < \beta < \frac{\gamma}{2}$ abtrennen mußten, in dem die Formel (42) anzuwenden ist. Infolgedessen ändert sich auch sein Resultat für das Integral Q. Nehmen wir die Größe $c\tau$ als Abszisse, γ als Ordinate eines rechtwinkligen Systems, und zeichnen die Kurven $\gamma = c\tau - T$ und $\gamma = c\tau + T$, wie es in Figur 17 geschehen ist, und seien $\tau_1, \tau', \tau_2, \tau''$ bzw. durch folgende Gleichungen definiert:

$$\begin{aligned}
&\tau_1 \text{ durch die Gleichung } && a = c\tau + T,\\
&\tau' \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} && 2a = c\tau + T,\\
&\tau_2 \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} && a = c\tau - T,\\
&\tau'' \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} && 2a = c\tau - T;
\end{aligned}$$

ziehen wir ferner die Linien $\gamma = a$ und $\gamma = 2a$, so ist in dem horizontal schraffierten Teile der Figur:

$$c\tau - T < \gamma < c\tau + T \quad \text{und} \quad \gamma < a,$$

in dem vertikal schraffierten Teile:

$$c\tau - T < \gamma < c\tau + T \quad \text{und} \quad 2a > \gamma > a.$$

Nehmen wir ferner der Einfachheit wegen an, es sei $\tau_1 < \tau' < \tau_2 < \tau''$ (andernfalls wären leichte Modifikationen nötig, ebenso wenn obige Gleichungen mehrere Wurzeln haben). Dann ist:

1. für $0 < \tau < \tau_1$, $Q = \frac{1}{2}\int\limits_{c\tau - T}^{c\tau + T} \Omega_2 \, d\gamma$, wenn Ω_2 durch (234) definiert ist,

2. für $\tau_1 < \tau < \tau'$, $Q = \frac{1}{2}\int\limits_{c\tau - T}^{a} \Omega_2 \, d\gamma + \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{c\tau + T} \Omega_1 \, d\gamma$, wenn Ω_1 durch (233) gegeben ist,

3. für $\tau' < \tau < \tau_2$, $Q = \frac{1}{2}\int\limits_{c\tau - T}^{a} \Omega_2 \, d\gamma + \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{2a} \Omega_1 \, d\gamma$,

4. für $\tau_2 < \tau < \tau''$, $Q = \frac{1}{2}\int\limits_{c\tau - T}^{2a} \Omega_1 \, d\gamma$,

5. für $\tau > \tau''$, $Q = 0$.

Wir haben somit fünf verschiedene Fälle zu unterscheiden, während bei Sommerfeld nur drei unterschieden werden. Obgleich also die Grenzen des Integrals Q scheinbar von T unabhängig (nämlich gleich 0 und ∞) sind, erweisen sie sich tatsächlich doch als Funktion von $T = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, und somit (auch bei Sommerfeld) als Funktionen von ξ, η, ζ, wodurch es nach Obigem bedingt ist, daß die Integrale K und K' (auch abgesehen von der oberen Grenze ∞ statt t) voneinander verschieden sind. Wie wir in § 7 sahen, sind die Wurzeln τ' und τ_2 für die schließliche Auswertung unserer früheren Integrale nicht von wesentlicher Bedeutung.

In einer späteren Arbeit[1]) hat Sommerfeld seine Resultate auf anderem Wege abgeleitet, wobei er die Einführung des Fourierschen Integrals (vgl. § 1) vermeidet und statt dessen den Greenschen Satz wiederholt benutzt; er kommt so für das Potential φ zu dem Resultate:

[1]) Simplified deduction of the field and the forces of an electron, moving in any given way; Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, December 1904.

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\, c}{2\,\pi^2\, a^3} \int\limits_0^\infty \frac{S}{R}\, d\,\tau,$$

d. h. zu derselben Formel, die er auch in seiner ersten Mitteilung gewonnen hatte und die sich von unserer Gleichung (34) dadurch wesentlich unterscheidet, daß in der oberen Grenze t durch ∞ ersetzt ist. Weshalb aber nach τ zwischen den Grenzen 0 und ∞ integriert wird, geht aus der a. a. O. gegebenen neueren Darstellung nicht hervor. In Betreff der weiteren Folgerungen gelten dieselben Bedenken, die wir soeben erörtert haben. Diese Folgerungen beziehen sich hauptsächlich auf die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit; doch werden auch einige andere Resultate der früheren Arbeiten erneut abgeleitet.

In etwas modifizierter Weise leitet Abraham[1]) die Sommerfeldschen Formeln für konstante Geschwindigkeit ab: doch wird auch hier nach τ zwischen den Grenzen 0 und ∞ ohne weitere Begründung integriert, während die Zeit t als obere Grenze in dem betreffenden Integrale auftreten sollte.

Auffällig ist es, daß Herglotz[2]) auf ganz anderem Wege die Sommerfeldschen Resultate bestätigte; derselbe geht von einer partikulären Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\, t^2} - c^2\, \Delta^2\, \varphi = 0$$

aus, indem er diese Gleichung als Differentialgleichung eines Potentials φ im Raume von vier Dimensionen auffaßt, wobei die vier Variabeln x, y, z und $i\,c\,t$ in Betracht zu ziehen sind. Jedes Integral der Form:

$$\iiiint \frac{\varrho\,(k, l, m, \tau)\; d\,k\; d\,l\; d\,m\; d\,\tau}{(x-k)^2 + (y-l)^2 + (z-m)^2 - c^2\,(t-\tau)^2}$$

ist dann eine allgemeine Lösung der Gleichung, und Herglotz bestimmt nun die Integration nach τ, indem er diese Variable als komplex auffaßt und dann über einen gewissen Weg in der komplexen Ebene integriert; er findet so in der Tat einen Ausdruck, der sich als identisch mit dem betreffenden Ausdrucke Sommerfelds erweist; indessen bleibt es bei den Entwicklungen von Herglotz zweifelhaft, ob seine Formeln wirklich zur Darstellung des physikalischen Problems brauchbar sind; erstens ist durch das Operieren mit imaginären Zeiten τ der Zusammenhang gestört, dann aber ist nicht gezeigt, daß die angegebene Lösung im Innern des bewegten Elektrons auch der geforderten Bedingung (1):

$$\ddot{\varphi} - c^2\, \Delta^2\, \varphi = c^2\, \varrho$$

wirklich genügt; denn der übliche Beweis hierfür, wie er sich in der gewöhnlichen Potentialtheorie gestaltet, läßt die unmittelbare Übertragung auf den Fall, wo ein Quadrat im Nenner der partikulären Lösung mit negativem Vorzeichen unter den Integralzeichen auftritt, nicht zu.

[1]) Elektromagnetische Theorie der Strahlung (Theorie der Elektrizität Bd. 2). Leipzig 1905, S. 238.

[2]) Über die Berechnung retardierter Potentiale. Göttinger Nachrichten, Dezember 1904.

Ausgehend von der Vorstellung, daß die Röntgenstrahlen durch plötzliche Hemmungen der Elektronen an der Antikathode entstehen, hat Paul Hertz[1]) solche plötzliche Änderungen in der Geschwindigkeit der Elektronen und deren Einfluß auf die Ausstrahlung studiert. Die Behandlung dieses Problems kann selbstverständlich auf Grund unserer allgemeinen Formeln geschehen, denn in dem Sommerfeldschen Ansatze sind die Geschwindigkeitskomponenten ganz willkürliche, also z. B. auch unstetige Funktionen der Zeit. Hertz stützt sich dabei teils auf die allgemeinen Formeln Abrahams für die Dynamik des Elektrons, teils auf dessen besondere Resultate für das konstante Feld bei stationärer Bewegung; die wirkenden Kräfte werden auf indirektem Wege (durch Vermittlung der Energie des stationären Feldes) berechnet, und die Resultate stimmen mit den unsrigen nicht überein, und zwar, soviel ich sehe, deshalb, weil die Abrahamsche Formel für die Energie im stationären Felde vorausgesetzt wird, und aus ihr rückwärts die Energie vor Eintritt des stationären Zustandes abgeleitet wird, während auch für die Berechnung der Ausstrahlung und der Energie unsere Formeln von den bisher benutzten abweichen (vgl. den folgenden Paragraphen). Hervorzuheben ist aber, daß die verschiedenen Stadien, für welche Hertz jeweils verschiedene Formeln aufstellt, mit den von uns betrachteten Lagen (§ 7) übereinstimmen (für den Fall konstanter Unterlichtgeschwindigkeit), und daß Hertz den Grenzfall der Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ebenso beurteilt, wie wir es taten, indem auch nach ihm in diesem Grenzfalle der stationäre Zustand niemals erreicht wird und die Kraft für jede endliche Zeit endlich bleibt. Trotz dieser qualitativen Übereinstimmung sind die Hertzschen Schlußresultate von den unsrigen verschieden.

In einer späteren Arbeit hat Paul Hertz[2]) die Frage untersucht, welche Bewegung von einer gegebenen Kraft hervorgerufen wird; insbesondere wird ein Beweis dafür erbracht, daß dieses Problem in gewissen einfachen Fällen lösbar und eindeutig bestimmt ist. Alle diese Entwicklungen knüpfen an die Sommerfeldschen Formeln an, werden also einer Revision bedürfen.

§ 17. **Weitere Folgerungen.**

Nach den bisherigen Anschauungen galt das Gallileische Prinzip, nach welchem ein Punkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, wenn keine Kraft wirkt, für eine elektromagnetische Masse ebenso wie für einen Massenpunkt der Mechanik; auf Grund dessen konnte man den Versuch machen, die Mechanik auf elektromagnetischer Grundlage aufzubauen, indem man nur elektrische Massen als vorhanden annahm. Nachdem aber gezeigt ist, daß eine elektrische Masse auch bei gleichförmiger Bewegung eine Kraft erfordert, welche diese Bewegung aufrecht erhält, fällt die Analogie zwischen Mechanik und Elektrodynamik fort, wenn man sie vielleicht auch durch Hinzufügung weiterer Voraussetzungen wieder einführen kann. Insbesondere wird auch der Begriff der elektromagnetischen Masse hinfällig; als solche bezeichnet man (nach Analogie mit der gewöhnlichen Mechanik) den Quotienten von Kraft und Beschleunigung (nach Lorentz und

[1]) Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons, Inauguraldissertation, Göttingen 1904.

[2]) Die Bewegung eines Elektrons unter dem Einfluß einer longitudinal wirkenden Kraft. Göttinger Nachrichten, 1906, S. 229.

Abraham); derselbe ist abhängig von der Geschwindigkeit und von der Richtung, in welcher die betreffende Komponente der Kraft gemessen wird. Insbesondere bezeichnet man diesen Quotienten als longitudinale Masse, wenn die Kraft in Richtung der Bewegung gemessen wird. Da nun bei gleichförmiger Bewegung die Beschleunigung verschwindet, und dennoch die Kraft von Null verschieden ist, so würde sich eine unendlich große Masse ergeben. Schon in diesem einfachsten Falle wäre also die Analogie gestört.

Von Interesse ist ferner die Berechnung der Energie und der Strahlung des bewegten Elektrons. Nach Abraham besteht allgemein die Gleichung:[1])

$$\frac{d A_i}{dt} + \iint \mathfrak{S}\, d\sigma = -\frac{dW}{dt}, \tag{235}$$

wenn W die elektromagnetische Energie des betrachteten Raumteiles bezeichnet:

$$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \{\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\}\, dx\, dy\, dz, \tag{236}$$

und wenn A_i die Arbeit der inneren Kräfte bezeichnet:

$$\frac{d A_i}{dt} = \frac{1}{4\pi}\iiint \varrho\,(S\, \mathfrak{v}_x f_x)\, dx\, dy\, dz = -\frac{1}{4\pi} S\, \mathfrak{v}_x \mathfrak{F}_x, \tag{237}$$

wobei f_x durch (113) gegeben ist.

Hierbei ist ferner:

$$\mathfrak{E}^2 = \mathfrak{f}_x^2 + \mathfrak{f}_y^2 + \mathfrak{f}_z^2. \tag{238}$$

und

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{h}_x^2 + \mathfrak{h}_y^2 + \mathfrak{h}_z^2,$$

$$\mathfrak{h}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \quad \mathfrak{h}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad \mathfrak{h}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}.$$

Endlich bedeutet $\mathfrak{S}^2$ den Poyntingschen Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}^2 &= (\mathfrak{f}_y \mathfrak{h}_z - \mathfrak{f}_z \mathfrak{h}_y)^2 + (\mathfrak{f}_z \mathfrak{h}_x - \mathfrak{f}_x \mathfrak{h}_z)^2 + (\mathfrak{f}_x \mathfrak{h}_y - \mathfrak{f}_y \mathfrak{h}_x)^2 \\ &= S\, \mathfrak{f}_x^2 \cdot S\, \mathfrak{f}_x^2 - (S\, \mathfrak{f}_x \mathfrak{h}_x)^2 \\ &= \mathfrak{E}^2 \cdot \mathfrak{H}^2 \cdot \sin^2(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}),\end{aligned}$$

und auf der linken Seite von (235) steht das über die Oberfläche des betreffenden Raumteiles genommene Doppelintegral über $\mathfrak{S}$. Dieses Doppelintegral bestimmt die Ausstrahlung aus dem Raumteile, und Gleichung (235) sagt uns, daß innere Arbeit und Ausstrahlung auf Kosten der elektromagnetischen Energie erfolgen. Auf Grund unserer Formeln kann diese Strahlung in jedem Falle berechnet werden, indem man die dreifachen Integrale A_i und W über das Innere des Elektron ausdehnt.

Im einfachsten Falle der gleichförmigen Bewegung war nach den bisherigen Formeln W von der Zeit unabhängig (nur eine Funktion der Geschwindigkeit), also $\frac{dW}{dt} = 0$;

---

[1]) Vgl. Abraham, Annalen der Physik und Chemie, Bd. 315, 1903. Gleichung (IV); dabei ist das dortige $4\pi\varrho$ durch ϱ zu ersetzen, sodann $\mathfrak{E}_x$ durch $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{K}_x$ durch $\mathfrak{F}_x$.

ebenso war $\frac{d A_i}{d t}$ gleich Null zu setzen, denn die Bewegung war kräftefrei ($\mathfrak{F}_x = v$, $\mathfrak{F}_y = v$, $\mathfrak{F}_z = v$); infolge dessen war auch keine Ausstrahlung vorhanden.

Auf Grund unserer Resultate ist aber die rechte Seite von Gleichung (237) von Null verschieden: es muß also $\frac{d A_i}{d t}$ aus (237), W aus (236) berechnet werden, und dann ergibt sich die Strahlung des Elektroms aus (235). Dabei ist zu beachten, daß in der Formel

$$4 \pi A_i = -\int_0^t S\, \mathfrak{v}_x \cdot \mathfrak{F}_x \cdot dt = -S \int_0^t \mathfrak{v}_x \cdot \mathfrak{F}_x \cdot dt$$

für die Funktionen $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ in den verschiedenen Abschnitten des Intervalles von 0 bis t nach obigen Resultaten verschiedene Funktionen von t einzusetzen sind.

Handelt es sich z. B. wieder um die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v längs der x-Achse, so ist nach (238) und (222[a])

$$\mathfrak{E}^2 = (1 - \omega^2)^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

ferner:

$$\mathfrak{h}_y = -\omega \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \mathfrak{h}_z = +\omega \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{H}^2 = \omega^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

Wendet man den in obiger Gleichung (55) enthaltenen Gaus'schen Satz an, so wird:

$$W = \frac{(1-\omega^2)^2}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz + \frac{\omega^2}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

$$= -\frac{1-\omega^2+\omega^4}{8\pi} \iiint \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right] \varphi\, dx\, dy\, dz - \iint \left[\frac{1-\omega^2+\omega^4}{8\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\omega^2}{8\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x)\right] \varphi\, d\sigma,$$

wo wieder $d\sigma$ das Oberflächenelement des Elektrons und n die Richtung der inneren Normale bezeichnet. Es ist ferner:

$$\mathfrak{S}^2 = \omega^2 (1 - \omega^2)^2 \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Bei Auswertung desselben sind ebenso wie bei Auswertung des in der letzten Gleichung auftretenden Oberflächenintegrals die verschiedenen Lagen zu berücksichtigen, wie sie für Unterlichtgeschwindigkeit in § 7, für Überlichtgeschwindigkeit in § 10 betrachtet wurden. Auf die nähere Ausführung der Integrale gehen wir hier nicht ein.

Den Ausdruck für die Energie benutzt man, um die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen im elektrostatischen Felde zu berechnen. Sei φ das Potential dieses Feldes, so ist der Zuwachs der Energie des Elektrons gleich der geleisteten Arbeit[1]):

$$W - W_0 = e(\varphi - \varphi_0),$$

wenn $-e$ die negative Ladung des Elektrons bezeichnet. Da man annehmen darf, daß

[1]) Vgl. Abraham: a. a. O. Bd. 2, S. 195.

die Zeit t größer als $\frac{2a}{c-v}$ ist, so ist $W - W_0$ eine Funktion von ω, für die man einen dem stationären Zustande entsprechenden Ausdruck aus obigen Formeln zu berechnen hat. Aus dieser Gleichung läßt sich dann die Endgeschwindigkeit ω berechnen; doch wird die Art der Abhängigkeit zwischen ω und φ eine ganz andere sein, als man auf Grund der bisherigen Formeln anzunehmen berechtigt war. Das Resultat wird wesentlich verschieden sein, je nachdem man (konstante) Über- oder Unter-Lichtgeschwindigkeit voraussetzt, sowie je nach den Vorstellungen, die man sich über den Anfangszustand bildet, wobei unsere Erörterungen in § 15 zu berücksichtigen sind.

Um die Ablenkung der Kathodenstrahlen im magnetischen oder elektrischen Felde zu beurteilen, ist es nötig, den Begriff der „transversalen elektromagnetischen Masse“ zuvor zu erörtern. Das ist aber kaum möglich, ohne daß vorher das bei der Translation entstehende Drehmoment berechnet und die Rotationsbewegung der Elektronen behandelt wäre; diese Fragen sind in obigen Entwicklungen noch nicht berücktichtigt, doch hoffe ich darauf demnächst in einer Fortsetzung dieser Untersuchungen zurückzukommen.

Dann werden wir auch auf die Herglotzschen Untersuchungen[1]) einzugehen haben, die sich auf die Kräfte rotirender Elektronen beziehen und in besonderen Fällen von jenen kräftefreien Schwingungen handeln, die oben in der Einleitung erwähnt wurden.

[1]) Zur Elektronentheorie. Göttinger Nachrichten, 1903, S. 1.

Berichtigungen.

Seite 256 Zeile 2 v. o. muß es heißen: $\frac{3\varepsilon c^2 \tau'}{4\pi a^3}$ statt $\frac{3\varepsilon c^2 \tau'}{4 a^3}$.

„ 260 In Gleichung (71) muß es heißen: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ statt φ.

„ 262 Zeile 18 v. u. muß es heißen: t^0 statt t_0.

„ 276 „ 11 v. o. Für die zweite Lage ist über das Vorzeichen der Kraft $\mathfrak{F}_x$ allgemein kaum etwas auszusagen. Dasselbe gilt dann für die dritte Lage.

„ 288 „ 9 v. u. muß es heißen: $(T - a)^3$ statt $(T - a)_3$.

„ 302 In Figur 14 „ „ „ t^0 statt t_0.

Inhalt.



Ueber

die Bewegung der Elektronen.

Von

F. Lindemann.

Zweiter Teil:

Stationäre Bewegung.

(Eingelaufen am 10. Juli 1907.)



Im ersten Teile dieser Abhandlung (vgl. oben Seite 235 ff. des vorliegenden Bandes) hatte ich das Problem der Elektronenbewegung für den Fall der Translation auf Grund des Sommerfeldschen Ansatzes neu behandelt, und war dabei zu wesentlich anderen Resultaten gekommen, als sie sonst aufgestellt wurden. Die Unterschiede beruhen hauptsächlich darauf (wie in § 16 dargelegt wurde), daß gewisse Integrationen und Differentiationen sowie andere Grenzübergänge (für $t = \infty$) nicht in beliebiger Anordnung ausgeführt werden dürfen, daß vielmehr das Resultat von der Anordnung dieser Operationen wesentlich beeinflußt wird. Dabei ist bei Auswertung des Integrals Φ_{2x} ein Irrtum vorgekommen, insofern eine Quadratwurzel mit unrichtigem Vorzeichen genommen wurde, und ein in der Entwicklung eines Binoms vorkommendes Glied bei der Integration vergessen wurde; außerdem ist im Nenner der Faktor 2 hinzuzufügen. Ich bin Herrn G. A. Schott in Bonn in außerordentlicher Weise zu Dank verpflichtet, da er sich der Mühe unterzog, die Rechnungen genau zu revidieren und mich auf den Irrtum aufmerksam machte, auch das richtige Resultat mitteilte. Es hat dies in einem Punkte eine wesentliche Änderung der zu ziehenden Folgerungen zur Folge, indem sich jetzt ergibt, daß bei Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft nach Ablauf einer gewissen Zeit gleich Null wird. Wenn also auch in diesem einen Punkte Übereinstimmung mit älteren Resultaten hergestellt wird, so bleiben doch alle anderen Formeln von den früheren abweichend, und die frühere Behandlung der (nach gewisser Zeit eintretenden) kräftefreien Bewegung hat nur zufällig zu dem richtigen Resultate geführt. Es geht dies deutlich daraus hervor, daß nach Abraham und Sommerfeld die Wirkung des skalaren und des vektoriellen Potentials je für sich gleich Null sein sollte, während tatsächlich nur ihre Summe verschwindet.

In den folgenden Paragraphen sind die Integrale Φ neu berechnet, und es ist die stationäre Bewegung eingehend behandelt. Hinzugefügt sind die entsprechenden Gleichungen für die sogenannte quasistationäre Bewegung, wenngleich nicht einzusehen ist, wie eine solche zustande kommen soll, denn auch sie kann sich erst herausbilden, nachdem eine gewisse Zeit hindurch nicht unerhebliche verzögernde Kräfte auf das Elektron gewirkt haben. Das Auftreten dieser Kräfte tritt auch der elektromagnetischen Auffassung der materiellen Mechanik hindernd entgegen.

Auf die Einwürfe, welche Sommerfeld in einer Arbeit, die der Akademie im Juni vorgelegt wurde, gegen meine früheren Entwicklungen erhoben hat, kann ich hier nicht eingehen, da sie mir noch nicht näher bekannt sind.[1])

[1]) Inzwischen bin ich darauf in einer besondern Abhandlung (Sitzungsberichte der K. Bayerischen Akademie, math.-phys. Klasse, 1907. S. 177 ff.) näher eingegangen.

§ 18. **Berechnung der Integrale Φ_{1x} und Φ_{2x}.**

(Nachtrag zu § 7 und § 10.)

In § 3 war für das Potential φ die Gleichung (34) aufgestellt, nämlich:

$$\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int\limits_0^t \frac{S}{R}\,d\tau,$$

worin der Wert des Integrals:

$$S = \int\limits_0^\infty \frac{\sin a s - a s \operatorname{cosin} a s}{s^3} \sin c s \tau \cdot \sin R s \cdot d s$$

durch die Untersuchungen in § 4 näher bestimmt wurde, und zwar ist je nach den zwischen a, R und $c\tau$ bestehenden Ungleichungen gemäß den Gleichungen (43), (44), (45) S entweder durch:

$$\frac{\pi}{8}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] \quad \text{oder durch} \quad \frac{\pi}{2} c\tau R \quad \text{oder durch} \quad 0$$

zu ersetzen, so daß in verschiedenen Intervallen der Beitrag zum Integrale φ durch die Gleichung:

$$d\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{16\,a^3\,\pi}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] d\tau$$

oder:

$$d\varphi = \frac{3\,\varepsilon\,c}{4\,a^3\,\pi}\,c\tau R\,d\tau \quad \text{oder} \quad d\varphi = 0$$

bestimmt wird. Demgemäß ist in den Relationen der §§ 6 und 7 die im Nenner auftretende Zahl 8 überall durch 16 zu ersetzen, sobald im Zähler unter dem Integralzeichen die Klammer $[a^2 - (c\tau - R)^2]$ vorkommt.

Hiernach wird das in § 7 für die **erste Lage** zu berechnende Integral J_1 durch die Formel:

$$J_1 = -\frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,\pi\,a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{2\pi} d\Psi \int\limits_0^{\pi}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] \operatorname{cosin}(n, x) \cdot \sin\Theta \cdot \frac{d\Theta}{R}$$

gegeben, und dasselbe ist gleich $\Phi_{1x}(t, t)$, wenn die Funktion Φ_{1x} durch die Gleichung:

$$\Phi_{1x}(a, t) = \frac{\varepsilon\,c}{20\,a^3}\int\limits_0^a \xi\,(T^2 - 10\,a^2 + 5\,c^2\,\tau^2)\,d\tau \tag{68}$$

definiert wird.

Bei der **dritten Lage** (Seite 263) ist ebenso das Integral J_1' durch die Gleichung:

$$J_1' = \frac{3\,\varepsilon\,c}{16\,\pi\,a}\int\limits_{\tau_0}^t d\tau \int\limits_0^{2\pi} d\Psi \int\limits_{0}^{\Theta_1}\left[a^2 - (c\tau - R)^2\right] \frac{x}{a R} \sin\Theta \cdot d\Theta$$

gegeben. Die Auswertung führten wir zwei Integrale U_1 und U_2 zurück, deren Werte aus den in (66) und (66^a) gegebenen unbestimmten Integralen entnommen werden können. Es wird:

$$U_1 = \int_0^{\Theta_1} \frac{\sin\Theta \cdot \operatorname{cosin}\Theta \cdot d\,\Theta}{\sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T \operatorname{cosin}\Theta}}$$

$$= \frac{1}{6\,a^2\,T^2}\left[\{3\,(a^2+T^2) - (a - c\,\tau)^2\}\sqrt{(a - c\,\tau)^2} - 2\,(a+T)\,(a^2 + T^2 - a\,T)\right].$$

Hierin ist für $\sqrt{(a - c\tau)^2}$ der positive Wert zu nehmen, und dieser ist gleich $c\tau - a$, da in der dritten Lage $c\,\tau > a$ vorausgesetzt wird, während ich in § 7 aus Versehen den Wert $a - c\,\tau$ gewählt hatte (obgleich bei dem entsprechenden Integrale Φ_{2x}^{*} in § 10 für den Wert der Quadratwurzel $\sqrt{(T-a)^2}$ das richtige Zeichen gewählt wurde). Es ist also:

$$U_1 = \frac{1}{6\,a^2\,T^2}\left[\{3\,(a^2+T^2) - (a - c\,\tau)^2\}\,(c\,\tau - a) - 2\,(a+T)\,(a^2 + T^2 - a\,T)\right].$$

Ebenso wird:

$$U_2 = \int_0^{\Theta_1} \sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T \operatorname{cosin}\Theta} \cdot \sin\Theta \cdot \operatorname{cosin}\Theta \cdot d\,\Theta$$

$$= \frac{1}{30\,a^2\,T^2}\left[\{5\,(a^2+T^2) - 3\,(c\,\tau - a)^2\}\,(c\,\tau - a)^3 - 2\,(T+a)^3\,(a^2 + T^2 - 3\,a\,T)\right],$$

und hieraus:

$$(a^2 - c^2\,\tau^2)\,U_1 - U_2 = \frac{1}{15\,a^2\,T^2}\left[-\,8\,a^5 + 10\,a^3\,(c^2\,\tau^2 - T^2)\right.$$

$$\left. +\,10\,a^2\,(c^3\tau^3 - T^3) - 15\,a\,(c^2\tau^2 - T^2)\,c^2\tau^2 + (c\tau - T)^2\,(4\,c^3\tau^3 + 8\,c^2\tau^2\,T + 2\,c\tau\,T^2 + T^3)\right].$$

Zur Berechnung von J_1 bedürfen wir ferner noch des Integrals:

$$\int_0^{2\pi} d\,\Psi \int_0^{\Theta_1} \frac{2\,c\,\tau\,x}{a}\sin\Theta\,d\,\Theta = \frac{\xi}{T}\cdot 4\,\pi\cdot c\,\tau\cdot\int_0^{\Theta_1}\sin\Theta\operatorname{cosin}\Theta\,d\,\Theta = \frac{2\,\pi\,c\,\tau\,\xi}{T}\sin^2\Theta_1,$$

was sich leicht ergibt, wenn man den Wert von x aus der ersten Gleichung (63) einsetzt und $r = a$ nimmt. Da $\operatorname{cosin}\Theta_1$ durch Gleichung (73[a]) gegeben war, so wird:

$$\sin^2\Theta_1 = \frac{c^2\,\tau^2 - T^2}{4\,a^2\,T^2}\left[4\,a\,c\,\tau + T^2 - c^2\,\tau^2 - 4\,a^2\right].$$

Schließlich ergibt sich:

$$J_1 = \Phi_{2x}(t, t),$$

wenn jetzt die Funktion Φ_{2x} durch folgende Gleichung definiert wird:

$$\Phi_{2x}(a, t) = \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,a}\int_{\tau^0}^{t}\frac{\xi}{T}\left[(a^2 - c^2\,\tau^2)\,U_1 - U_2 + c\,\tau\sin^2\Theta_1\right]d\,\tau, \tag{75}$$

wo nun für U_1, U_2 und $\sin^2\Theta_1$ die obigen Werte einzusetzen sind; unter dem Integralzeichen wird dann:

$$(a^2 - c^2\,\tau)\,U_1 - U_2 + c\,\tau\sin^2\Theta_1$$

$$= \frac{1}{60\,a^2\,T^2}\left[-32\,a^5 + 40\,a^3\,(c^2\,\tau^2 - T^2) - 20\,a^2\,(c\tau - T)^2\,(c\tau + 2\,T) + (c\tau - T)^4\,(c\tau + 4\,T)\right]. \tag{75a}$$

Herr Schott macht mich noch darauf aufmerksam, daß die Auswertung des Integrales $J_1^{\cdot}$ sich etwas einfacher gestaltet, wenn man die Substitution:

$$R = + \sqrt{a^2 + T^2 + 2\,a\,T \operatorname{cosin} \Theta},$$

also:

$$\frac{\sin \Theta\, d\,\Theta}{R} = - \frac{d\,R}{a\,T}$$

ausführt. Es wird dann:

$$\Phi_{2x}(a,t) = \frac{3\,\varepsilon\,c}{16\,a^3} \int\limits_{\tau_0}^{\alpha} \frac{\xi\,d\,\tau}{T^3} \int\limits_{c\tau - a}^{T+a} [a^2 - (c\,\tau - R)^2]\,[R^2 - a^2 - T^2]\,d\,R, \tag{75ᵃ}$$

man vermeidet also das Rechnen mit den Quadratwurzeln.

Auch in den Untersuchungen über die Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit ist der Nenner 8 in Gleichung (123) und den daraus folgenden Gleichungen durch 16 zu ersetzen. Die Gleichungen (128) lauten also:

$$(128)\quad \begin{aligned} \Phi_{0\,x}^{\cdot}(a,t) &= \frac{\varepsilon\,c^2}{20\,a^3} \int\limits_0^{\alpha} \frac{\xi\,\tau}{T^3}\, G_0(c\,\tau, T)\,d\,\tau, \\ \Phi_{1\,x}^{\cdot}(a,t) &= \frac{3\,\varepsilon\,c^2}{16\,a^3} \int\limits_0^{\alpha} \frac{\xi\,\tau}{T^3}\, G_1(c\,\tau, T)\,d\,\tau, \end{aligned}$$

wo die ganzen Funktionen G_0 und G_1 in der früheren Weise definiert sind. Auch in der Funktion $\Phi_{2x}^{\cdot}$ ist überall mit 2 zu dividieren; wir haben also an Stelle von (135) schließlich:

$$\Phi_{2x}^{\cdot}(a,t) = \frac{3\,\varepsilon\,c}{8\,a} \int\limits_{\tau_1}^{\alpha} \frac{\xi}{T}\,[(a^2 - c^2\,\tau^2)\,W_1^{\cdot} - W_2^{\cdot} + 2\,c\,\tau\,W_0^{\cdot}]\,d\,\tau. \tag{135}$$

§ 19. Gleichförmige geradlinige Bewegung.

(Ergänzung zu § 12.)

Auf Grund der verbesserten Formeln für die Integrale Φ_x müssen wir das Beispiel der gleichförmigen Bewegung (§ 12) nochmals kurz behandeln. Nach (162) ist jetzt $T = v\,\tau$ zu setzen, und dann wird:

$$(163)\quad \begin{aligned} \Phi_{1x}(a,t) &= \frac{\varepsilon\,c\,v}{20\,a^3} \int\limits_0^{\alpha} \tau\,[(v^2 + 5\,c^2)\,\tau^2 - 10\,a^2]\,d\,\tau \\ &= \frac{\varepsilon\,c\,v}{20\,a^3} \left[(v^2 + 5\,c^2)\frac{\alpha^4}{4} - 5\,a^2\,\alpha^2\right], \end{aligned}$$

worin $\alpha = t$ zu setzen ist.

Für Ψ_{1xt} erhalten wir aus Gleichung (108) den Wert:

$$\Psi_{1xt}(t,t) = \frac{\varepsilon\,c\,v\,t}{16\,a^3}\,[16\,a^3 - 12\,a^2\,c\,t + c\,(c^2 + v^2)\,t^3].$$

Gemäß (118), § 9 finden wir sonach für die wirkende Kraft $\mathfrak{F}_x$ die Relation:

$$\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = -\Phi_{1x} - \frac{1}{c}\Psi_{1xt} = -\varepsilon\omega a\left[\frac{ct}{a} - \left(\frac{ct}{a}\right)^2 + \frac{5+3\omega^2}{40}\left(\frac{ct}{a}\right)^4\right], \tag{164}$$

und diese Gleichung ist für die erste und zweite Lage, d. h. in dem ersten Intervalle:

$$0 < t < \frac{2a}{v+c}$$

anwendbar. Die Kraft ist für kleine Werte von t negativ; für größere Werte hat man die Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$40(1-x) + (5+3\omega^2)x^3 = 0$$

zu untersuchen. Das Produkt der Wurzeln ist negativ, die Summe ist Null; es müssen also zwei positive (oder imaginäre) Wurzeln und eine negative Wurzel vorhanden sein. Für $x = 1$ ist die linke Seite positiv.

Setzen wir $x = \frac{2}{1+\omega}$, so wird die linke Seite gleich:

$$-\frac{8\omega}{(1+\omega)^3}(5 - 8\omega - 5\omega^2),$$

also negativ für:

$$\omega < \omega_0, \quad \text{wenn:} \quad \omega_0 = \tfrac{1}{5}(\sqrt{41} - 4).$$

Dieser Wert ω_0 ist kleiner als die Einheit, kann also vorkommen. Zwischen 0 und $\frac{2}{1+\omega}$ liegt demnach für $\omega < \omega_0$ immer eine Wurzel der kubischen Gleichung; diese Wurzel bestimmt diejenige Zeit, wo die Kraft aufhört verzögernd zu wirken, indem sie ihr Vorzeichen ändert, so daß von nun ab die Wirkung des Elektrons auf sich selbst zunächst beschleunigend ist. Der Differentialquotient der linken Seite verschwindet für $x = \sqrt{\frac{40}{3}\frac{1}{5+3\omega^2}}$; dieser Wert ist für $\omega^2 < 1$ stets größer als $\frac{2}{1+\omega}$; die zweite positive Wurzel ist also größer als der letztere Wert und kommt deshalb nicht in Betracht. Für $\omega > \frac{5}{9}\,(> \omega_0)$ sind diese Wurzeln imaginär.

Für $t = \frac{a}{c}$, d. h. am Ende der ersten Lage wird:

$$\mathfrak{F}_x\left(\frac{a}{c}\right) = -\frac{3\varepsilon^2\omega}{4\pi a^2}\cdot\frac{3+5\omega^2}{40},$$

und am Ende der zweiten Lage:

$$\mathfrak{F}_x\left(\frac{2a}{c+v}\right) = \frac{+6\varepsilon^2\omega^2}{4\pi a^2(1+\omega)^4}(1 - \tfrac{8}{5}\omega - \omega^2), \tag{166}$$

d. h. negativ für $\omega < \omega_0$, positiv für $\omega > \omega_0$.

Für die **dritte Lage** ist $t^0 < t < t'$, wo:

$$t^0 = \frac{2a}{c+v}, \quad t' = \frac{2a}{c-v}.$$

Wir haben die in (78), § 18 gegebene Funktion Φ_{2x} für den Fall $\xi = T = v\tau$ zu berechnen. Es wird:

$$\Phi_{2x}(a,t) = \frac{3\varepsilon c}{540 v^2 a^3} \int_{\tau 0}^{a} \left[-32\frac{a^5}{\tau^2} + 40 a^3 (c^2 - v^2) - 20 a^2 (c-v)^2 (c+2v)\tau + (c-v)^4 (c+4v)\tau^3 \right] d\tau,$$

ferner nach (112):

$$\Psi_{2xt}(a,t) = -\frac{3\varepsilon c}{8a^3} \int_{\tau 0}^{a} G(v\tau, c\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

wo nun nach (110):

$$G(v\tau, c\tau) = a^4 (\omega - 1) \left[-\frac{4}{3}\frac{c\tau}{a} + (1-\omega)\left(\frac{c\tau}{a}\right)^2 - \frac{1}{12}(1-\omega)^3 \left(\frac{c\tau}{a}\right)^4 \right].$$

Die Ausführung ergibt:

$$(167^a) \qquad \Phi_{2x}(t,t) = \frac{\varepsilon a}{40\omega^2} \left[4\left\{ \frac{2a}{ct} - (1+\omega) \right\} + 20(1-\omega^2)\left\{ \frac{ct}{2a} - \frac{1}{(1+\omega)} \right\} \right.$$
$$\left. -10(1-\omega)^2 (1+2\omega)\left\{ \left(\frac{ct}{2a}\right)^2 - \frac{1}{(1+\omega)^2} \right\} + (1-\omega)^4 (1+4\omega) \left\{ \left(\frac{ct}{2a}\right)^4 - \frac{1}{(1+\omega)^4} \right\} \right]$$

$$(167^b) \qquad \Psi_{2x}(t,t) = \frac{\varepsilon a}{40\omega^2} \left[-40(1-\omega)\omega^2 \left\{ \frac{ct}{2a} - \frac{1}{(1+\omega)} \right\} \right.$$
$$\left. + 30(1-\omega)^2\omega^2 \left\{ \left(\frac{ct}{2a}\right)^2 - \frac{1}{(1+\omega)^2} \right\} - 5(1-\omega)^4 \omega^2 \left\{ \left(\frac{ct}{2a}\right)^4 - \frac{1}{(1+\omega)^4} \right\} \right].$$

Für die wirkende Kraft finden wir so in der dritten Lage gemäß (118ᵃ) den Ausdruck:

$$\mathfrak{F}_x = + \frac{3\varepsilon^2 \omega^2}{2\pi a^2 (1+\omega)^4} \left(1 - \frac{8}{5}\omega - \omega^2 \right)$$
$$(168) \qquad - \frac{3\varepsilon^2}{160\pi a^2 \omega^2} \left[4\left\{ \frac{2a}{ct} - (1+\omega) \right\} + 20(1-\omega)^2 (1+2\omega) \left\{ \frac{ct}{2a} - \frac{1}{(1+\omega)} \right\} \right.$$
$$\left. -10(1-\omega)^3 (1+3\omega) \left\{ \left(\frac{ct}{2a}\right)^2 - \frac{1}{(1+\omega)^2} \right\} + (1-\omega)^5 (1+5\omega) \left\{ \left(\frac{ct}{2a}\right)^4 - \frac{1}{(1+\omega)^4} \right\} \right]$$

und diese Gleichung gilt in dem oben bezeichneten Intervalle, nämlich:

$$\frac{1}{1+\omega} < \frac{ct}{2a} < \frac{1}{1-\omega}.$$

Liegt t in der Nähe der unteren Grenze des Intervalls, so überwiegt das erste Glied der eckigen Klammer, letztere vergrößert also die verzögernde Wirkung der Kraft.

Für die **vierte Lage** $\left(t > \frac{2a}{c-v} \right)$ ist endlich Gleichung (118ᵇ) anzuwenden. d. h. es ist t durch den konstanten Wert $\frac{2a}{c-v}$ zu ersetzen, der den Beginn der vierten Lage bestimmt; die Kraft wird also stationär. Ihr konstanter Wert aber ergibt sich (das ist das durch die sorgfältigen Rechnungen des Herrn Schott festgestellte Resultat) gleich Null; wir haben nämlich:

$$\Phi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right)+\frac{1}{c}\Psi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon a}{5\omega}\left[-1+5(1+2\omega)\frac{1-\omega}{1+\omega}-5(1+3\omega)\frac{1-\omega}{(1+\omega)^2}+(1+5\omega)\frac{(1-\omega)(1+\omega^2)}{(1+\omega)^4}\right]$$

$$=\frac{2\varepsilon a\omega^2}{(1+\omega)^4}\left(1-\frac{8}{5}\omega-\omega^2\right),$$

also genau gleich dem negativen Wert des Ausdrucks:

$$\Phi_1\left(\frac{2a}{c+v}\right)+\frac{1}{c}\Psi_1\left(\frac{2a}{c+v}\right),$$

so daß die Summe zu Null wird:

$$\mathfrak{F}_x(t)=0 \qquad \text{für } t\geqq\frac{2a}{c-v}. \tag{169a}$$

Nach Ablauf der Zeit $\frac{2a}{c-v}$, vom Beginne der Bewegung ab gerechnet, ist also die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft, stationär und zwar gleich Null geworden.[1]) Dabei ist vorausgesetzt, daß das Elektron bei Beginn der Bewegung seine Ladung erhält (also gewissermaßen erst geschaffen wird); für den stationären Zustand kann dieser Anfangszustand keinen Einfluß haben; in der Tat werden wir bei anderer Annahme über denselben im folgenden Paragraphen zu dem gleichen Resultate kommen, und dann die weiteren Folgerungen besprechen.

Für den stationären Zustand stimmt also das hier gewonnene Resultat mit dem von Abraham und Sommerfeld erhaltenen überein. Das ist aber (im Sinne der Rechnung) nur zufällig; alle anderen von uns gewonnenen Resultate bleiben von denjenigen Sommerfelds vollkommen verschieden. Es mag dies hier nochmals an dem Beispiele der Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit gezeigt werden.

Nach der Sommerfeldschen Formel wäre in diesem Falle für jede endliche Zeit t die Kraft gleich (vgl. oben § 16):

$$-\frac{9\varepsilon^2 c}{8\pi^2 a^4}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^\infty d\tau\frac{\partial}{\partial\xi}\iiint\frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz-\frac{9\varepsilon^2 v}{8\pi^2 a^4}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty d\tau\iiint\frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz,$$

und zwar ist das erste Glied bei Sommerfeld aus derjenigen Funktion durch angeblich erlaubte Umformungen entstanden, die wir mit $\Phi_{1x}+\Phi_{2x}$ bezeichnet haben; es wäre also nach Sommerfeld:[2])

[1]) Dadurch wird die auf Seite 321 der früheren Arbeit angestellte Überlegung nicht ungültig: dieselbe bezieht sich auf die einzelnen Potentiale φ und $\mathfrak{A}$; es tritt aber jetzt das Resultat hinzu, daß sich die Wirkungen der beiden einzelnen Potentiale gerade aufheben.

[2]) Bei ihm steht $t+t_0$ ursprünglich anstatt t als obere Grenze; indem er $t_0=\infty$ nimmt, verlegt er den Beginn der Bewegung in eine unendlich weit zurückliegende Zeit; für den hier besonders in Betracht kommenden stationären Zustand ist aber die Wahl des Anfangszustandes ohne Einfluß.

$$\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t) = \frac{3\,\varepsilon\,c}{2\,\pi^2\,a^3}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial\,\xi}\iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\right) d\tau$$

und:

$$\frac{1}{c}\left(\Psi_{1x}(\tau^0) + \Psi_{2x}(t)\right) = -\frac{v^2}{c^2}\left(\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t)\right) + \frac{3\,\varepsilon\,v}{2\,\pi^2\,a^3}\frac{\partial}{\partial\,t}\int\limits_0^\infty \left(\iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz\right) d\tau.$$

Dieselbe Formel ist von Abraham in seinem Werke abgeleitet worden. Hier wäre nun:

$$\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t)$$

und:

$$\Psi_{1x}(\tau^0) + \Psi_{2x}(t)$$

nach der Sommerfeldschen Darstellung je für sich gleich Null.[1]) Diese Resultate sollen für alle endlichen Zeiten gelten, und insbesondere für $t = \infty$, d. h. für $t > \frac{2\,a}{c - v}$. Dann ist aber nach obigen Gleichungen (163) und (167^a):

$$\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}\left(\frac{2\,a}{c - v}\right) = \Phi_{1x}\left(\frac{2\,a}{c + v}\right) + \Phi_{2x}\left(\frac{2\,a}{c - v}\right)$$

$$-\frac{2\,\varepsilon a\,\omega^2}{(1+\omega)^4}\left(1 + \tfrac{2}{5}\,\omega\right) + \frac{\varepsilon\,a}{5\,\omega}\left[-1 + 5\,\frac{1-\omega}{1+\omega} - 5\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2(1 + 2\,\omega) + \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2(1+\omega^2)(1+4\omega)\right],$$

und hier zeigt schon der erste, von ω^{-1} abhängige, Term, daß die Summe nicht gleich Null sein kann. Ebensowenig kann die Summe $\Psi_{1x}(\tau^0) + \Psi_{2x}(t)$ für endliche oder unendliche Werte von t verschwinden; es wird vielmehr:

$$\frac{1}{c}\left[\Psi_{1x}\left(\frac{2\,a}{c + v}\right) + \Psi_{2x}\left(\frac{2\,a}{c - v}\right)\right] = \frac{2\,\varepsilon\,a\,\omega^3}{(1+\omega)^4}(2 + \omega^2)$$

$$+ \frac{\varepsilon\,a\,(1-\omega)}{10(1+\omega)}\left[-2 + 3\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right) - 10\,\omega^4\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^3(1+\omega^2)\right].$$

Auch die ursprüngliche Abrahamsche Ableitung der Gleichung für den stationären Zustand kommt darauf hinaus, daß diese beiden einzelnen Ausdrücke für $t = \infty$ verschwinden (während dies tatsächlich nicht eintritt, sondern nur ihre Summe gleich Null ist); denn nach ihm würde die Kraft für $t = \infty$ in unserer Bezeichnungsweise durch die Funktion:

$$-\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\left[\Phi_{1x}(\tau^0) + \Phi_{2x}(t)\right]_{t=\infty}(1 - \omega^2)$$

dargestellt sein müssen.

Was endlich die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit betrifft ($\omega = 1$), so wird jetzt nach (164):

(170) $$(\mathfrak{F}_x)_{\omega=1} = -\frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi\,a^2}\frac{c\,t}{a}\left(1 - \frac{c\,t}{a} + \frac{1}{5}\left(\frac{c\,t}{a}\right)^3\right) \quad \text{für } t < \frac{2\,a}{c+v},$$

und nach (166) am Ende der zweiten Lage:

---

[1]) Vgl. Göttinger Nachrichten, 1904, S. 398 ff.

$$= -\frac{3\,\varepsilon^2}{20 \cdot \pi \cdot a^2},$$

also in diesem Momente negativ, wie es nach unseren allgemeinen Überlegungen sein muß, wenn ω (hier $= 1$) $> \omega_0$ ist. Endlich nach (168):

$$(170^a) \quad (\mathfrak{F}_x)_{\omega=1} = -\frac{3\,\varepsilon^2}{20 \cdot \pi \cdot a^2} - \frac{3\,\varepsilon^2}{20 \cdot \pi \cdot a^2}\left(\frac{a}{c\,t} - 1\right) = -\frac{3\,\varepsilon^2}{20\,\pi\,a^2}\,\frac{a}{c\,t} \quad \text{für } t > \frac{2\,a}{c+v},$$

also in der Tat gleich Null für $t = \infty$, wie es sein muß, da die obere Grenze des dritten Intervalls $\left(= \frac{2\,a}{c - v}\right)$ selbst unendlich groß wird. Beim Beginne einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit ist also die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Kraft nach (170) verzögernd; und diese Kraft bleibt dauernd verzögernd, indem sie umgekehrt proportional der Zeit abnimmt.

§ 20. Die Bewegung mit konstanter Unterlichtgeschwindigkeit bei der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand.

In § 15 hatten wir die Modifikationen betrachtet, die an den vorhergehenden Untersuchungen anzubringen sind, wenn man die Voraussetzung über den Anfangszustand dahin abändert, daß das Elektron, welches zur Zeit $t = 0$ die Bewegung beginnt, schon vorher seit beliebig langer Zeit seine Ladung besaß, so daß schon bei Beginn der Bewegung ein elektrisches Feld im ganzen Raume vorhanden war. In diesem Falle hatten wir eine Größe t_0 durch die Gleichung (198):

$$(T_0)_{t=t_0} + 2\,a = c\,t_0$$

zu bestimmen, in der T_0 den Wert von T für $\tau = t$ bezeichnet, und dann gelten die früheren Formeln, wenn nur die obere Grenze t der nach τ zu nehmenden Integrale durch $t + t_0$ ersetzt wird. Diese positive Größe t_0 war dadurch so bestimmt, daß die vor der Zeit $t = -t_0$ vom Elektron ausgehenden Kraftwirkungen auf die spätere Bewegung desselben keinen Einfluß mehr ausüben.

Um die einzelnen Intervalle zu bestimmen, hatten wir zunächst die Kurve (200):

$$c\,\tau + T = 2\,a,$$

wenn wieder die frühere geometrische Darstellung benutzt wird, mit der geraden Linie (202):

$$\tau = t + t_0$$

zum Schnitt zu bringen, indem letztere an Stelle der früheren Linie $\tau = t$ tritt. Dies gab den Endpunkt des ersten Intervalles (Ende der zweiten Lage), während der Endpunkt des zweiten Intervalles durch die Kurve (206):

$$c\,\tau - T = 2\,a$$

in entsprechender Weise zu bestimmen war.

Bei Anwendung dieser Formeln ist für die Berechnung von T zu beachten, daß:

$$\xi = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} \mathfrak{v}_x(\tau)\, d\tau$$

zu nehmen ist, sobald $\tau > t$ wird; denn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_x$ ist gleich Null für negative Werte des Arguments.

Wenden wir dies auf das Beispiel der gleichförmigen Bewegung an, so wird:

$$(240)\qquad \begin{aligned} \xi = T = v\tau \quad &\text{für } 0 < \tau < t \\ \xi = T = vt \quad &\;\;\text{„} \;\; t < \tau < t + t_0. \end{aligned}$$

Die Kurve (73[a]) oder (200) wird daher:

$$(241)\qquad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c+v} (= t^0) \quad &\text{für } \tau < t \\ \tau &= -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c} \quad &\text{„} \;\; \tau > t. \end{aligned}$$

Ersteres ist eine Parallele zur Achse $\tau = 0$, letzteres eine Gerade, die erstere in ihrem Schnittpunkte mit der Linie $\tau = t$ trifft, und die Achse $t = 0$ im Punkte $\tau = \frac{2a}{c}$ schneidet; sie ist in beistehender Figur 18 durch P_1 bezeichnet. Ebenso gibt obige Kurve (206) jetzt:

$$(242)\qquad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c-v} (= t') \quad &\text{für } \tau < t \\ \tau &= \frac{v}{c} t + \frac{2a}{c} \quad &\text{„} \;\; \tau > t. \end{aligned}$$

Letztere Linie (P_2 in Fig. 18) schneidet die Linie P_1 in ihrem Schnittpunkte mit der Achse $t = 0$ und trifft die Linie $\tau = t$ in demselben Punkte, durch den auch die Gerade $\tau = t'$ hindurchgeht. Die Kurven (200) und (206) erhalten also jetzt in ihren Schnittpunkten mit der Linie $\tau = t$ einen Knick, wie es Figur 18 veranschaulicht, während ich bei der früheren Behandlung diese Knickung nicht beachtet hatte. Diese Abänderung wird bei der Kleinheit des Intervalles $0 < t < t_0$ nicht von großem Einfluß sein, gewinnt aber im Falle der gleichförmigen Bewegung doch prinzipielle Wichtigkeit.

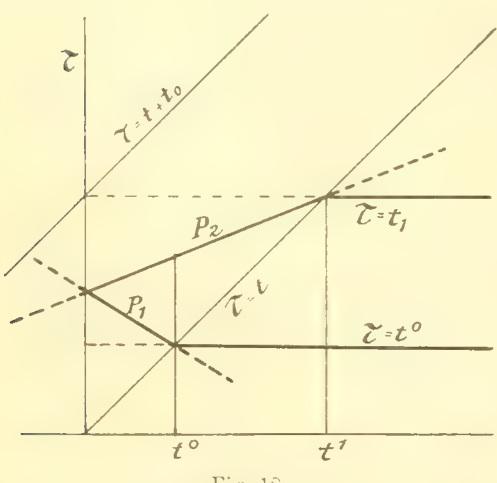


Fig. 18.

Der Schnitt der Linie P_1 (d. h. der zweiten Linie (240)) mit der Geraden $\tau = t + t_0$ ergibt als Grenze des ersten Intervalles den Wert:

$$t^0 = \frac{2a}{v+c} - \frac{t_0 c}{v+c} = \frac{2a}{v+c}\left(1 - \frac{c}{c-v}\right),$$

denn es ist hier nach (198), wie früher in § 15, $t_0 = \frac{2a}{c-v}$ zu setzen. Dieser Wert ist negativ und kommt daher nicht in Betracht.

Das Ende des zweiten Intervalls (der dritten Lage) wird gefunden, indem wir die Linie P_2 (zweite Linie (242)) mit der Linie $\tau = t + t_0$ zum Schnitt bringen; das gibt:

$$t' = \frac{2a}{c-v}\left(1 - \frac{c}{c-v}\right),$$

also ebenfalls negativ, und für uns nicht brauchbar.

Die früheren Formeln des dritten Intervalls sind also (bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand) sofort bei Beginn der Bewegung anzuwenden, wie wir auch in § 15 gefunden hatten. Es ist also:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon c}{4\pi a^3}\left[\Phi_1(\tau^0) + \Phi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right) + \frac{1}{c}\Psi_1(\tau^0) + \frac{1}{c}\Psi_2\left(\frac{2a}{c-v}\right)\right] \tag{243}$$

für alle Werte von t.

Aber bei Auswertung der rechts stehenden Integrale ist die verschiedenartige Definition von τ^0 ($\tau < t$ und $\tau > t$) zu beachten; und dadurch ergibt sich die Notwendigkeit wieder verschiedene Fälle und Zeitintervalle zu unterscheiden.

Es ist allgemein nach (71) und (197):

$$\varphi_x = \Phi_x(t, t) + \Phi'_x(t + t_0, t),$$

wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} \Phi_x(t, t) &= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3}\int_0^t d\tau \iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz, \\ \Phi'_x(t + t_0, t) &= \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a^3}\int_t^{t+t_0} d\tau \iiint \frac{S}{R}\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{244}$$

Das erste Integral stimmt vollständig mit demjenigen überein, das wir oben mit Hilfe der Funktion Φ_{1x} und Φ_{2x} auswerteten; das Integral Φ' dagegen bedarf erneuter Behandlung, indem für den Fall der gleichförmigen Bewegung unter den Integralzeichen T nicht gleich $v\tau$, sondern gemäß (240) gleich vt gesetzt werden muß. Wir haben demnach folgende Reihe von Intervallen:

Erstes Intervall $0 < t < \frac{2a}{c+v}$ $(= t^0)$. Wir erhalten aus Gleichung (68), § 18:

$$\Phi'_x(a, t) \doteq \Phi'_{1x}(a, t) = \frac{\varepsilon c}{20 a^3}\int_t^a v\,t\,(v^2 t^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2)\,d\tau,$$

wenn a kleiner als der durch die zweite Gleichung (241) bestimmte Wert:

$$\tau^{00} = -\frac{v}{c}t + \frac{2a}{c} \tag{245}$$

ist; denn für das Intervall $t < \tau < t + t_0$ wird die Grenze der Anwendbarkeit der Formel (68), § 18 jetzt durch diese Gleichung (241) bestimmt, d. h. in Figur 18 durch die gerade Linie P_1. Für unsern Fall kann also τ bis zu dieser Grenze wachsen, so daß wir erhalten:

$$\Phi'_x(\tau^{00}, t) = \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) = \frac{\varepsilon c v t}{20 a^3} \int_t^{\tau^{00}} (v^2 t^2 - 10 a^2 + 5 c^2 \tau^2)\, d\tau, \tag{246}$$

wo τ^{00} durch (245) definiert wird. Die Linie P_1 wird aber nur für $t < t^0$ von der in der Entfernung t zur τ-Achse gezogenen Parallelen innerhalb des von den Geraden $\tau = t$ und $\tau = -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c}$ begrenzten Streifens getroffen. Die Anwendbarkeit der Formel (246) bleibt daher auf das bezeichnete erste Intervall beschränkt. Die Ausführung der Integration ergibt:

$$\frac{\varepsilon c v t}{20 a^3} \left[(\tau^{00} - t)(v^2 t^2 - 10 a^2) + \tfrac{5}{3} c^2 (\tau^{00\,3} - t^3)\right],$$

oder:

$$\Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) = \frac{\varepsilon\omega}{15}\left(\frac{ct}{a}\right)\left[1 - (1+\omega)\frac{ct}{2a}\right]\left[(16\omega^2 - 10\omega + 10)\left(\frac{ct}{2a}\right)^2 + 10(1 - 2\omega)\frac{ct}{2a} - 5\right]. \tag{247}$$

Es ist bemerkenswert, daß dieser Ausdruck für:

$$\frac{ct}{2a} = \frac{1}{1+\omega},$$

d. h. an der oberen Grenze des Intervalles verschwindet.

Wächst jetzt bei der Integration (von $\tau = 0$ bis $\tau = t + t_0$) die Variable τ über τ^{00} hinaus, so haben wir die Formel (175), § 18 anzuwenden; es ist:

$$\Phi'_x(a, t) = \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) + \Phi'_{2x}(a, t),$$

wenn gemäß obigem Resultate:

$$\Phi'_{2x}(a, t) = \frac{3\varepsilon c}{8a} \int_{\tau^{00}}^{a} \frac{\xi}{T} \left[(a^2 - c^2\tau^2) U_1 - U_2 + c\tau \sin^2 \Theta_1\right] d\tau \tag{248}$$

gesetzt wird, oder nach (75ᵃ), § 18 unter Berücksichtigung der zweiten Gleichung (240):

$$\Phi'_{2x}(a, t) = \frac{3\varepsilon c}{480 a^3 v^2 t^2} \int_{\tau^{00}}^{a} \left[-32 a^5 + 40 a^3 (c^2\tau^2 - v^2 t^2) - 20 a^2 (c\tau - vt)^2 (c\tau + 2vt) + (c\tau - vt)^4 (c\tau + 4vt)\right] d\tau. \tag{249}$$

Zum Zwecke der Integration schreiben wir die eckige Klammer in der Form:

$$-32 a^5 + 80 a^3 v t (c\tau - vt) + 40 a^3 (c\tau - vt)^2 - 20 a^2 (c\tau - vt)^3 - 60 a^2 v t (c\tau - vt)^2 + 5 v t (c\tau - vt)^4 + (c\tau - vt)^5,$$

und die unbestimmte Integration ergibt:

$$\frac{1}{c}\left[-32 a^5 (c\tau - vt) + 40 a^3 v t (c\tau - vt)^2 + \tfrac{1}{3}(40 a^3 - 60 a^2 v t)(c\tau - vt)^3 - 5 a^2 (c\tau - vt)^4 + v t (c\tau - vt)^5 + \tfrac{1}{6}(c\tau - vt)^6\right]. \tag{249a}$$

Die Variable τ kann bis zu dem durch die zweite Gleichung (242) bestimmten Werte:

(250)
$$\tau_{01} = \omega t + \frac{2a}{c}$$

wachsen: geht ihr Wert darüber hinaus, so verschwindet das Integral gemäß den allgemeinen Erörterungen in § 7. In Φ'_{2x} ist daher als obere Grenze für α der Wert τ_{01} einzusetzen; als untere Grenze ist τ^{00} gegeben. Nun haben wir: $\tau_{01} - \omega t = \frac{2a}{c}$; für die obere Grenze erhalten wir also:

$$\frac{2a^6}{c}\left[-32 + 160\,\omega\frac{ct}{2a} + \frac{160}{3}\left(1 - 3\,\omega\frac{ct}{2a}\right) - 40 + 32\,\omega\frac{ct}{2a} + \frac{16}{3}\right]$$
$$= -\frac{16}{3}\frac{a^6}{c}\left(5 - 12\,\omega\frac{ct}{2a}\right) = \frac{a^6}{c}\cdot\gamma_1\left(\omega\frac{ct}{a}\right)$$

und für die untere Grenze, da:

$$\tau^{00} - \omega t = -2\,\omega t + \frac{2a}{c}$$

zu nehmen ist:

$$\frac{2a^6}{c}\left(1 - \omega\frac{ct}{a}\right)\left[-32 + 80\,\omega\frac{ct}{a}\left(1 - \omega\frac{ct}{a}\right) + \frac{160}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\,\omega\frac{ct}{a}\right)\left(1 - \omega\frac{ct}{a}\right)^2\right.$$
$$\left. - 40\left(1 - \omega\frac{ct}{a}\right)^3 + 16\,\omega\frac{ct}{a}\left(1 - \omega\frac{ct}{a}\right)^4 + \frac{16}{3}\left(1 - \omega\frac{ct}{a}\right)^5\right] = \frac{a^6}{c}\cdot\gamma_2\left(\omega\frac{ct}{a}\right).$$

Führen wir für die hier auftretenden ganzen Funktionen die angedeuteten abkürzenden Bezeichnungen γ_1 und γ_2 ein, so wird:

(251)
$$\Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) = \frac{3\varepsilon a}{480\,\omega^2\left(\frac{ct}{a}\right)^2}\left[\gamma_1\left(\omega\frac{ct}{a}\right) - \gamma_2\left(\omega\frac{ct}{a}\right)\right].$$

Man sieht sofort, daß bei weiterer Ausrechnung das Glied mit ω^{-2} den Faktor Null erhält; für kleine Werte von ω überwiegt also das Glied mit $\omega^{-1}\left(\frac{ct}{a}\right)^{-1}$. Es ist hiernach die in (244) eingeführte Funktion Φ'_x gegeben durch die Gleichung:

(252)
$$\Phi'_x(t + t_0, t) = \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) + \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) \quad \text{für } 0 < t < \frac{2a}{c+v},$$

wo Φ'_{1x} durch (247), Φ'_{2x} durch (251) bestimmt wird.

Zur Berechnung der Kraft haben wir die Funktionen Ψ_{1x} und Ψ_{2x} entsprechend zu behandeln. Nach (97) und (107) ist:

$$\Psi_x(a, t) = \frac{3\varepsilon}{2\pi^2 a^3}\int_0^{\alpha} \mathfrak{v}_x(t - \tau)\,d\tau \iiint \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)\frac{dx\,dy\,dz}{R},$$

wo $\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)$ durch die Gleichungen (96), (96ᵃ), (96ᵇ) definiert ist. Da aber $\mathfrak{v}_x(t - \tau)$ gleich Null zu nehmen ist, sobald $\tau > t$ wird (da dann das Elektron ruht), so ist stets:

(253)
$$\Psi_x(a, t) = \Psi_x(t, t) \quad \text{für } a > t.$$

Das Integral Ψ_x hat deshalb bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand denselben Wert wie früher; derselbe ist in § 12 für den Fall der konstanten Unterlichtgeschwindigkeit genau berechnet. Für die wirkende Kraft erhalten wir so im ersten Intervalle die Gleichung:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon^2}{4\,\pi^2\,a^3}\left[\Phi_{1x}(t,t) + \Phi'_{1x}(\tau^{00}, t) + \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_{1x}(t,t)\right] \tag{254}$$

$$\text{für } 0 < t < \frac{2\,a}{c+v};$$

hierbei ist Φ_{1x} durch (163), § 18, Φ'_{1x} durch (247), Φ'_{2x} durch (251), τ^{00} durch (245), τ_{01} durch (250), Ψ_{1x} durch (163ª), § 18 gegeben; das erste Argument der Funktion Ψ_{1x} ist dadurch bestimmt, daß für diese Funktion nach (253) die früheren Formeln gelten, und wir uns im früheren Sinne jetzt im ersten Intervalle befinden.

Zweites Intervall $t^0 < t < t'$, wo wieder:

$$t^0 = \frac{2\,a}{c+v}, \quad t' = \frac{2\,a}{c-v}.$$

Eine Parallele zur Achse $t = 0$ schneidet jetzt die Strecke P_1 nicht mehr; aber die Linie $\tau = t^0$ kommt jetzt in Betracht und bestimmt für die frühere Funktion Φ_{1x} und Φ_{2x} die sie trennende Grenze. Die Kraft wird demnach:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi^2\,a^3}\Big[\Phi_{1x}(t^0, t) + \Phi_{2x}(t,t) + \Phi'_{2x}(\tau_{01}, t) - \Phi'_{2x}(t,t) \tag{255}$$

$$+ \frac{1}{c}\,\Psi_{1x}(t^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_{2x}(t,t)\Big] \quad \text{für } \frac{2\,a}{c+v} < t < \frac{2\,a}{c-v}.$$

Die Funktionen Φ und Ψ sind hier so, wie in (254) definiert, Φ_{2x} und Ψ_{2x} durch (167ª) bzw. (167ᵇ), § 18. Das Integral Φ'_{2x} hatte in (251) die untere Grenze τ^{00}; jetzt wird statt dessen, wie aus Figur 18 hervorgeht, die untere Grenze t gebraucht; deshalb tritt die Differenz $\Phi'(\tau_{01}) - \Phi'(t)$ auf. Nach (249ª) ist $\Phi'(t)$ bis auf eine additive Konstante, die in der Differenz herausfällt, gleich:

$$\frac{3\,\varepsilon\,a}{480\,\omega^2}\left(\frac{a}{c\,t}\right)^2 \cdot \gamma_3\left(\frac{c\,t}{a}\right),$$

wenn:

$$\gamma_3\left(\frac{c\,t}{a}\right) = (1-\omega)\left(\frac{c\,t}{a}\right)\left[-32 + 40\,\omega\left(\frac{c\,t}{a}\right)^2(1-\omega) + \frac{40}{3}\left(1 - \frac{3}{2}\,\omega\,\frac{c\,t}{a}\right)\left(\frac{c\,t}{a}\right)^2(1-\omega)^2\right.$$

$$\left. - 5\left(\frac{c\,t}{a}\right)^3(1-\omega)^3 + \omega\left(\frac{c\,t}{a}\right)^5(1-\omega)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{c\,t}{a}\right)^5(1-\omega)^5\right];$$

es wird dann:

$$\Phi'_{2x}(\tau_{01}) - \Phi'_{2x}(t) = \frac{3\,\varepsilon\,a}{480\,\omega^2\left(\frac{c\,t}{a}\right)^2}\left[\gamma_1\left(\omega\,\frac{c\,t}{a}\right) - \gamma_3\left(\frac{c\,t}{a}\right)\right]. \tag{256}$$

Das in γ_3 vorkommende Glied mit dem Faktor ω^{-2} hebt sich hier nicht gegen ein entsprechendes Glied in γ_1 fort; denn das in γ_1 vorkommende Glied mit dem Faktor ω^{-2} ist von t unabhängig, das entsprechende Glied in γ_3 aber enthält den Faktor $\frac{ct}{a}$.

Drittes Intervall $t > t'$. Hier wird eine Parallele zur Achse $t = 0$ innerhalb des zwischen den Linien $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ liegenden Parallelstreifens von den Geraden P_1 und P_2 nicht mehr getroffen (vgl. Fig. 18). Hier gelten also die früheren, in § 18 aufgestellten Relationen, und die Funktionen Φ_1' und Φ_2' kommen nicht mehr in Betracht. Es wird nach (169[a]), § 18:

$$(257)\quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\varepsilon}{4\pi^2 a^3}\left[\Phi_{1x}\left(\frac{2a}{c+v}\right) + \Phi_{2x}\left(\frac{2a}{c-v}\right) + \frac{1}{c}\Psi_{1x}\left(\frac{2a}{c+v}\right) + \frac{1}{c}\Psi_{2x}\left(\frac{2a}{c-v}\right)\right] \\ &= 0 \qquad \text{für } t > \frac{2a}{c-v}. \end{aligned}$$

Im stationären Zustand erfolgt also auch bei der jetzigen Voraussetzung über den Anfangszustand die Bewegung kräftefrei.

Will man aber von der Elektronenbewegung Anwendungen auf die Mechanik machen, um letztere elektrodynamisch aufzufassen, so handelt es sich immer um den Übergang aus der Ruhelage zur Bewegung; nach unseren Resultaten wirken bei Beginn der Bewegung stets verzögernde Kräfte des Elektrons auf sich selbst. Da wir kein Mittel haben, diese Kraft willkürlich aufzuheben, so geschieht also eine Bewegung, die etwa eine sehr kleine Zeit mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt ist, im nächsten Momente schon mit anderer Geschwindigkeit; es kann also in Wirklichkeit der stationäre kräftefreie Zustand niemals zustande kommen.

Man könnte einwerfen, daß es überhaupt keine ruhenden Elemente gibt, indem die gewöhnliche Mechanik nur von relativer Ruhe spricht, hier aber absolute Ruhe (für $t < 0$) vorausgesetzt wurde. Das ist allerdings richtig; aber dann erfolgen die Bewegungen schwerlich mit konstanter Geschwindigkeit; wenn dies aber doch geschehen sollte, so hätte die Dynamik die Aufgabe, den Einfluß einer Geschwindigkeitsänderung zu untersuchen, und da würde sich sofort in ganz analoger Weise ergeben, daß das Elektron dabei eine verzögernde Kraft auf sich selbst ausübt.

Ganz analoge Schwierigkeiten ergeben sich, wenn man den elektrischen Strom als eine Elektronenbewegung mit konstanter Geschwindigkeit auffassen will; denn man sieht nicht ein, wie eine solche Bewegung zustande kommt. Bei dem Sommerfeldschen Resultate dagegen, nach welchem eine kräftefreie Bewegung von Anfang an (d. h. von $t = -\infty$ an) bestehen sollte, hätte man sich vorstellen können, daß die erwähnte Schwierigkeit zu überwinden sei. Überdies ist zu beachten, daß jene Sommerfeldschen Formeln für die elektrischen und magnetischen Kräfte je für sich nicht die richtigen Ausdrücke ergeben (vgl. § 19).

Die Zeit, während welcher die anfängliche verzögernde Kraft wirkt, ist allerdings bei geringen Geschwindigkeiten außerordentlich klein $\left(= \frac{2a}{c-v}\right)$, aber bei größeren Werten von v (wie z. B. beim elektrischen Strome) wird ihre Dauer beträchtlich. Auch

die Kraft, die als Funktion von $\frac{ct}{a}$ und von $\omega = \frac{v}{c}$ gefunden wurde, ist nicht zu vernachlässigen, da sie negative Potenzen von ω und t enthält, wie aus den Gleichungen (255) und (256) hervorgeht.

Es bleibt noch zu vergleichen, wie sich die Sommerfeldschen Formeln bei dem jetzt betrachteten Anfangszustande verhalten. Wie schon hervorgehoben wurde (vgl. § 16) stimmt seine Fundamentalformel, aus der alles andere durch scheinbar zulässige Operationen abgeleitet wird, mit unserer Gleichung (34), § 3 wesentlich überein. Diese Gleichung aber bezieht sich ausschließlich auf den von uns zuerst vorausgesetzten Anfangszustand, also für gleichförmige Bewegung, auf den soeben in § 19 behandelten Fall. Die jetzt in § 20 (und früher in § 15) gemachte (physikalisch näher liegende) Voraussetzung über den Anfangszustand wird daher von Sommerfeld in seiner ursprünglichen Arbeit nicht behandelt; darauf bezieht sich aber die spätere Fortsetzung.[1]) Hier wird die Bedingung $T = v\tau$ für $\tau < t$ und $T = vt$ für $\tau > t$ eingeführt, also die jetzige zweite Voraussetzung berücksichtigt; für dieselbe wird auch eine verzögernde Kraft gefunden; da aber seine allgemeine Ausgangsformel (nach den von ihm vorgenommenen Umformungen) mit der unsrigen nicht übereinstimmt, so sind natürlich auch seine Resultate von den unsrigen verschieden.

Die Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit erhält man, indem man in vorstehenden Formeln $\omega = 1$ setzt. Dann wird die durch (250) dargestellte Linie P_2 (Fig. 18) parallel zur Linie $\tau = t$, und der Einfluß des Anfangszustandes dauert für alle Zeiten fort; die Größe t_0 wird unendlich groß; die Linie $\tau = t + t_0$ verschiebt sich also ins Unendliche, und wir kommen so niemals aus dem zweiten Intervalle heraus, in welchem eine von t abhängige verzögernde Kraft gemäß Gleichung (255) dauernd wirkt.

§ 21. **Die Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit.**

Ebenso wie bei Unterlichtgeschwindigkeit ist bei Überlichtgeschwindigkeit in den Integralen Φ_1^* und Φ_2^* überall der Faktor 2 im Nenner hinzuzufügen, also insbesondere in den Gleichungen (123), (126), (127), (128) und (135), vgl. S. 342. Dasselbe gilt dann für das Beispiel der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit in § 13; wir erhalten jetzt:

$$(171)\quad \varphi_x = \Phi_{0x}^*(t) + \Phi_{1x}^*(t) = \frac{\varepsilon a}{20\,\omega^2}\left(\frac{ct}{2a}\right)^2\left[(10 - 30\,\omega^2) + (23 - 14\,\omega^2 + 15\,\omega^4)\left(\frac{ct}{2a}\right)^2\right]$$

und am Ende der ersten Lage den Wert:

$$(172)\qquad \varphi_x\left(\frac{2a}{v+c}\right) = \frac{\varepsilon a}{20\,\omega^2(1+\omega)^4}(33 + 20\,\omega - 34\,\omega^2 - 60\,\omega^3 - 15\,\omega^4),$$

und für die wirkende Kraft in der ersten Lage erhalten wir den Wert:

$$(174)\quad \mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\pi a^3}\left(\varphi_x + \frac{1}{c}V_x\right) = -\frac{3\,\varepsilon^2}{4\pi a^2\omega^2}\left[2\,\omega^3\left(\frac{ct}{2a}\right) + \frac{1}{2}(1 - 6\,\omega^2 - 3\,\omega^4)\left(\frac{ct}{2a}\right)^2 + \frac{1}{20}(23 - 9\,\omega^2 + 45\,\omega^4 + 5\,\omega^6)\left(\frac{ct}{2a}\right)^4\right].$$

[1]) Göttinger Nachrichten 1905, S. 201 ff.

In (175^a) und (175^b) ist auf der rechten Seite wieder der Nenner 2 hinzuzufügen. Da die Berechnung der Kraft nicht weiter durchgeführt wurde, so wird an den weiteren Formeln von § 13 nichts geändert.

Geht man von der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand aus, so beginnt die Bewegung in der dritten Lage, so daß sofort vom Beginne ab die entsprechenden Gleichungen zur Anwendung kommen. Es ist die früher für den stationären Endzustand anzuwendende Formel. Die Ausführung der Integration muß aber jetzt in etwas anderer Weise geschehen, ganz wie es für Unterlichtgeschwindigkeit in § 20 soeben erörtert wurde. Entsprechend zu den Gleichungen (240) haben wir:

$$(258) \quad \begin{aligned} \xi &= T = v\tau \quad \text{für } 0 < \tau < t \\ \xi &= T = vt \quad \text{"} \quad t < \tau < t + t_0, \quad \text{wo } t_0 = \frac{2a}{v-c}, \end{aligned}$$

und die kritischen Kurven werden:

$$(259) \quad \begin{aligned} \tau &= \frac{2a}{c+v} (= t^0) \quad &&\text{für } \tau < t \\ \tau &= -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c} \quad &&\text{"} \quad \tau > t; \end{aligned}$$

sie liegen ganz analog, wie die entsprechenden in Figur 18; nur ist jetzt $\frac{v}{c} > 1$, die Neigung gegen die t-Achse also größer als 45^0. Die wirkende Kraft wird, analog zu (254), gleich folgendem Ausdrucke gefunden, wie sogleich näher erörtert werden soll:

$$(260) \quad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3} \Big[& \Phi^{\cdot}_{0x}(t,t) + \Phi^{\cdot}_{1x}(t,t) + \Phi^{\cdot\cdot}_{0x}(\tau^{00},t) - \Phi^{\cdot\cdot}_{0x}(t,t) \\ & + \Phi^{\cdot\cdot}_{1x}(\tau^{00},t) - \Phi^{\cdot\cdot}_{1x}(t,t) + \Phi^{\cdot\cdot}_{2x}(t+t_0,t) - \Phi^{\cdot\cdot}_{2x}(\tau^{00},t) + \frac{1}{c}\Psi^{\cdot}_{1x}(t,t) \Big]. \end{aligned}$$

Die Glieder mit den Funktionen Φ_0, Φ_1, Φ_0', Φ_1', Ψ_1 sind nach Analogie zu (254) sofort verständlich; aus den Gleichungen (128) ergeben sich folgende Definitionen, indem man dort $T = vt$ setzt und jetzt unter τ^{00} den aus der zweiten Gleichung (259) fließenden Wert:

$$(261) \quad \tau^{00} = -\frac{v}{c} t + \frac{2a}{c}$$

versteht (vgl. S. 280 und 342):

$$(262) \quad \begin{aligned} \Phi^{\cdot\cdot}_{0x}(a,t) &= \frac{\varepsilon c^2}{20 a^3 v^2 t^2} \int_0^{a} \tau \left[6 c^4 \tau^4 - 10 a^2 c^2 \tau^2 + (c^2\tau^2 - v^2 t^2)(15 a c \tau - 4 c^2 \tau^2)\right] d\tau \\ \Phi^{\cdot\cdot}_{1x}(a,t) &= \frac{3\varepsilon c^2}{16 a^3 v^2 t^2} \int_0^{a} \tau (v^2 t^2 - c^2\tau^2)(vt + c\tau - 2a)(vt - c\tau + 2a)\, d\tau. \end{aligned}$$

Um das Glied mit $\Phi^{\cdot\cdot}_{2x}$ zu begründen, müssen wir zunächst die zweite kritische Kurve in ihrem Verlaufe innerhalb des Parallelstreifens ($\tau = t$ und $\tau = t + t_0$) untersuchen; ihre Gleichung $T - c\tau = 2a$ wird hier:

$$(263) \quad vt - c\tau = 2a.$$

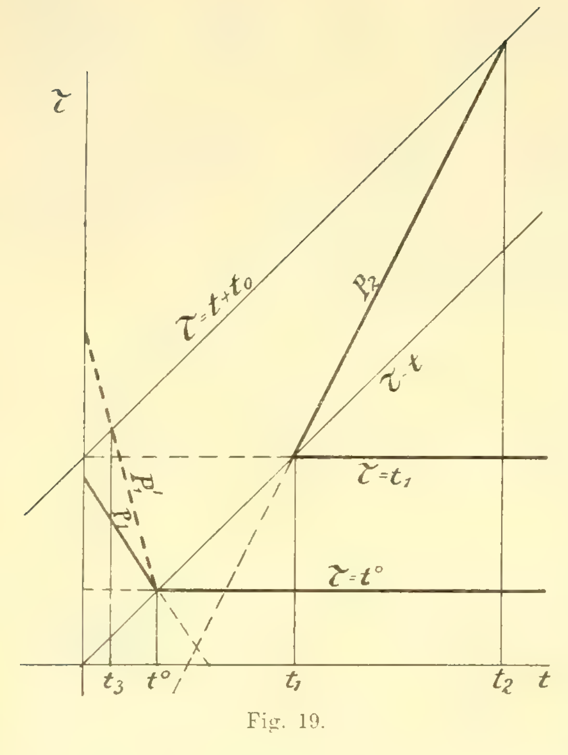


Fig. 19.

Sie stellt eine gerade Linie dar, welche in Fig. 19 mit P_2 bezeichnet ist; sie schneidet die Achse $t=0$ im Punkte $\tau=-\frac{2a}{c}$ und die Linie $\tau=t$ im Punkte $\tau=t=\frac{2a}{v-c}$, die Achse $\tau=0$ im Punkte $t=\frac{2a}{v}>\frac{2a}{v+c}$; sie verläuft also ganz unterhalb der Linie $\tau=t$ für $0<t<\frac{2a}{v-c}$; erst für $t>\frac{2a}{v-c}$ tritt sie in den Streifen zwischen den Parallelen $\tau=t$ und $\tau=t+t_0$ ein, der für uns jetzt in Betracht kommt. Nun liefert nach unseren allgemeinen Erörterungen in § 10 das Integral Φ_2^* einen von Null verschiedenen Beitrag nur in dem Gebiete, der τ-t-Ebene, in welchem:

$$(264)\qquad T+c\tau>2a,\quad T-c\tau<2a$$

ist. Dieses Gebiet ist in unserem Falle zwischen den Linien P_1 und P_2 (und den Linien $\tau=t$ und $\tau=t+t_0$) in Figur 19 eingeschlossen. Für $t<t^0$ kommt daher für τ das Intervall von τ^{00} bis $t+t_0$ in Betracht, wie aus der erwähnten Figur sofort ersichtlich ist; und zwar ist das Integral $\Phi_{2x}^{\prime *}$ hier durch folgende Gleichung definiert:

$$(265)\qquad \Phi_{2x}^{\prime *}(\alpha,t)-\Phi_{2x}^{\prime *}(\beta,t)=\frac{3\varepsilon c}{8a}\int_{\beta}^{\alpha}[(a^2-c^2\tau^2)\,W_1^*-W_2^*+2c\tau\,W_0^*]\,d\tau,$$

wobei nach (134) (134^e) zu setzen ist.

$$W_0^*=\frac{c^2\tau^2-v^2t^2}{8a^2v^2t^2}[c^2\tau^2-v^2t^2+4a^2+4ac\tau],$$

$$(266)\quad W_1^*=\frac{1}{6a^2v^2t^2}[2(a^2+v^2t^2+avt)\sqrt{(a-vt)^2}-\{3a^2+3v^2t^2-(a+c\tau)^2\}(a+c\tau)],$$

$$W_2^*=\frac{1}{30a^2v^2t^2}[2(a^2+v^2t^2+3avt)(\sqrt{(a-vt)^2})^3-(a+c\tau)^3\{5(a^2+v^2\tau^2)-3(a+c\tau)^2\}],$$

wenn über das Vorzeichen der Quadratwurzel in der sogleich zu besprechenden Weise verfügt wird.

Um das Gültigkeitsintervall der Formel (260) genau festzustellen, muß man noch die Fälle:

$$c<v<2c\quad\text{und}\quad v>2c$$

unterscheiden. Im ersten Falle ($c<v<2c$) liegt die Gerade P_1 so, wie in Figur 19 die stark angezogene Linie; sie schneidet die Achse $t=0$ zwischen den Punkten $\tau=\frac{2a}{c+v}=t^0$

und $\tau = \frac{2a}{v-c}$. In diesem Falle gilt die Formel (260) für das ganze Intervall $0 < t < \frac{2a}{c+v}$.

Im anderen Falle ($v > 2c$) schneidet die Linie P_1 (d. i. die punktierte Linie P_1' in Fig. 19) die Achse $t = 0$ oberhalb der Stelle $\tau = \frac{2a}{v-c}$; sie trifft deshalb die Linie $\tau = t + t_0$ in dem Punkte:

$$\tau = \frac{4av}{v^2 - c^2}, \quad t = \frac{2a(v-2c)}{v^2 - c^2} \quad (= t_3), \tag{267}$$

welcher auf der Seite $t > 0$ liegt und deshalb zu berücksichtigen ist. Da nun die Integration ursprünglich gemäß (244) bis zur Grenze $t + t_0$ ausgedehnt werden soll, und da jetzt ein Teil der Linie $\tau = t + t_0$ noch unterhalb der Linie P_1 liegt, so haben wir an Stelle von (260), wenn der Index x an Φ und Ψ fortgelassen wird:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\Big[\Phi_0^*(t,t) + \Phi_1^*(t,t) + \Phi_0'^*(t+t_0, t) - \Phi_0'^*(t,t) + \Phi_1'^*(t+t_0,t) - \Phi_1'^*(t,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(t,t)\Big] \quad \text{für } 0 < t < t_3, \tag{268}$$

wo t_3 durch (267) definiert ist, und:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\Big[\Phi_0^*(t,t) + \Phi_1^*(t,t) + \Phi_0'^*(\tau^{00}, t) - \Phi_0'^*(t,t) + \Phi_1'^*(\tau^{00},t) - \Phi_1'^*(t,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(t,t) + \Phi_2'^*(t+t_0,t) - \Phi_2'(\tau^{00},t)\Big] \quad \text{für } t_3 < t < t^0. \tag{269}$$

Diese beiden Gleichungen gelten im zweiten Falle ($v > 2c$) an Stelle der Gleichung (260).

Es erübrigt noch das Vorzeichen der in den Ausdrücken W_1^* und W_2^* gemäß (266) vorkommenden Quadratwurzel zu bestimmen. Für $t < t^0$ ist:

$$vt + ct < 2a, \quad \text{also} \quad vt < 2a.$$

Demgemäß zerfällt das Intervall $0 < t < t^0$, in dem die Gleichung (260) gilt, in zwei Teile; für $0 < t < \frac{a}{v}$ ist in (266) der Ausdruck $\sqrt{(a - vt)^2}$ gleich $vt - a$ zu setzen, dagegen für $\frac{a}{v} < t < t^0$ ist derselbe Ausdruck gleich $a - vt$ zu wählen (vgl. die allgemeine Erörterung hierüber auf S. 283). Im zweiten Falle ($v > 2c$) ist in gleicher Weise das Intervall, in welchem die Gleichung (268) gilt, in zwei Teilintervalle zu zerlegen oder dasjenige für Gleichung (269), und zwar je nachdem ω außerhalb oder innerhalb der Werte $2 \pm \sqrt{3}$ liegt.

Zwischen den Linien $t = t^0$ und $t = t_1$ liegen die Linien P_1 und P_2 ganz innerhalb des Gebietes $\tau < t$, kommen also nicht in Betracht und wir erhalten (vgl. Figur 19):

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\Big[\Phi_0^*(t^0,t) + \Phi_1^*(t^0,t) + \Phi_2^*(t,t) - \Phi_2^*(t^0,t) + \Phi_2'^*(t+t_0,t) - \Phi_2'^*(t,t) \tag{270}$$
$$+ \frac{1}{c}\Psi_1^*(t^0,t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(t,t) - \frac{1}{c}\Psi_2^*(t^0,t)\Big] \quad \text{für } (t^0 =)\,\frac{2\,a}{c+v} < t < \frac{2\,a}{v-c}\,(=t_1).$$

Wächst t über den Wert t_1 hinaus, so tritt die Linie P_2 in den Parallelstreifen zwischen den Linien $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ ein; sie ist daher mit zu berücksichtigen; sie zeigt uns, wie der Einfluß des Anfangszustandes allmählich verschwindet. Wir müssen jetzt den Wert von τ, welcher sich aus der Gleichung der Linie P_2, d. h. aus (263), ergibt:

$$\tau_{01} = \frac{v}{c}\,t - \frac{2\,a}{c}, \tag{271}$$

in die Integralgrenze von $\Phi_2'^*$ einführen und finden:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\Big[\Phi_0^*(t^0,t) + \Phi_1^*(t^0,t) + \Phi_2^*(t_1,t) - \Phi_2^*(t^0,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(t^0,t) \tag{272}$$
$$+ \frac{1}{c}\Psi_2^*(t_1,t) - \frac{1}{c}\Psi_2^*(t^0,t) + \Phi_2'^*(t+t_0,t) - \Phi_2'^*(\tau_{01},t)\Big] \quad \text{für } t_1 < t < \frac{2\,a\,v}{(v-c)^2} \;\; (=t_2),$$

denn in dem Punkte $t = \frac{2\,a\,v}{(v-c)^2}$ wird die Linie $\tau = t + t_0$ von der Linie P_2 geschnitten. Hier tritt letztere aus dem für uns wichtigen Parallelstreifen heraus; es verschwindet somit der Einfluß der Anfangslage ganz und wir erhalten:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\Big[\Phi_0^*(t^0,t) + \Phi_1^*(t^0,t) + \Phi_2^*(t_1,t) - \Phi_2^*(t^0,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(t^0,t) \tag{273}$$
$$+ \frac{1}{c}\Psi_2^*(t_1,t) - \frac{1}{c}\Psi_2^*(t^0,t)\Big] \quad \text{für } t > \frac{2\,a\,v}{(v-c)^2}.$$

I n d i e s e m I n t e r v a l l e e r h a l t e n w i r e i n e k o n s t a n t e K r a f t, da bei konstanter Geschwindigkeit die Funktionen Φ^* und Ψ^* von ihrem zweiten Argumente unabhängig sind (anders $\Phi_1'^*$ und $\Phi_2'^*$).

§ 22. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung bei der zweiten Voraussetzung über den Anfangszustand.

Wie soeben in § 20 die gleichförmige Bewegung unter Annahme des zweiten (in § 15) besprochenen Anfangszustandes genauer behandelt wurde, so ist in gleicher Weise jeder andere Fall zu erledigen; es sei das hier noch an dem Beispiele der gleichförmig beschleunigten Bewegung gezeigt. Analog zu (240) haben wir hier gemäß Gleichung (179):

$$\begin{aligned} \xi &= T = (v + q\,t)\,\tau - \tfrac{1}{2}\,q\,\tau^2 \quad &&\text{für } 0 < \tau < t, \\ \xi &= T = (v + q\,t)\,t - \tfrac{1}{2}\,q\,t^2 \quad &&\;\;\text{„}\;\; t < \tau < t + t_0. \end{aligned} \tag{274}$$

Dabei ist t_0 gemäß der Gleichung (198) durch den Wert (212) gegeben. Die kritischen Kurven sind also, analog wie in (241):

für $\tau < t$ die Hyperbel H_1 in Figur 14, dargestellt durch die Gleichung (181[b]):

$$q\tau^2 - 2q\tau t - 2(c+v)\tau + 4a = 0, \tag{275}$$

und für $t < \tau < t + t_0$ die Kurve:

$$q t^2 + 2vt + 2c\tau - 4a = 0. \tag{275a}$$

Die Auflösung der letzten Gleichung nach τ gibt den Wert τ^{00}, den wir jetzt an Stelle von obigem Werte (245) zu benutzen haben, nämlich:

$$\tau^{00} = -\frac{1}{2c}(q t^2 + 2vt - 4a). \tag{276}$$

Die Gleichung (275ª) stellt eine Parabel dar, welche die Achse t im Punkte $\tau = \frac{2a}{c}$ trifft, und die Achse $\tau = 0$ in den Punkten:

$$t = -\frac{v}{q} \pm \sqrt{\frac{v^2}{q^2} + \frac{2a}{q}};$$

letztere sind reell; sie trifft die Linie $\tau = t$ in denselben Punkten wie die Hyperbel H_1; wir haben:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{q}{c}t - \frac{v}{c}, \quad \frac{d^2\tau}{dt^2} = -\frac{q}{c};$$

der Scheitel der Parabel liegt also an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = \frac{2a}{c} + \frac{v^2}{2cq};$$

die Kurve ist gegen die Achse $\tau = 0$ konkav gekrümmt; in Figur 20 ist sie mit P_1 bezeichnet; sie tritt an Stelle der geraden Linie P_1 in Figur 18.

Die andere kritische Kurve ist analog zu (242) aufzustellen, nämlich:

für $0 < \tau < t$ die Hyperbel H_2 in Figur 14:

$$q\tau^2 - 2qt\tau + 2(c-v)\tau - 4a = 0 \tag{277}$$

und für $t < \tau < t_0 + t$ die Parabel:

$$q t^2 + 2vt + 4a - 2c\tau = 0. \tag{277a}$$

Die Auflösung ergibt den Wert τ_{01}:

$$\tau_{01} = \frac{1}{2c}(q t^2 + 2vt + 4a). \tag{278}$$

Diese Parabel (P_2 in Figur 20) trifft die Linie $\tau = t$ in denselben Punkten wie die Hyperbel H_2 und schneidet die Achse $t = 0$ in demselben Punkte, wie die Parabel P_1. Sie ist konvex gegen die Achse $\tau = 0$ gekrümmt; ihr Scheitel liegt an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = \frac{2a}{c} - \frac{v^2}{2cq}. \tag{279}$$

Für uns kommen nur die Teile derselben in Betracht, welche zwischen den beiden Parallelen $\tau = t$ und $\tau = t + t_0$ gelegen sind.

Innerhalb dieses Streifens ist aber auch die Grenze zwischen Unter- und Überlichtgeschwindigkeit neu zu bestimmen; sie ist für $\tau < t$ durch die gerade Linie (180) gegeben,

für $\tau > t$ dagegen durch die Gleichung, welche entsteht, wenn man den zweiten Ausdruck für T aus (274) in die Gleichung $T = c\tau$ einsetzt, d. h. durch die Gleichung:

$$c\tau = vt + \tfrac{1}{2} q t^2. \tag{280}$$

Es ist dies eine Parabel, welche durch den Anfangspunkt geht, welche die Linie $\tau = t$ im Schnittpunkte mit der durch (180) dargestellten Linie L, d. h. im Punkte:

$$\tau = t = 2\frac{c - v}{q} + t_0 \tag{281}$$

trifft, und deren Scheitel an der Stelle:

$$t = -\frac{v}{q}, \quad \tau = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{cq}$$

gelegen ist; sie ist in Figur 20 mit L' bezeichnet. Die Parabeln (280) und (277[a]) haben dieselbe Achse; sie schneiden sich nicht (berühren sich im Unendlichen von der dritten Ordnung); die Parabel P_2 verläuft demnach ganz im Gebiete der Unterlichtgeschwindigkeit.

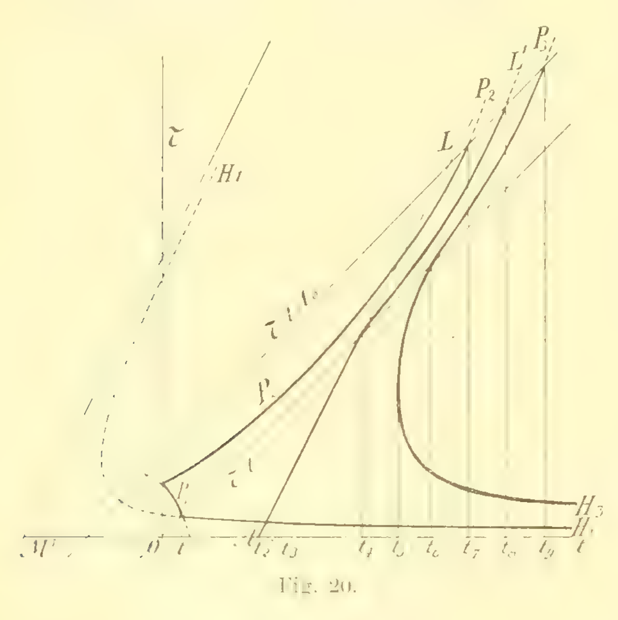


Fig. 20.

Die Parabeln P_1 und P_2 schneiden sich dagegen, und zwar auf der τ-Achse, in dem Punkte:

$$t = 0, \quad \tau = \frac{2a}{c}.$$

Das von diesen Parabeln und der Linie $\tau = t$ gebildete Dreieck spielt hier ganz dieselbe Rolle, wie in Figur 18 das von derselben Linie und den dortigen Linien P_1 und P_2 gebildete Dreieck.

Wir nehmen der Einfachheit wegen an, daß die Schnittpunkte der Hyperbel H_2 mit der Geraden $\tau = t$ imaginär seien; dann schneidet auch die Parabel P_2 diese Gerade nicht, und wir erhalten deren Verlauf wie in Figur 20. Die Kräfte werden in den einzelnen Intervallen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\Big[&\Phi_1(t,t) + \frac{1}{c}\Psi_1(t,t) + \Phi_1'(\tau^{00}, t) - \Phi_1'(t,t) \\ &+ \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(\tau^{00}, t)\Big], \quad \text{für } 0 < t < t^0.\end{aligned} \tag{282}$$

Hierbei ist zu beachten, daß die Funktionen Ψ wegen des bei ihnen unter dem Integralzeichen auftretenden Faktors $\mathfrak{v}_x(t-\tau)$ jetzt in ganz der gleichen Weise auftreten, wie vorher bei der früheren Voraussetzung über den Anfangszustand; es ist das ganz ebenso, wie in § 20. Die Gleichung (282) ist der Gleichung (254) genau analog gebildet. Es ist also Φ_1' gemäß (244) dadurch bestimmt, daß in die allgemeine Gleichung (68), § 18 für T der Wert aus der zweiten Gleichung (274) eingesetzt wird, den wir mit T_0 bezeichnen wollen:

(283) $$T_0 = v\,t + \tfrac{1}{2}\,q\,t^2;$$

es ist also:

$$\begin{aligned}\Phi_1'(a,t) - \Phi_1'(t,t) &= \frac{\varepsilon\,c}{20\,a^3}\int_t^a T_0\,(T_0^2 - 10\,a^2 + 5\,c^2\,\tau^2)\,d\tau \\ &= \frac{\varepsilon\,c}{20\,a^3}\,[(T_0^3 - 10\,a^2\,T_0)\,(a-t) + \tfrac{5}{3}\,c^2\,T_0\,(a^3 - t^3)].\end{aligned} \tag{284}$$

Ebenso entsteht Φ_2' aus dem allgemeinen Ausdrucke (75), § 18, indem man dort T überall durch den Wert T_0 ersetzt; wir haben demnach, analog zu (249):

$$\begin{aligned}\Phi_2'(a,t) - \Phi_2'(\beta,t) = \frac{\varepsilon\,c}{160\,a^3\,T_0^2}\int_\beta^a [&-32\,a^5 + 40\,a^3(c^2\tau^2 - T_0^2) - 20\,a^2(c\tau - T_0)^2(c\tau + 2\,T_0) \\ &+ (c\,\tau - T_0)^4\,(c\tau + 4\,T_0)]\,d\tau.\end{aligned} \tag{285}$$

Bei Ausführung der Integration kann man dieselbe Umformung benutzen, wie oben in (249); die eckige Klammer unter dem Integralzeichen ist gleich:

$$\begin{aligned}&-32\,a^5 + 80\,a^3\,T_0\,(c\,\tau - T_0) + 40\,a^3\,(c\,\tau - T_0)^2 - 20\,a^2\,(c\,\tau - T_0)^3 \\ &\quad - 60\,a^2\,T_0\,(c\,\tau - T_0)^2 + 5\,T_0\,(c\,\tau - T_0)^4 + (c\,\tau - T_0)^5;\end{aligned}$$

es wird also:

$$\begin{aligned}\Phi_2'(a,t) - \Phi_2'(\beta,t) = \frac{\varepsilon}{160\,a^3\,T_0^2}\,[&-32\,a^5\,c\,(a-\beta) + 40\,a^3\,T_0\,\{(c\,a - T_0)^2 - (c\,\beta - T_0)^2\} \\ &+ \tfrac{1}{3}\,(40\,a^3 - 60\,a^2\,T_0)\,\{(c\,a - T_0)^3 - (c\,\beta - T_0)^3\} \\ &- 5\,a^2\,\{(c\,a - T_0)^4 - (c\,\beta - T_0)^4\} + T_0\,\{(c\,a - T_0)^5 - (c\,\beta - T_0)^5\} \\ &+ \tfrac{1}{6}\,\{(c\,a - T_0)^6 - (c\,\beta - T_0)^6\}].\end{aligned}$$

Im nächsten Intervalle ist die Parabel P_1 durch die Hyperbel H_1 zu ersetzen; für das Integrationsintervall $\tau^0 < \tau < t$ kommt jetzt auch die Funktion Φ_2 bzw. Ψ_2 zur Anwendung, wo Φ_2 durch (75), § 18, Ψ_2 durch (112), § 8 gegeben ist, und wir finden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_x = -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi\,a^3}\Big[&\Phi_1(\tau^0,t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1(\tau^0,t) + \Phi_2(t,t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2(t,t) \\ &+ \Phi_2'(\tau_{01},t) - \Phi_2'(t,t)\Big], \quad \text{für } t^0 < t < t_2.\end{aligned} \tag{286}$$

Die Hyperbel H_2 und der Wert τ_1 kommen hier nicht zur Geltung, da diese Hyperbel ganz außerhalb des Gebietes $\tau < t$ liegt, wenn ihre Schnittpunkte mit der Linie $\tau = t$, wie wir jetzt annehmen, imaginär sein sollen. Für das nächste Intervall kommen die der Überlichtgeschwindigkeit entsprechenden Funktionen zur Anwendung; wir haben, analog zu (188):

$$\begin{aligned}-\frac{4\,\pi\,a^3}{3\,\varepsilon}\,\mathfrak{F}_x &= \Phi_0^*(\tau^*,t) + \Phi_1^*(\tau^*,t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^*(\tau^*,t) + \Phi_1(\tau^0,t) - \Phi_1(\tau^*,t) \\ &+ \frac{1}{c}\,[\Psi_1(\tau^0,t) - \Psi_1(\tau^*,t)] + \Phi_2(t,t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2(t,t) \\ &+ \Phi_2'(\tau_{01},t) - \Phi_2'(t,t) \quad \text{für } t_2 < t < t_3.\end{aligned} \tag{287}$$

Hierbei ist der Wert τ^* wieder durch Gleichung (185), § 14 definiert.

Für das nächste Intervall kommt es auf den durch (192), § 14 definierten Wert:

$$t_4 = 2\,\frac{c-v}{q} \quad \text{(in § 14 mit } t_6 \text{ bezeichnet)}$$

an; er liegt bei imaginären Schnittpunkten der Hyperbel H_1 mit der Linie $\tau = t$ zwischen t_3 und t_5 (vgl. S. 305); es wird also:

$$(288) \qquad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^{\bullet}(\tau^0, t) + \Phi_1^{\bullet}(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^{\bullet}(\tau^0, t) + \Phi_2^{\bullet}(\tau^*, t) \\ & + \frac{1}{c}\,\Psi_2^{\bullet}(\tau^*, t) + \Phi_2(t, t) - \Phi_2(\tau^*, t) \\ & + \frac{1}{c}\left[\Psi_2(t, t) - \Psi_2(\tau^*, t)\right] + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(t, t) \quad \text{für } t_3 < t < t_4. \end{aligned}$$

Im nächsten Intervalle ist nun die Linie L oberhalb der Linie $\tau = t$ durch die Parabel L' zu ersetzen, die hier die Grenze zwischen Unter- und Überlichtgeschwindigkeit angibt; wir setzen entsprechend der Gleichung (280):

$$(289) \qquad \tau_0^{\bullet} = \frac{v}{c}\,t + \tfrac{1}{2}\,\frac{q}{c}\,t^2;$$

dann wird (wenn t_5 wie oben in (190^a) definiert wird):

$$(290) \qquad \begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^{\bullet}(\tau^0, t) + \Phi_1^{\bullet}(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^{\bullet}(\tau^0, t) + \Phi_2^{\bullet}(t, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2^{\bullet}(t, t) \\ & + \Phi_2'^{\bullet}(\tau_0^{\bullet}, t) - \Phi_2'^{\bullet}(t, t) + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(\tau_0^{\bullet}, t) \quad \text{für } t_4 < t < t_5. \end{aligned}$$

Die zu Anfang bestandene Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit macht sich also nur noch in den Gliedern Φ_2' geltend, welche von dem Anfangszustande herrühren. Für das Intervall $t < \tau < \tau_0^{\bullet}$ kommt jetzt auch die Funktion $\Phi_2'^{\bullet}$ in Betracht, welche aus $\Phi_2^{\bullet}$ entsteht, wenn man T durch T_0 ersetzt; es ist also $\Phi_2'^{\bullet}$ durch (265) gegeben, wenn dort folgende Werte für die Größen $W^{\bullet}$ eingesetzt werden:

$$W_1^* = \frac{c^2\tau^2 - T_0^2}{8\,a^2\,T_0^2}\left[c^2\tau^2 - T_0^2 + 4\,a^2 - 4\,a\,c\,\tau\right]$$

$$W_2^* = \frac{1}{6\,a^2\,T_0^2}\left[2\,(a^2 + T_0^2 + a\,T_0)(T_0 - a) - \{3\,a^2 + 3\,T_0^2 - (a + c\,\tau)^2\}\,(a + c\,\tau)\right]$$

$$W_3^* = \frac{1}{30\,a^2\,T_0^2}\left[2\,(a^2 + T_0^2 + 3\,a\,T_0)(T_0 - a)^3 - (a + c\,\tau)^3\,\{5\,(a^2 + T_0^2) - 3\,(a + c\,\tau)^2\}\right].$$

Aber auch in der Gleichung der kritischen Kurve (142) ist jetzt T durch T_0 zu ersetzen; die Hyperbel H_3, welche für $\tau < t$ zu berücksichtigen war und deren Gleichung in (189) vorlag, ist also für $\tau > t$ durch die Parabel:

$$(291) \qquad c\,\tau = v\,t + \tfrac{1}{2}\,q\,t^2 - 2\,a$$

zu ersetzen, welche (in Figur 20 mit P_3 bezeichnet) durch den Schnittpunkt der Hyperbel H_3 mit der Linie $\tau = t$ hindurchgeht. Oberhalb dieser Kurve ist $T_0 - c\,\tau < 2\,a$; deshalb kommt in Gleichung (297) nun das Intervall $\tau_0^{\bullet} < \tau < \tau_5$ in Betracht, wobei τ_5 durch (291), d. h. durch die Gleichung:

$$\tau_5 = \frac{v}{c}\, t + \tfrac{1}{2}\,\frac{q}{c}\, t^2 - \frac{2a}{c} \tag{292}$$

definiert ist.

Für die nächsten Intervalle kommen als charakteristische Grenzen neben t_6 nur noch die Schnittpunkte der Linie $\tau = t + t_0$ mit den Parabeln P_2, L' und P_3 in Betracht; wir finden für den Schnittpunkt mit P_2:

$$t_7 = -\frac{v+c}{q} + \sqrt{\left(\frac{v+c}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}\,\frac{v}{c-v}}, \tag{293}$$

für den Schnittpunkt mit L':

$$t_8 = \frac{c-v}{q} + \sqrt{\left(\frac{c-v}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}\,\frac{c}{c-v}} \tag{294}$$

und für den Schnittpunkt mit P_3:

$$t_9 = -\frac{v+c}{q} + \sqrt{\left(\frac{v+c}{q}\right)^2 + \frac{4a}{q}\,\frac{2c-v}{c-v}}. \tag{295}$$

Wird zunächst $t > t_5$, so kommen die zwei Punkte in Betracht, in denen eine Parallele zur τ-Achse von der Hyperbel H_3 getroffen wird; sie sind durch die Werte τ_3 und τ_4 in (190) gegeben; es wird also:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\,\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2^*(\tau_3, t) \\ & + \Phi_2^*(t, t) - \Phi_2^*(\tau_4, t) + \frac{1}{c}\left[\Psi_2^*(t, t) - \Psi_2^*(\tau_4, t)\right] \\ & + \Phi_2^{\prime *}(\tau_0^*, t) - \Phi_2^{\prime *}(t, t) + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_5 < t < t_6. \end{aligned} \tag{296}$$

Wird $t > t_6$, so tritt nun die Funktion Φ_2^* mit dem Argumente τ_4 wieder zurück, und wir finden:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\,\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2^*(\tau_3, t) \\ & + \Phi_2^{\prime *}(\tau_0^*, t) - \Phi_2^{\prime *}(\tau_5, t) + \Phi_2'(\tau_{01}, t) - \Phi_2'(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_6 < t < t_7, \end{aligned} \tag{297}$$

wo t_7 durch (293) definiert wird, und weiter:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\,\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2^*(\tau_3, t) \\ & + \Phi_2^{\prime *}(\tau_0^*, t) - \Phi_2^{\prime *}(\tau_5, t) + \Phi_2'(t + t_0, t) - \Phi_2'(\tau_0^*, t) \quad \text{für } t_7 < t < t_8, \end{aligned} \tag{298}$$

wo t_8 durch (294) gegeben ist; dann:

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\,\mathfrak{F}_x = {} & \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\,\Psi_2^*(\tau_3, t) \\ & + \Phi_2^{\prime *}(t + t_0) - \Phi_2^{\prime *}(\tau_5, t) \quad \text{für } t_8 < t < t_9, \end{aligned} \tag{299}$$

wenn t_9 gemäß (295) bestimmt wird. Hier, also nach Ablauf der Zeit t_8, ist der Einfluß der anfänglichen Unterlichtgeschwindigkeit nicht mehr bemerkbar. Endlich wird:

$$(300)\quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^*(\tau^0, t) + \Phi_1^*(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_1^*(\tau^0, t) + \Phi_2^*(\tau_3, t) + \frac{1}{c}\Psi_2^*(\tau_3, t) \quad \text{für } t > t_9.$$

Nach Ablauf der durch Gleichung (295) bestimmten Zeit t_9 ist also der Einfluß des Anfangszustandes auf die Bewegung des Elektrons ganz verschwunden; denn die Gleichung (300) ist mit (194[d]) vollkommen identisch. Die Parabel P_3 wird hier in ähnlicher Weise benutzt, wie die Gerade P_2 bei der Bewegung mit konstanter Überlichtgeschwindigkeit in Figur 19, indem ihr Verlauf das allmähliche Verschwinden des Einflusses angibt, den der Anfangszustand auf die Bewegung ausübt.

Wenn man annimmt, daß die Linie $\tau = t$ von der Hyperbel H_2 in reellen Punkten getroffen wird, so kommen auch die in (183) gegebenen Werte t_1 und t_4 als Intervallgrenzen in Betracht, und die Zahl der zu unterscheidenden Fälle vermehrt sich noch außerordentlich. Es bietet die Durchführung indessen keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

§ 23. Quasistationäre Bewegung.

Obgleich die Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bei beiden naheliegenden Hypothesen über den Anfangszustand zu Beginn störenden Kräften unterworfen sind, obgleich es daher zweifelhaft ist, ob eine solche stationäre Bewegung hergestellt werden kann, möge noch untersucht werden, wie im Verhältnisse dazu eine nahezu stationäre Bewegung verläuft, d. h. eine Bewegung, bei der die höheren Potenzen der Beschleunigung q gegen die erste Potenz vernachlässigt werden dürfen. Wir führen diese Beschleunigung wieder mittels der Gleichungen:

$$(301)\qquad \mathfrak{v}_x = v + q\,t, \quad \mathfrak{v}_y = 0, \quad \mathfrak{v}_z = 0$$

ein, so daß v die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet. Es wird dann nach (179):

$$\xi = T = (v + q\,t)\,\tau - \tfrac{1}{2}\,q\,\tau^2.$$

Fig. 14.

Wir hätten nun die in § 14 entwickelten Ausdrücke für die Kraft nach Potenzen von q zu entwickeln und die ersten beiden Glieder zu berechnen. Für $q = 0$ müssen sich die Formeln von § 14 auf diejenigen von § 12, bzw. § 19 reduzieren, so daß die ersten Glieder der Entwicklungen bekannt sind.

Um zunächst festzustellen, unter welchen Bedingungen eine solche „quasistationäre“ Bewegung eintreten kann, knüpfen wir an die Figur 14 an. In ihr war die Hyperbel H_1 an Stelle der bei gleichförmiger Bewegung auftretenden geraden Linie:

$$\tau = \frac{2\,a}{c + v}$$

getreten, und die Hyperbel H_2 an Stelle der Geraden:

$$\tau = \frac{2\,a}{c - v}.$$

Das kann nur vorkommen, wenn die Hyperbel H_2 die gerade Linie $\tau = t$ in reellen Punkten schneidet, d. h. wenn:

(302) $$(c - v)^2 > 4\,a\,q$$

ist, wie aus den obigen Gleichungen (183) sofort hervorgeht. Sicher muß ferner $t < t_2$ oder:

(303) $$t < \frac{c - v}{q} \quad (= t_2)$$

bleiben, denn für $t = t_2$ wird $v + q\,t = c$, so daß die Lichtgeschwindigkeit erreicht wird.

Einem Punkte der Hyperbel H_1 kommt nach (181^c) die Ordinate:

$$\tau^0 = t + \frac{c + v}{q} - \sqrt{\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2 - \frac{4\,a}{q}}$$

zu: wir schreiben diesen Wert in der Form:

$$\tau^0 = \left(t + \frac{c + v}{q}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\,a}{q\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2}}\right),$$

oder durch Potenzentwicklung der Quadratwurzel, näherungsweise:

(304) $$\tau^0 = \left(t + \frac{c + v}{q}\right)\frac{2\,a}{q\left(t + \frac{c + v}{q}\right)^2} = \frac{2\,a}{c + v + q\,t} = \frac{2\,a}{c + v}\left(1 - \frac{q\,t}{c + v}\right).$$

Dieser Wert stimmt in der Tat mit dem entsprechenden der gleichförmigen Bewegung für kleine Werte von q überein; und zwar müssen, damit obige Näherungswerte gültig sind, folgende Ungleichungen bestehen:

(305) $$\frac{4\,a\,q}{(q\,t + c + v)^2} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{q\,t}{c + v} < 1,$$

von denen die erstere infolge der Bedingung (302) von selbst erfüllt ist. Für die Hyperbel H_2 wird nach Gleichung (184^c):

$$\tau_1 = \left(t - \frac{c - v}{q}\right)\sqrt{1 + \frac{4\,a\,q}{(q\,t - c + v)^2}}.$$

Hier ist der positive Wert der Quadratwurzel zu wählen; wegen der zweiten Ungleichung (305) ist daher:

$$\sqrt{(q\,t - c + v)^2} = c - v - q\,t$$

zu setzen, so daß wir erhalten:

(306) $$\tau_1 = \frac{2\,a}{c - v - q\,t} = \frac{2\,a}{c - v}\left(1 + \frac{q\,t}{c - v}\right),$$

wobei zu den Ungleichungen (305) noch die Bedingungen:

(307) $$\frac{4\,a\,q}{(q\,t - c + v)^2} < 1, \quad \frac{q\,t}{c - v} < 1$$

hinzuzufügen sind, von denen wieder die erstere eine Folge der früheren Bedingungen ist, während die andere mit (303) zusammenfällt.

Nach Ablauf der Zeit t_1 ist die Bewegung nahezu stationär geworden; dann gibt Gleichung (184^b) für die wirkende Kraft den Wert:

$$\mathfrak{F}_x = -\frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}\left[\Phi_1(\tau^0, t) + \Phi_2(\tau_1, t) + \frac{1}{c}\Psi_1(\tau^0, t) + \frac{1}{c}\Psi_2(\tau_1, t)\right] \quad \text{für } t_1 < t < t_2,$$

wo nun Φ_1 und Φ_2 durch die obigen Gleichungen (68) und (75) in § 18, Ψ_1 und Ψ_2 durch die Gleichungen (108) und (112) in § 8 gegeben werden. Wir haben diese einzelnen Integrale nach Potenzen von q zu entwickeln. Es sei:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \Phi_1^0 + q\,\Phi_1', \quad \Psi_1 = \Psi_1^0 + q\,\Psi_1',\\ \Phi_2 &= \Phi_2^0 + q\,\Phi_2', \quad \Psi_2 = \Psi_2^0 + q\,\Psi_2'.\end{aligned} \tag{308}$$

Da sich für $q = 0$ der stationäre Zustand der gleichförmigen Bewegung ergeben muß, so besteht für die Summe die Relation:

$$\Phi_1^0 + \Phi_2^0 + \frac{1}{c}\Psi_1^0 + \frac{1}{c}\Psi_2^0 = 0 \tag{309}$$

gemäß Gleichung (169^a), § 19. Diese Anfangswerte brauchen wir also nicht zu berechnen.

Die Funktionen Φ_0 und Φ_1 wurden durch Integrale der Form:

$$J = \int_{\tau'}^{\tau''} F(T, \tau)\, d\tau$$

gegeben, wo $F(T, \tau)$ eine Funktion von T und τ bezeichnet, die aus den Gleichungen (68), (75) und (75^a) in § 18 zu entnehmen ist. Die Beschleunigung q kommt in den Grenzen und in T vor; es ist also bei Vernachlässigung der zweiten Potenz von q und der höheren Potenzen:

$$J = J_0 + q\,(J_1 + J_2).$$

wenn:

$$J_0 = \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} F(v\tau, \tau)\, d\tau, \quad J_1 = \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial q}\, d\tau,$$

$$J_2 = F(T_0'', \tau_0'')\left(\frac{\partial \tau''}{\partial q}\right)_0 - F(T_0', \tau_0')\left(\frac{\partial \tau'}{\partial q}\right)_0$$

gesetzt wird, und wenn mit τ_0', τ_0'', T_0', T_0'' die betreffenden Anfangswerte für $q = 0$ bezeichnet werden. Wir können die nötige Rechnung indessen wesentlich durch folgende Überlegung vereinfachen. Es werde gemäß (179):

$$T = (v + q\,t)\,\tau - \tfrac{1}{2}\varkappa\tau^2$$

gesetzt, und zunächst nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt, dann ist:

$$J = \int_{\tau'}^{\tau''} F(v\tau + q\,t\tau, \tau)\, d\tau - \frac{\varkappa}{2}\int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \frac{\partial F}{\partial v}\,\tau\, d\tau, \tag{310}$$

wo in $\frac{\partial F}{\partial v}$ nun $q = 0$ zu nehmen ist; denn wir haben:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial T}\tau \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \varkappa} = -\frac{\tau^2}{2}, \quad \text{also:} \quad -\tfrac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial v}\tau = \frac{\partial F}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \varkappa}.$$

Nachträglich setzen wir dann $\varkappa = q$; in dem Faktor von $\varkappa\,(=q)$ konnten die Integralgrenzen durch τ_0' und τ_0'' ersetzt werden, da dadurch nur höhere Potenzen von q vernachlässigt sind. Das erste Glied der rechten Seite von (310) ist uns schon bekannt, wenn wir annehmen, daß die Grenzen τ', τ'' einen der Werte:

$$0, \quad \tau^0, \quad \tau_1$$

annehmen, denn τ^0 und τ_1 hängen von q nur in der Verbindung $v + qt$ ab gemäß den Näherungsformeln (304) und (306). Bezeichnen wir also mit F_1 und F_2 die in den Integralen Φ_1 und Φ_2 unter den Integralzeichen stehenden Funktionen, und setzen den Integralen Φ_1 und Φ_2 ihre Argumente (v) bei, so wird:

$$(311) \qquad \int\limits_{\tau'}^{\tau''} F_1(v\tau + qt\tau, \tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{\tau^0} F_1(v\tau + qt\tau, \tau)\,d\tau = \Phi_1(v + qt),$$

$$(312) \qquad \int\limits_{\tau'}^{\tau''} F_2(v\tau + qt\tau, \tau)\,d\tau = \int\limits_{\tau^0}^{\tau_1} F_2(v\tau + qt\tau, \tau)\,d\tau = \Phi_2(v + qt).$$

Um diese Integrale zu finden, brauchen wir also in den Formeln für Φ_1 und Φ_2 nur überall v durch $v + qt$ zu ersetzen. Nun besteht die Gleichung (309) im stationären Zustande für alle Werte von v $(0 < v < c)$, also auch, wenn man v durch $v + qt$ ersetzt, d. h. es ist:

$$(313) \qquad \Phi_1(v + qt) + \Phi_2(v + qt) + \frac{1}{c}\Psi_1(v + qt) + \frac{1}{c}\Psi_2(v + qt) = 0.$$

Diese Ausdrücke liefern demnach keinen Beitrag zur Berechnung der Kraft $\mathfrak{F}_x$. Es ist nämlich auch (wenn man nach Potenzen von q entwickelt):

$$c(\Phi_1 + \Phi_2) + \Psi_1 + \Psi_2 + qt\left[c\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + c\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial v}\right] = 0,$$

worauf es hier eigentlich ankommt.

Im folgenden kommt es also nur auf das zweite Glied der rechten Seite von (310) an. Wir können dabei die schon ausgeführten Integrationen verwerten, wenn wir folgendes beachten. Es gelte für das unbestimmte Integral die Gleichung:

$$(314) \qquad \int F(v\tau, \tau)\,d\tau = \frac{c}{\tau} + c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \cdots,$$

so ist:

$$F(v\tau, \tau) = -\frac{c}{\tau^2} + c_1 + 2c_2\tau + 3c_3\tau^2 + \cdots,$$

also offenbar:

$$(315) \qquad \int \frac{\partial F}{\partial v}\tau\,d\tau = -\frac{\partial c}{\partial v}\log\tau + \frac{\partial c_1}{\partial v}\frac{\tau^2}{2} + \frac{\partial c_2}{\partial v}\frac{2\tau^3}{3} + \frac{\partial c_3}{\partial v}\frac{3\tau^4}{4} + \cdots.$$

Für Φ_1 ist nun nach (68), § 19 zu setzen:

$$\int F_1\,d\tau = \left[(v^3 + 5vc^2)\frac{\tau^4}{4} - 5a^2v\tau^2\right]\frac{\varepsilon c}{20a^3}.$$

Wir haben also:

$$\int \frac{\partial F_1}{\partial v} \tau \, d\tau = \left[-5 a^2 \frac{2 \tau^3}{3} + (3 v^2 + 5 c^2) \frac{\tau^5}{5} \right] \frac{\varepsilon c}{20 a^3}$$

und:

$$\int_0^{\tau 0} \frac{\partial F_1}{\partial v} \tau \, d\tau = \frac{a^5}{(c+v)^3} \left[-\frac{5 \cdot 16}{3} + \frac{32}{5} \frac{3 v^2 + 5 c^2}{(c+v)^2} \right] \frac{\varepsilon c}{20 a^3} \tag{316}$$

$$= \frac{a^2}{(c+v)^5} \frac{16}{15 \cdot 20} (5 c^2 - 50 v c - 7 v^2) = \frac{16 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{300 c^2 (1+\omega)^5} (5 - 50 \omega - 7 \omega^2).$$

Für das Integral Φ_2 ist nach (167ᵃ), § 19:

$$\int F_2 \, d\tau = \frac{\varepsilon a}{40 \omega^2} \left[\frac{8 a}{c \tau} + 20 (1 - \omega^2) \frac{c \tau}{2 a} - 10 (1 - \omega)^2 (1 + 2 \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 \right. \tag{317}$$

$$\left. + (1 - \omega)^4 (1 + 4 \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^4 \right];$$

also wird gemäß (314) und (315):

$$\int \frac{\partial F_2}{\partial v} \tau \, d\tau = - \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \left[- 8 \log \tau + 20 (1 - \omega^2) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 - \frac{40}{3} (1 - \omega)^2 (1 + 2 \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^3 \right.$$

$$\left. + \frac{8}{5} (1 - \omega)^4 (1 + 4 \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5 \right] \tag{317a}$$

$$+ \frac{\varepsilon a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^2} \left[- 40 \omega \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 + 80 \omega (1 - \omega) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^3 - 32 \omega (1 - \omega)^3 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5 \right],$$

oder, wenn man auf gemeinsamen Nenner bringt:

$$= \frac{\varepsilon a^2}{40 c^2 \omega^3} \left[16 \log \tau - 40 \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^2 + \frac{80}{3} (1 - \omega)(1 + \omega + \omega^2) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^3 \right. \tag{317b}$$

$$\left. - \frac{16}{5} (1 - \omega)^3 (1 + 3 \omega + 6 \omega^2) \left(\frac{c \tau}{2 a} \right)^5 \right].$$

Hierin hat man als obere und untere Grenze für τ bzw. die Werte:

$$\frac{2 a}{c - v} \quad \text{und} \quad \frac{2 a}{c + v} \tag{318}$$

einzusetzen; dann ergibt sich:

$$\int_{\tau 0}^{\tau 1} \frac{\partial F_2}{\partial v} \tau \, d\tau = \frac{16 \varepsilon a^2}{15 \cdot 40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \left[15 \log \frac{1 + \omega}{1 - \omega} - 150 \frac{\omega}{(1 - \omega^2)^2} \right. \tag{319}$$

$$\left. + 50 (1 + \omega + \omega^2) \frac{3 \omega + \omega^3}{(1 - \omega)^2 (1 + \omega)^3} - 3 (10 \omega + 20 \omega^3 + 2 \omega^5) \frac{1 + 3 \omega + 6 \omega^2}{(1 - \omega)^2 (1 + \omega)^5} \right]$$

oder nach einigen Umformungen:

$$= \frac{16 \varepsilon a^2}{40 \cdot c^2 \cdot \omega^3} \log \frac{1 + \omega}{1 - \omega} \tag{320}$$

$$- \frac{16 \varepsilon a^2}{600 c^2 \cdot \omega^2 (1 + \omega)^5 (1 - \omega)^2} (30 + 90 \omega + 40 \omega^2 - 270 \omega^3 + 16 \omega^4 - 132 \omega^5 - 14 \omega^6).$$

Für das folgende ist es wichtig, das Verhalten dieses Ausdrucks in seiner Abhängigkeit von ω zu prüfen; um dasselbe in der Nähe von $\omega = 0$, d. h. für kleine Werte von ω zu erkennen, müssen wir nach Potenzen von ω entwickeln. Es ist:

$$\frac{1}{\omega^3}\log\frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{2}{\omega^2} + \frac{2}{3} + \frac{2\,\omega^2}{5} + \frac{2\,\omega^4}{7} + \cdots = \frac{30 + 10\,\omega^2 + 6\,\omega^4}{15\,\omega^2} + \cdots$$

Multiplizieren wir mit:

$$\begin{aligned} 15\,(1+\omega)^5\,(1-\omega)^2 &= 15\,(1 + 5\,\omega + 10\,\omega^2 + 10\,\omega^3 + \cdots)(1 - 2\,\omega + \omega^2) \\ &= 15\,(1 + 3\,\omega + \omega^2 - 5\,\omega^3 + \cdots), \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{15}{\omega^3}\log\frac{1+\omega}{1-\omega}\cdot(1+\omega)^5\,(1-\omega)^2 = (30 + 90\,\omega + 40\,\omega^2 - 120\,\omega^3 + \cdots)\,\frac{1}{\omega^2}.$$

Man erkennt hieraus, daß die rechte Seite der Gleichung (320) bei Entwicklung nach Potenzen von ω mit dem Gliede:

$$\frac{16\,\varepsilon\,a^2\,\omega}{40\,c^2}\cdot\frac{-120+270}{15} = \frac{4\,\varepsilon\,a^2}{c^2}\,\omega \tag{321}$$

beginnt, also für $\omega = 0$ verschwindet.

Bezeichnen wir mit $\Delta\,\Phi_i$ den Teil des Zuwachses der Funktion Φ_i, welcher auf das Resultat von Einfluß ist, d. h. welcher sich nicht infolge der Beziehung (313) schließlich heraushebt, so ist also nach (310), (316) und (320):

$$\Delta\,(\Phi_1 + \Phi_2) = -\,(\Gamma_1(\omega) + \Gamma_2(\omega))\,\frac{q}{2}, \tag{322}$$

wenn Γ_1 und Γ_2 bzw. die in (316) und (320) rechts stehenden Funktionen von ω bedeuten, die bis auf das Glied $\log\frac{1+\omega}{1-\omega}$ rational von ω abhängen. Die Entwicklung nach Potenzen von ω ergibt:

$$\Delta\,(\Phi_1 + \Phi_2) = -\frac{2\,\varepsilon\,a^2\,q}{15\,c^2}\left(1 + \frac{18}{5}\,\omega^2 + \cdots\right). \tag{323}$$

Etwas anders muß man bei Berechnung von $\Delta\,\Psi_1$ und $\Delta\,\Psi_2$ verfahren, denn in Ψ kommt die Geschwindigkeit v auch außerhalb der Funktion T unter dem Integralzeichen vor. Es sei gemäß (108) und (112):

$$\Psi = \int_{\tau'}^{\tau''} \mathfrak{v}_x(t-\tau)\,F(T,\tau)\,d\,\tau;$$

dann wird, da $\mathfrak{v}_x(t-\tau) = v + q\,(t-\tau)$ zu setzen ist, analog zu (310) und (312):

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\tau_0'}^{\tau_0''} (v + q\,t)\,F(v\,\tau + q\,t\,\tau,\tau)\,d\,\tau \\ &\quad - q\int_{\tau_0'}^{\tau_0''} \tau\,F(v\,\tau,\tau)\,d\,\tau - \frac{q}{2}\int_{\tau_0'}^{\tau_0''} v\,\frac{\partial F}{\partial v}\,\tau\,d\,\tau. \end{aligned} \tag{324}$$

Auf Grund dieser Formel haben wir $\Delta\,\Psi_1$ und $\Delta\,\Psi_2$ zu berechnen. Für Ψ_1 erhalten wir nach Gleichung (108), § 8:

$$\int \tau\, F(v\,\tau,\tau)\, d\,\tau = \frac{\varepsilon\, c}{4\, a^3}\left[2\, a^3\, \tau^2 - 2\, a^2\, c\,\tau^3 + \frac{1}{5}(c^3 + v^2\, c)\,\tau^5\right]$$
$$= \frac{\varepsilon\, a^2}{c}\left[2\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^2 - 4\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^3 + \frac{8}{5}(1+\omega^2)\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^5\right],$$

also durch Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{\tau^0} \tau\, F(v\,\tau,\tau)\, d\,\tau = \frac{2\,\varepsilon\, a^2}{c\,(1+\omega)^2}\left[1 - \frac{2}{1+\omega} + \frac{4}{5}\,\frac{1+\omega^2}{(1+\omega)^3}\right].$$

Es wird ferner für Ψ_1:

$$\int v\,\frac{\partial\, F}{\partial\, v}\,\tau\, d\,\tau = \frac{\varepsilon\, c}{4\, a^3}\, v \int [c\,\tau\cdot 2\cdot v\,\tau\cdot\tau\cdot\tau]\, d\,\tau = \frac{\varepsilon\, c^2\, v^2}{2\, a^3}\,\frac{\tau^5}{5} = \frac{16\cdot\varepsilon\, a^2\,\omega^2}{5\, c}\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^5$$

und nach Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{\tau^0} v\,\frac{\partial\, F}{\partial\, v}\,\tau\, d\,\tau = \frac{16\cdot\varepsilon\cdot a^2}{5\, c}\,\frac{\omega^2}{(1+\omega)^5}.$$

In Rücksicht auf (324) wird also, wenn das Zeichen Δ so definiert wird, wie es für die Gleichung (322) geschah:

$$\Delta\,\Psi_1 = -\frac{q}{2}\,\frac{\varepsilon\, a^2}{c\,(1+\omega)^2}\left[4 - \frac{8}{1+\omega} + \frac{16}{5}\,\frac{1+2\,\omega^2}{(1+\omega)^3}\right]$$
$$(325)\qquad = -\frac{q}{2}\cdot\frac{4\cdot\varepsilon\, a^2}{5\cdot c\,(1+\omega)^5}(-1 - 5\,\omega + 13\,\omega^2 + 5\,\omega^3)$$
$$= -\frac{q}{2}\,\frac{4\cdot\varepsilon\, a^2}{5\cdot c}(-1 + 23\,\omega^2 + \cdots).$$

In gleicher Weise erhalten wir für Ψ_2 nach (112), § 8, wenn dort der oben in § 18 angegebene Wert von $G\,(v\,\tau, c\,\tau)$ eingesetzt wird, unter Benutzung von (167[b]), § 19:

$$\int F\,(v\,\tau,\tau)\,\tau\cdot d\,\tau = \frac{\varepsilon\, a^2}{40\cdot c}\left[-40\,(1-\omega)\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^2 + 40\,(1-\omega)^2\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^3 - 8\,(1-\omega)^4\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^5\right]$$

und durch Einsetzen der Grenzen:

$$(326)\qquad \int_0^{\tau^0} F\,(v\,\tau,\tau)\cdot\tau\cdot d\,\tau = \frac{\varepsilon\, a^2\,(1-\omega)}{40\, c\,(1+\omega)^2}\left[-40 + 40\,\frac{1-\omega}{1+\omega} - 8\left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^3\right]$$
$$= \frac{\varepsilon\, a^2}{5\, c}(-1 - \omega + \omega^2 \cdots).$$

Zur Auswertung des zweiten Bestandteiles der Änderung von Ψ_2 haben wir die in (314) und (315) enthaltene Regel anzuwenden, und zwar auf die rechte Seite der Gleichung (167[b]), § 19; wir finden dadurch:

$$\int v\,\frac{\partial\, F}{\partial\, v}\,\tau\, d\,\tau = \frac{\varepsilon\, a^2\,\omega}{40\, c}\left[40\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^2 - 80\,(1-\omega)\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^3 + 32\,(1-\omega)^3\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^5\right].$$

Nach (324) haben wir die Summe:

$$2\int F(v\tau, \tau)\,\tau\,d\tau + \int v\frac{\partial F}{\partial v}\,\tau\,d\tau$$

zu bilden; sie wird:

$$= \frac{\varepsilon a^3}{40 \cdot c}\left[-40(2-3\,\omega)\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^2 + 80(1-\omega)(1-2\,\omega)\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^3 \right.$$
$$\left. -16(1-\omega)^3(1-3\,\omega)\left(\frac{c\,\tau}{2\,a}\right)^5\right],$$

und nach Einsetzen der Grenzen:

$$(327)\quad = \frac{\varepsilon a^2}{5\,c}\,\frac{1}{(1+\omega)^5}\left[-2-13\,\omega-39\,\omega^2+65\,\omega^3+29\,\omega^4\right] = \frac{\varepsilon a^2}{5\,c}(-2-3\,\omega-4\,\omega^2\cdots).$$

Bezeichnen wir also die in (325) und (327) rechts stehenden rationalen Funktionen von ω mit $-\frac{q}{2}\Gamma_3$ und Γ_4, so wird:

$$(328)\qquad \Delta(\Psi_1+\Psi_2) = -\frac{q}{2}(\Gamma_3+\Gamma_4) = -\frac{q}{2}\Gamma_5,$$

wo das Zeichen Δ dieselbe Bedeutung hat, wie in (322). In erster Annäherung wird:

$$(329)\qquad \Delta(\Psi_1+\Psi_2) = -\frac{q}{2}\,\frac{\varepsilon a^2}{5\,c}(-6-3\,\omega+88\,\omega^2+\cdots).$$

Die auf das Elektron bei quasistationärer Bewegung wirkende Kraft wird hiernach:

$$(330)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{F}_x &= -\frac{3\,\varepsilon}{4\,\pi a^3}\,\Delta\left(\Phi_1+\Phi_2+\frac{1}{c}\Psi_1+\frac{1}{c}\Psi_2\right) \\ &= +\frac{3\,\varepsilon q}{8\,\pi a^3}\left(\Gamma_1+\Gamma_2+\frac{1}{c}\Gamma_5\right), \end{aligned}$$

wo $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5$ die soeben definierten Funktionen von ω bedeuten, oder für kleine Werte von ω:

$$(330^a)\qquad \mathfrak{F}_x = -\frac{7\,\varepsilon^2 q}{20\,\pi a c^2}\left(1+\tfrac{27}{14}\,\omega-\tfrac{396}{35}\,\omega^2+\cdots\right).$$

Dieses Resultat ist von dem bisherigen verschieden; nach Sommerfeld und Abraham sollte die Kraft durch den Ausdruck:

$$(330^b)\qquad \frac{3\,\varepsilon^2 q}{20\,\pi a c^2}\left[-\frac{2}{\omega^2(1-\omega^2)}+\frac{1}{\omega^3}\log\frac{1+\omega}{1-\omega}\right] = -\frac{\varepsilon^2 q}{5\,\pi a c^2}\left[1+\tfrac{6}{5}\,\omega^2+\cdots\right]$$

dargestellt sein. Es ist bemerkenswert, daß das Glied mit $\log\frac{1+\omega}{1-\omega}$ hier in derselben Weise (und mit demselben Zahlenfaktor) auftritt, wie in unserer Gleichung (320); aber die hinzutretende rationale Funktion von ω ist eine andere.

Die Anwendbarkeit der Formel für die quasistationäre Bewegung ist durch die Ungleichungen (302), (303), (305) und (307) begrenzt. Wir haben also:

$$4\,a\,q < (c-v)^2, \quad q\,t < c-v.$$

Hierzu tritt aber noch eine weitere Beschränkung. Die Gleichung (330^a) wurde durch Entwicklung der früheren Ausdrücke nach Potenzen von q gewonnen; hierbei trat in dem Integrale Φ_2 T im Nenner auf, wo nach (179):

$$T = v\tau + q t \tau - \tfrac{1}{2} q \tau^2.$$

Auch der reziproke Wert von T mußte also nach positiven Potenzen von q entwickelt werden, und das ist nur möglich, wenn innerhalb der Integrationsgrenzen:

$$v > q t - \tfrac{1}{2} q \tau \quad \text{oder} \quad q t < v + \tfrac{1}{2} q \tau$$

ist. Der kleinste Wert, welchen τ (als untere Grenze) im Integrale Φ_2 annimmt, ist gleich $\frac{2a}{c+v}$; wir haben also:

$$q t < v + \frac{a q}{c+v}; \tag{331}$$

das zweite Glied der rechten Seite ist sehr klein; es kann also näherungsweise:

$$q t < v \tag{331^a}$$

verlangt werden, d. h. die Zunahme der Geschwindigkeit darf nie gleich der Anfangsgeschwindigkeit v werden. Für kleine Werte von v ist daher das Gebiet der quasistationären Bewegung ein sehr beschränktes. Für $v = 0$ muß auch $q = 0$ werden, wie es natürlich ist, denn bei der Anfangsgeschwindigkeit Null kann überhaupt keine Bewegung zustande kommen.

Der Umstand, daß die Größe v in Gleichung (330) die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, erhöht die Schwierigkeit ihrer Anwendung; denn der Zeitpunkt $t = 0$ fällt außerhalb des Zeitraums, für welchen die Bewegung als quasistationär betrachtet werden darf. Während dieses Zeitraums ist die Geschwindigkeit gleich $v + q t$ zu setzen. Führt man aber diese Größe $v + q t$ an Stelle von v in die rechte Seite von (330) ein, so unterscheidet sich der neue Ausdruck (mit $v + q t$) von dem alten (mit v) bei Entwicklung nach Potenzen von q um Glieder zweiter und höherer Ordnung in q. Wenn man aber solche Glieder benutzen will, so hätte man alle vorkommenden Integrale von vornherein bis auf die entsprechenden Potenzen von q entwickeln müssen. Es ist daher nicht erlaubt, bei den Anwendungen in Gleichung (330) die Anfangsgeschwindigkeit v durch eine spätere Geschwindigkeit $v + q t$ zu ersetzen. Bei Benutzung[1]) des Ausdrucks (330^b) dagegen pflegt man unter $v (= \omega \cdot c)$ die Geschwindigkeit der Zeit t zu verstehen; man bezeichnet den Faktor von q als longitudinale elektromagnetische Masse, und diese ist dann als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit definiert; unsere Formel (330) dagegen gibt diese Masse als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit; als Funktion der jeweiligen Geschwindigkeit kann man sie nach den vorstehenden Erörterungen nur angeben, wenn man von vornherein bei allen Entwicklungen auch die zweite Potenz von q berücksichtigt.

---

[1]) Z. B. bei der Berechnung der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen; vgl. Abraham, Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig 1905, S. 195.

Die aufgestellten Formeln für die quasistationäre Bewegung sind zunächst nur für unsere erste Voraussetzung über den Anfangszustand abgeleitet, behalten aber bei unserer zweiten Voraussetzung (§ 15 und § 22) ihre Gültigkeit.

Um dies einzusehen, muß man sich die obige Figur 20 für unseren zweiten Zustand gezeichnet denken; es geschieht dies, indem man die Hyperbel H_2, welche in Figur 14 (S. 364) auftritt, einzeichnet und die Parabel P_2 gleichzeitig so deformiert, daß sie die Linie $\tau = t$ in denselben reellen Punkten trifft, wie die Hyperbel H_2. Alsdann gilt für $0 < t < t^0$ unverändert die Gleichung (282); die Gleichung (286) aber hat jetzt nur in dem Intervalle $t^0 < t < t_1$ Gültigkeit, wenn t_1 (ebenso wie in Figur 14) den ersten Schnittpunkt der Hyperbel H_2 mit der Linie $\tau = t$ bezeichnet und wieder durch die erste Gleichung (183) definiert ist. Für $t > t_1$ ist jetzt die Hyperbel H_2 ebenso anzuwenden, wie früher bei der ersten Voraussetzung über den Anfangszustand; für das Intervall $t_1 < t < t_2$ gilt demnach die frühere Gleichung (184^b) unverändert. Da nun nach obigem der quasistationäre Zustand eintritt, wenn t_2 sehr groß wird und wenn die Hyperbel H_2 sehr nahe mit einer Parallelen zur t-Achse zusammenfällt, so gelten auch obige Gleichungen (310), ... (330^a) unverändert für die zweite Voraussetzung über den Anfangszustand.

Soll bei Überlichtgeschwindigkeit das Eintreten einer sogenannten quasistationären Bewegung untersucht werden, so sind die Gleichungen von § 14 nicht ohne weiteres anwendbar, denn in ihnen ist die Anfangsgeschwindigkeit v kleiner als c vorausgesetzt. Wählen wir aber jetzt $v > c$, so wird in Figur 14 die Strecke $0A$ negativ, $0B$ dagegen positiv. Der Mittelpunkt der durch Gleichung (182) dargestellten Hyperbel H_2 liegt also links vom Anfangspunkte 0; sie schneidet die Linie $\tau = t$ nicht und kommt also nicht in Betracht; die Hyperbel H_1, dargestellt durch Gleichung (181^b), behält ihre Bedeutung; die Hyperbel H_3 in Figur 14 ist weit nach links zu verschieben; ihr Schnittpunkt J mit der Linie $\tau = t$ ist durch die Abszisse t_7 in Gleichung (191) dargestellt. Wir erhalten jetzt:

$$(332) \qquad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^{*}(t,t) + \Phi_1^{*}(t,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^{*}(t,t) \quad \text{für } 0 < t < t^0$$

und weiter, wenn auch t_5 negativ wird:

$$(333) \qquad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^{*}(\tau^0,t) + \Phi_1^{*}(\tau^0,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^{*}(\tau^0,t) + \Phi_2^{*}(t,t) + \frac{1}{c}\Psi_2^{*}(t,t)$$

$$\text{für } t^0 < t < t_7,$$

endlich:

$$(334) \quad -\frac{4\pi a^3}{3\varepsilon}\mathfrak{F}_x = \Phi_0^{*}(\tau^0,t) + \Phi_1^{*}(\tau^0,t) + \frac{1}{c}\Psi_1^{*}(\tau^0,t) + \Phi_2^{*}(\tau_3,t) + \frac{1}{c}\Psi_2^{*}(\tau_3,t) \quad \text{für } t_7 < t.$$

Dabei sind τ^0 und τ_3 ebenso wie früher durch die Gleichungen (181^c) und (190) definiert. Diese Gleichung (334) bleibt für alle größeren Werte von t gültig. Die Bewegung wird quasistationär, wenn die Hyperbeln H_1 und H_3 sich von zwei Parallelen zur t-Achse nur wenig unterscheiden. Es muß also τ^0 mit $\frac{2a}{c+v}$ nahe zusammenfallen; das gibt wieder die obigen Bedingungen (305); und es darf τ_3 sich von $\frac{2a}{v-c}$ nur wenig unterscheiden, und das führt auf die Bedingungen:

$$(335) \qquad 4aq < (qt + v - c)^2, \quad qt < v - c,$$

welche zu (307) analog sind. Außerdem muß $t > t_1$ sein, also:

$$(qt + v - c)^2 > 4aq + (c - v)^2,$$

wodurch dann die erste Bedingung (335) von selbst erfüllt ist. Entwickelt man nun nach Potenzen von q, so ist zu beachten, daß für Überlichtgeschwindigkeit keine Relation der Form (313) besteht, daß vielmehr die linke Seite dieser Gleichung eine Funktion von $v + qt$ wird, ferner daß in den Funktionen Φ^* und Ψ^* die Größe $T = (v + qt)\tau - \frac{1}{2} q \tau^2$ im Nenner auftritt, so daß auch wieder die Bedingung (331), bzw. (331^a) erfüllt sein muß.

Bei Abraham und Sommerfeld wird das oben in (330^b) angegebene Resultat auf Grund der Annahme abgeleitet, daß die quasistationäre Bewegung schon unendlich lange Zeit angedauert habe. Da nun die Geschwindigkeit bei jeder (auch noch so kleinen) Beschleunigung nach unendlich langer Zeit beliebig groß wird, so scheint mir diese Ableitung (abgesehen von sonstigen Bedenken) einen Widerspruch in sich zu enthalten.

Berichtigungen und Zusätze.

Seite 232 In Gleichung (1) muß es heißen: $c^2 \varrho$ statt $\tau^2 \varrho$.

„ 237 Zeile 10 v. o. „ „ „ : das Vektorpotential dient zur Darstellung der durch die Bewegung erzeugten magnetischen Kräfte.

„ 238 „ 11 v. o. muß es heißen: $\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt}$ statt $\frac{dx_x}{dt}$.

„ 244 In Gleichung (32) „ „ „ : $3\varepsilon c$ statt 3ε.

„ 247 „ „ (40^a) „ „ „ : $S_0 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma$.

„ „ (41^a) „ „ „ : $S_0 = \frac{\pi}{2}\beta\gamma$.

„ 249 „ „ (49^a) „ „ „ : $3\beta + \gamma$ statt $\beta - \gamma$.

„ 251 Zeile 14 v. o. „ „ „ : P statt P_4.

„ 254 Zu § 6 vgl. die Bemerkung S. 340, Zeile 16 v. o.

„ 259 ff. Vgl. hierzu S. 340—342.

„ 262 Zeile 7 v. u. muß es heißen: $2a$ statt a.

„ 276 „ 7 und 1 v. u. muß es heißen: $+2c\tau T$ statt $-2c\tau T$, so daß die daran geknüpfte Bemerkung über das Vorzeichen zu streichen ist.

„ 278 ff. Zu den Gleichungen (123) bis (135) vgl. die Bemerkung S. 342, Z. 9 v. o. ff.

„ 291 Zu § 12 vgl. § 19, S. 342 ff.

„ 295 Zu § 13 vgl. § 21, S. 354.

„ 298 Zeile 10 v. o. muß es heißen: Ψ^*_{2xt} statt Ψ_{2xt}.

„ 301 „ 5 v. o. „ „ „ : $v - c$ statt $c - v$.

Seite 307 In Gleichung (194) muß es heißen: Ψ_2^* statt Ψ_2 und Ψ_2 statt Ψ_1.

„ 307 Auf der linken Seite der Gleichung (194^c) ist $+$ durch $-$ zu ersetzen.

„ 310 ff. Zu § 15 vgl. § 20, S. 347 ff. und § 21, S. 355 ff., sowie § 22, S. 358 ff.

„ 312 Gleichung (204), im Zähler rechts muß es heißen: $4\,\omega$ statt 4.

„ 322 Zu § 16 vgl. die weiteren Entwicklungen in meinem Aufsatze „Zur Elektronentheorie“, Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. d. W., math.-phys. Klasse, Sitzung vom 6. Juli 1907. In dieser Abhandlung werden die Einwürfe widerlegt, die Herr Sommerfeld in einer am 8. Juni der Akademie vorgelegten Abhandlung gegen die von mir befolgte Methode erhoben hatte. Nur in einem nebensächlichen Punkte, wo es sich um Auswertung eines bei ihm vorkommenden Integrals (in § 16 mit Ω bezeichnet) handelte, konnte ich ihm recht geben. Insbesondere habe ich a. a. O. untersucht, welcher partiellen Gleichung die in meiner Gleichung (34) definierte Funktion genügt, wenn man die obere Grenze t des Integrals durch ∞ ersetzt.

„ 332 Zeile 10 v. u. muß es heißen: $S\,\mathfrak{f}_x^2\,S\,\mathfrak{h}_x^2$ statt $S\,\mathfrak{f}_x^2\,S\,\mathfrak{f}_x^2$.

„ 342 Auf der rechten Seite der zweiten Gleichung (128) ist unter dem Integralzeichen der Faktor $(T^2 - c^2\,\tau^2)$ hinzuzufügen.

„ 343 Zeile 6 v. u. muß es heißen: $5 + 3\,\omega^2$ statt $3 + 5\,\omega^2$.

„ 344 „ 1 v. o. „ „ „ : (75) statt (78).

„ 3 v. o. „ „ „ : 480 „ 540.

„ 348 „ 3 v. u. „ „ „ : (241) statt (240).

In Figur 18 ist t_1 durch t' zu ersetzen.

„ 350 In Gleichung (247) ist rechts der Faktor a hinzuzufügen.

„ 365 Zeile 10 v. u. muß es heißen: $(1 + \sqrt{\quad})$ statt $\sqrt{\qquad}$.

Über die Abhängigkeit des Verhältnisses der spezifischen Wärmen $\frac{C_p}{C_v} = k$ in trockener, kohlensäurefreier atmosphärischer Luft von Druck und Temperatur.

Von

Peter Paul Koch.

(Mit 4 Tafeln.)



Eine im Jahre 1899 veröffentlichte Abhandlung Witkowskis[1]) enthält sehr interessante Ergebnisse in Bezug auf das Verhältnis der spezifischen Wärmen in atmosphärischer Luft bei den Temperaturen von 0^0 und rund -79^0 und Drucken bis 100 Atmosphären. Die vorliegende Untersuchung wurde unternommen auf Veranlassung von Herrn Geheimrat Professor Dr. Röntgen zum Zweck einer möglichst exakten Nachprüfung und Ausdehnung auf ein größeres Druckintervall.

Den Messungen zu Grunde liegt die Beziehung:

$$(1) \qquad C = \sqrt{-\frac{v^2}{m}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) k}$$

Dabei ist C die Schallgeschwindigkeit unter den in Betracht kommenden Bedingungen von Druck und Temperatur, $-v\frac{\partial p}{\partial v}$ ist der isotherme Elastizitätskoeffizient und $\frac{m}{v}$ die Dichte der Luft beim Druck p und der Temperatur t. $k = \frac{Cp}{Cv}$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen.

Dieser Gleichung zufolge gliedert sich die vorliegende Veröffentlichung in drei Hauptabschnitte. Der erste ermittelt die Schallgeschwindigkeit, der zweite die Isothermen von 0^0 und -79^0 und der dritte verknüpft die so gewonnenen Werte zur Berechnung von k.

[1]) A. W. Witkowski. Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. Mars 1899.

I. Teil.

Die Schallgeschwindigkeit in atmosphärischer Luft bei Drucken bis 200 Atmosphären und den Temperaturen des schmelzenden Eises und des Alkohol-Kohlensäuregemischs.

Methode.

Die Schallgeschwindigkeit in Luft unter den angeführten Bedingungen von Druck und Temperatur wird in Beziehung gesetzt zu der Schallgeschwindigkeit in Luft von Zimmertemperatur und Atmosphärendruck mit Hilfe der Kundtschen Staubfiguren.

Ein Stahlstab wird an zwei Stellen auf $^1/_4$ seiner Länge von den Enden eingeklemmt. Longitudinal angerieben veranlaßt er stehende, durch ein leichtes Pulver sichtbar gemachte Wellen, in zwei über seine Enden geschobenen Röhren. Das eine davon (Untersuchungsrohr) enthält komprimierte Luft von 0^0 oder -79^0, das andere (Kontrollrohr) Luft unter normalen Bedingungen.

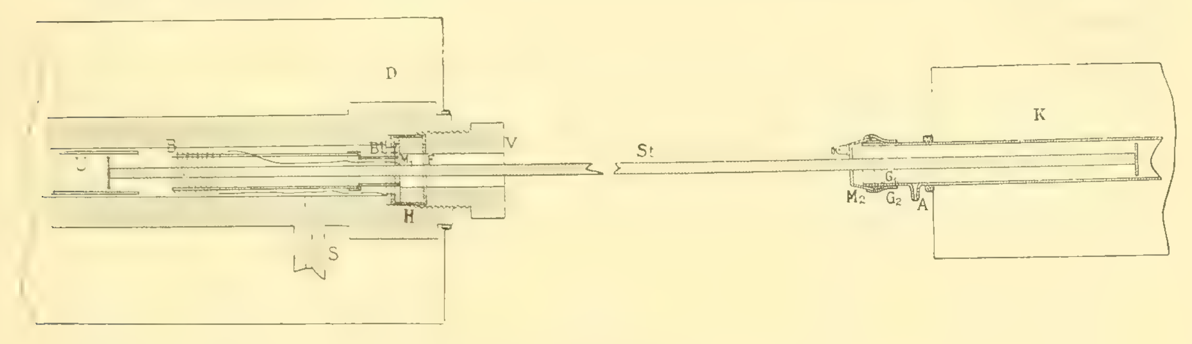
Das Verhältnis der Wellenlängen in beiden Röhren gibt das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten.

Versuchsanordnung.

Schallquelle.

Als Schallquelle diente ein Stahlstab *St* (Figur 1) von 310 mm Länge und 8.2 mm Durchmesser. Er trug an seinen Enden zum Übertragen der Schwingungen an die Luft in den Wellenrohren kreisförmige Stahlplatten von 24 mm Durchmesser und 1.1 mm Dicke hart aufgelötet. Auf ca. $^1/_4$ seiner Länge von den Enden befanden sich auf der einen Seite eine Messingplatte M_1 (Durchmesser 51 mm, Dicke 5.5 mm) zum Befestigen am Druckzylinder D, auf der anderen Seite eine Messinghülse M_2 zur Befestigung am Kontrollrohr K.

Die richtige Lage von M_1 und M_2 am Stahlstab wurde experimentell ermittelt: Ein Klemmen an dieser Stelle mit einer Zange darf keine merkliche Dämpfung des Longitudinaltones verursachen.



Figur 1.

Druckzylinder und Untersuchungsrohr. Kontrollrohr.

Der Druckzylinder war von Ducretet-Paris geliefert und für die in Betracht kommenden Drucke mit Wasser geprüft.

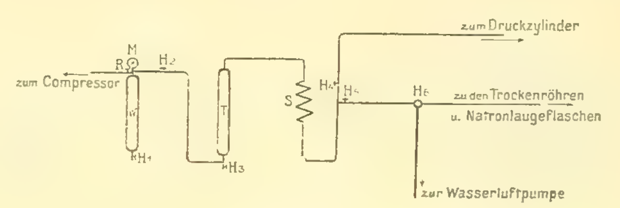
Er trug einen seitlichen Ansatz S zur Zuführung der Druckluft. Das Festklemmen des Stahlstabs am Zylinder erfolgte mit Hülfe eines Verschlußschraubenstückes V mit viereckigem Kopf und zylindrischer Bohrung durch die am Stahlstab festgelötete Messingplatte M_1. Abgedichtet wurde durch einen zwischen M_1 und das Auflager des Druckzylinders eingelegten Blei- oder Lederring.

Die Innendimensionen des Zylinders bestimmten die Maße des einzuschiebenden Untersuchungsrohrs U. Der verfügbare Raum war zylindrisch, 100 cm lang und hatte 34 mm Durchmesser im Lichten. Deshalb waren die Untersuchungsrohre Glasröhren von ca. 80 cm Länge und ca. 30 mm Durchmesser im Lichten. Die Röhren länger zu wählen hätte keinen Zweck gehabt, weil der Stahlstab etwas über 22 cm in den Druckzylinder hineinragte. Sie trugen um ein Herumrutschen zu verhüten an den Enden Papierstreifen, die bewirkten, daß das Rohr gerade noch mit sanfter Reibung in den Zylinder paßte.

Die Dimensionen der Kontrollrohre waren die gleichen wie bei den Untersuchungsröhren. Sie trugen einen seitlichen Ansatz A zum Durchleiten trockener Luft. Die Befestigung des Stahlstabs am Kontrollrohr und der luftdichte Abschluß des letzteren erfolgte mit Hülfe der Messinghülse M_2 durch einen auf das Kontrollrohr geschobenen Gummiring G_1 und einen über Messinghülse und Kontrollrohr gezogenen Gummischlauch G_2. Auf der anderen Seite war das Kontrollrohr verschließbar durch einen Gummistopfen.

Druckluftanlage.

Zur Herstellung der Druckluft wurde der im Kellergeschoß des Instituts aufgestellte Kompressor der Lindeschen Luftverflüssigungsanlage benutzt. (Figur 2.)



Figur 2.

Von einem 7-pferdigen Elektromotor angetrieben preßt er die von außen angesaugte Luft in zwei Stufen auf maximal 200 Atmosphären. Die Druckluft tritt durch ein Rückschlagventil R in den Wasserabscheider W, in dem sich der Hauptteil des zum Schmieren der Kompressorstulpen eingespritzten Wassers absetzt. Es wird durch das Ventil H_1 abgelassen. Auf dem oberen Ende des Wasserabscheiders sitzt das zum Messen des Druckes benutzte Federmanometer M von Schäffer und Budenberg, Magdeburg-Buckau. An dem Ventil H_2 vorbei geht die Luft in das mit einem Auslaßventil H_3 versehene Trockenrohr T und durchstreicht in diesem von unten nach oben eine etwa einen Meter lange Säule (Durchmesser ca. 7 cm) von feinkörnigem Chlorcalcium und Natronkalk zur Absorption von Wasserdampf und Kohlensäure. Schließlich passiert die Luft ein Schlangenrohr S, das mit einem Viehsalz-Eisgemisch auf rund -25^0 abgekühlt wird, ebenfalls zum Zweck des Festhaltens von Wasserdampf und geht an einem mit zwei Ventilen H_4 H_5 versehenen T-Stück vorbei durch ein ca. 25 Meter langes Kupferrohr zu dem Druckzylinder im zu ebener Erde gelegenen Zimmer des Beobachters.

Vom Ventil H_5 im Keller führt eine Bleileitung zu einem Dreiweghahn H_5 und von dort zu einer Wasserluftpumpe um die ganze Anlage evakuieren und dann trockene kohlensäurefreie Luft einlassen zu können. Die Dichtungen an Ventilen und Verschraubungen erfolgten durch Leder, Vulkanfiber oder Blei. Letzteres erwies sich als besonders zuverlässig. Es machte geringe Mühe in der ganzen Anlage den Druck selbst bei 200 Atmosphären länger als eine Stunde innerhalb der Meßmöglichkeit des Manometers von ca. einer Atmosphäre konstant zu halten.

Temperaturbäder und Temperaturmessung.

Das Kontrollrohr wurde bei den definitiven Versuchen auf Zimmertemperatur gehalten. Der Druckzylinder mit eingelegtem Untersuchungsrohr befand sich bei den Versuchen der ersten Reihe in schmelzendem Eise, bei denen der zweiten in einem Gemisch von absolutem Alkohol und fester Kohlensäure.

Das Kontrollrohr lag in einem oben offenen Zinkkasten von $93 \times 16 \times 16$ cm. Die Befestigung am Kasten erfolgte durch zwei auf das Rohr aufgeschobene Gummistopfen, die in zwei in den Seitenwänden des Kastens angebrachte Löcher hineinpaßten. Der erwähnte seitliche Ansatz des Kontrollrohrs kam außerhalb des Kastens zu liegen. In den Kasten wurde Wasser von Zimmertemperatur eingefüllt. Zur Temperaturbestimmung dienten zwei in ganze Grade geteilte Thermometer, die in zwei am Zinkkasten befestigten Messinghaltern steckten, so daß ihre Kugeln sich dicht neben dem Kontrollrohr befanden.

Bei den ersten Probeversuchen war das Kontrollrohr mit schmelzendem Eis umgeben. Die so erhaltenen Resultate stimmten sehr schlecht untereinander, wie es scheint eine Folge von Luftströmungen, hervorgerufen durch die Temperaturdifferenz zwischen der auf 0^0 abgekühlten Mitte des Kontrollrohrs und den auf Zimmertemperatur befindlichen Enden.

Der Druckzylinder lag für die 0^0-Versuche gleichfalls in einem oben offenen Zinkkasten auf zwei Holzstützen. Die Maaße des Kastens waren $122 \times 25 \times 25$ cm. In der einen Schmalseite befand sich eine kreisförmige Öffnung, die gestattete den Druckzylinder, durch einen Gummiring gedichtet, so einzupassen, daß er wenige Millimeter über die Außenseite des Kastens herausragte. So war es auf bequeme Art möglich, von der Außenseite des Kastens her das Untersuchungsrohr in den Druckzylinder einzuführen, den Stahlstab einzusetzen und den Verschlußkopf zuzuschrauben.

Als Alkohol-Kohlensäuretemperaturbad diente ein bedeutend kleineres Gefäß aus drei ineinandergesteckten spiegelblanken zylindrischen Weißblechkästen, die von einander durch zwei Filzlagen thermisch isoliert waren. Die Gefässe waren oben offen und konnten durch einen Blechdeckel geschlossen werden. Der innerste Kasten war 114 cm lang und hatte 15 cm Durchmesser i. L. Der Druckzylinder lag auf zwei entsprechend geformten Holzstützen und war in der eben beschriebenen Art durch die eine Seitenwand des Kühlgefässes durchgeführt.

Um Klarheit zu gewinnen, ob und in welcher Zeit die Luft im Druckzylinder die Temperatur der umgebenden Bäder annimmt, wurde ein Bolo-

meter eingeführt. Auf ein Glasrohr von 30 mm äußerem Durchmesser und 1,5 mm Wandstärke war ein Gewinde von 0,6 mm Ganghöhe und 32 Windungen eingeätzt und in dieses ein Platindraht von 0,05 mm Dicke, bezogen von Heraeus-Hanau, eingelegt. Der Draht wurde in der üblichen Weise vor und nach dem Aufwickeln elektrisch ausgeglüht. Der Widerstand bei 0^0 betrug etwa 130 Ohm. Der Draht war vor Beschädigung geschützt durch ein zylindrisch gebogenes Glimmerplättchen, das durch einen aufgeschobenen Messingring gehalten wurde.

Dieses Bolometer (*B* Fig. 1), das den Stahlstab konzentrisch umfaßte ohne ihn zu berühren, war auf die Platte M_1 aufmontiert, so daß es mit dem Stahlstab als Ganzes in den Druckzylinder eingesetzt werden konnte. Es kam etwa 14 cm von der Platte M_1 entfernt in den Zylinder zu liegen und blieb somit noch etwa 8 cm vom Anfang des Untersuchungsrohrs entfernt.

Folgender Weg wurde gewählt, um beide Zuleitungen zum Bolometer von einander isoliert druckdicht nach außen zu führen.

Der Stahlstab wurde vom Druckzylinder elektrisch isoliert, dadurch, daß M_1 ganz mit isolierendem Material umgeben wurde. Auf der Seite von M_1, die vom Verschlußstück gefaßt wurde, lag ein Vulkanfiberring *F*, der Zylindermantel von M_1 war mit einem Hartgummiring *H* umgeben, und zwischen M_1 und dem Druckzylinderauflager lag ein Lederring *L*, der zugleich als Dichtung diente. Die eine Zuleitung des Bolometers ging zur Messingplatte M_1. Eine auf die Messinghülse M_2 aufgesetzte Klemmschraube vermittelte die Weiterleitung nach außen. Die andere Bolometerzuleitung ging zur Bleidichtung *Bl* zwischen der Lederdichtung *L* und dem Auflager. Die Bleidichtung wurde durch Zuschrauben des Verschlußstückes energischst gegen das Druckzylinderauflager gepreßt und vermittelte einen exakten metallischen Kontakt mit dem Druckzylinder. Die Weiterleitung nach außen erfolgte durch einen an die Außenseite des Druckzylinders angelöteten Draht.

Gang der Versuche.

Mit der beschriebenen Anordnung wurden nach einer Vorversuchsreihe, bei der Kontroll- und Untersuchungsuhr sich auf Zimmertemperatur befanden, und die zur Orientierung diente, zwei Hauptmeßreihen ausgeführt.

Es ist zuerst eine Beschreibung des Arbeitsverfahrens bei der 0^0-Reihe gegeben. Dann folgen Bemerkungen über die -79^0-Reihe, soweit Abänderungen gegenüber der 0^0-Reihe eintreten mußten.

Vorbereitung der Wellenröhren und des Druckzylinders.[1])

Die Wellenröhren wurden ein für allemal sorgfältigst chemisch gereinigt mit Salpetersäure und Kalilauge. Vor jedem Versuch wurden sie mit frischem trockenem Fensterputzpapier ausgewischt, über einem Bunsenbrenner erhitzt und während sie noch heiß waren, etwa eine halbe Stunde lang trockene Luft in langsamem Strome durchgesogen. Dann wurde Lykopodium eingefüllt, das längere Zeit zu dünner Schicht ausgebreitet in einem Schwefelsäure-Exsikkator gestanden hatte. Die Pulvermenge wurde möglichst gering genommen. Durch die mit Lykopedium beschickten Röhren wurde noch einige Stunden trockene Luft durchgesogen.

Während dieser Zeit wurde vom Kompressor her etwa 20 Minuten lang trockene Luft durch den Druckzylinder geblasen.

Einsetzen des Untersuchungsrohrs.

Dann wurde das Untersuchungsrohr, am hinteren Ende durch einen Gummistopfen oder bei tiefen Temperaturen durch eine federnde Metallplatte verschlossen, in den Zylinder eingeschoben. Dabei wurde es einige Grade um seine Längsachse gedreht, so daß das Pulver seitlich etwas erhöht an die Röhrenwand zu liegen kam, die bekannte Maßregel um gute Staubfiguren zu erhalten.

Sehr wichtig ist es die Tiefe, bis zu der das Wellenrohr in den Druckzylinder eingeschoben werden muß, richtig zu treffen, denn weder die Stellung bester Resonnanz, bei der der Abstand von der schallübertragenden Endplatte des Stahlstabs bis zu dem das Rohr abschließenden Pfropfen eine ganze Anzahl stehender Wellen beträgt, noch die um eine halbe Wellenlänge verschobene Stellung schlechtester Resonnanz gibt brauchbare Figuren. Im ersten Fall werden die Staubfiguren verwischt, wie es scheint durch zu große Intensität der Schallschwingungen, im zweiten Fall gibt es überhaupt keine Figuren. Die besten Resultate erzielt man bei einer Zwischenstellung. Da diese im voraus nie genau zu ermitteln ist, weil unter anderem der Ton des Stahlstabs variiert (siehe unten), so ist das Auftreten guter Figuren etwas Glückssache und ein beträchtlicher Prozentsatz der Versuche schlägt ganz fehl.

[1]) Die etwas umständlich erscheinenden Vorsichtsmaßregeln sind nötig um dem Lykopodiumpulver seine möglichste Leichtbeweglichkeit zu sichern.

Einsetzen des Kontrollrohrs. Abwarten der Temperaturkonstanz.

Nach dem Einführen des Untersuchungsrohrs in den Druckzylinder wurde der Stahlstab eingesetzt und das Verschlußstück behutsam eingeschraubt. Nun wurde auf der anderen Seite des Stahlstabs das im Zinkkasten liegende Kontrollrohr in der beschriebenen Art befestigt.

Während durch das Kontrollrohr mit Hilfe des seitlichen Ansatzes und eines durchbohrten Gummistopfens trockene kohlensäurefreie Luft durchgesogen wurde, wurde der Druckzylinder zweimal auf etwa 15 mm Quecksilberdruck vom Maschinenraum her ausgepumpt und trockene, kohlensäurefreie Luft eingelassen. Unterdessen wurde in die Zinkwanne des Kontrollrohrs Wasser von Zimmertemperatur eingegossen und die Thermometer eingesetzt. Gleichzeitig wurde der Zinkkasten des Druckzylinders mit gestoßenem Eis und Wasser gefüllt.

Hierauf wurde durch den Kompressor der vorgesehene Druck hergestellt, was, um auf 200 Atmosphären zu kommen, etwa 30 Minuten dauerte. Jetzt wurde auch der Luftstrom durch das Kontrollrohr abgestellt und das ganze System zum Erreichen konstanter Temperatur sich selbst überlassen. Das Wasserbad des Kontrollrohrs wurde öfters energisch umgerührt und der Gang der beiden Thermometer notiert. Ebenso wurde der Widerstand des Bolometers im Untersuchungsrohr verfolgt. Die Zeit, die verstrich, vom Einfüllen des Eises bis zum Konstantwerden des Bolometerwiderstandes, betrug etwa eine Stunde, wobei das Herstellen des Druckes nur bei den ersten Kolbenhüben des Kompressors einen kleinen Einfluß auf den Temperaturgang ausübte. Daß der endgültige Bolometerwiderstand wirklich 0° entsprach, ergab die vorherige Aichung (siehe unten).

Vom Druckpumpen bis zum Erzeugen der Staubfiguren wurde etwa 75 Minuten gewartet, um der Temperaturkonstanz ganz sicher zu sein.

Nachdem die Verhältnisse so festgelegt waren, wurde bei den späteren Versuchen das Bolometer weggelassen, weil es die Handhabung des Stahlstabs immerhin etwas umständlich machte.

Anreiben des Stahlstabs. Druckablesung.

Nun wurde der Stahlstab durch einen kolophoniumbestreuten Bierfilz angerieben. Es wurde darauf geachtet möglichst kurz und möglichst nur einmal anzureiben. Die Intensität des Anreibens wurde so schwach gehalten, daß sich im Kontrollrohr gerade noch Staubfiguren bildeten. Man konnte

dann sicher sein. daß auch im Untersuchungsrohr Figuren entstanden waren, wenn überhaupt richtige Resonnanz vorhanden war. Denn in komprimierter Luft bilden sich die Figuren viel leichter wegen der größeren Dichte der schwingenden Luft. Zu intensives Anreiben war zu vermeiden wegen der Bildung unregelmäßiger Staubfiguren.

Sofort nach dem Anstreichen wurde das Manometer nebst danebenhängendem Thermometer abgelesen und dann die Luft aus dem Drucksystem durch Öffnen des Ventils H_3 langsam abgelassen. Schließlich wurde das Untersuchungsrohr aus dem Druckzylinder herausgenommen und mit einem Kork verschlossen stehen gelassen, bis es Zimmertemperatur angenommen hatte.

Ablesen der Wellenlängen.

Zum Bestimmen der Wellenlänge im Kontrollrohr trug der Zinkkasten, aus dem vor dem Ablesen das Wasser entfernt wurde, zwei Messingstutzen, auf die ein Messingmaßstab parallel zum Wellenrohr in einigen Millimetern Abstand so aufgeschraubt werden konnte, daß er mit seiner geteilten Fläche auf die Höhe der Achse des Wellenrohrs zu liegen kam.

Auf das Rohr wurde federnd aufgeschoben eine parallel zur Achse aufgeschlitzte, innen geschwärzte Messinghülse mit scharfem, weißen Strich senkrecht zur Achse. Dieses bekannte Verfahren gestattet ein exaktes Einstellen des Strichs auf die Knoten der Figuren. Ein mit der Messinghülse verbundenes Messingblech mit Index vermittelte die Ablesung der Einstellung auf dem Maßstab. Die Ablesung der Knoten erfolgte je zweimal, indem man die Reihe der Figuren nach der einen und nach der entgegengesetzten Richtung durchlief. Je zwei bis drei Wellen am Stempel des Stahlstabs und am Ende des Wellenrohrs wurden nicht mitgemessen.[1])

Um die Wellen im Untersuchungsrohr abzulesen, wurde es mit Hilfe zweier Klammern direkt auf den Maßstab aufgeklemmt. Die Einstellung auf die Knoten erfolgte mit einer Messinghülse ähnlich der beschriebenen, die Ablesung am Maßstab durch Visieren über den Rand der Hülse.

Damit war der Versuch beendet und es begannen die Vorbereitungen für den nächsten. Ein jeder solcher Versuch dauerte einen halben Tag. Ein Vorteil dabei war die Möglichkeit der Benutzung desselben Kontroll- und Untersuchungsrohrs bei sämtlichen Versuchen der 0^0-Reihe.

---

[1]) Kundt, Pogg. Ann. 135, S. 337. 1868.

Abweichungen von dem beschriebenen Verfahren bei den Versuchen der — 79⁰-Reihe.

Das langsame Arbeiten verbot sich von selbst bei den Versuchen, bei denen der Druckzylinder in einem Bad von absolutem Alkohol und fester Kohlensäure lag, wegen der Kosten. Da die Zeit fehlte, nach jedem Versuch die Wellenröhren zu reinigen, mit neuem Pulver zu beschicken und zu trocknen, wurden zwei Kontrollrohre, jedes in der beschriebenen Art, in einen Zinkkasten montiert und drei Untersuchungsrohre benutzt. Die Vorbehandlung war dann wie oben.

Recht umständlich war das Herstellen und Erhalten des Temperaturbades für den Druckzylinder. Nachdem das dreiwandige Kühlgefäß etwa zur Hälfte mit absolutem Alkohol gefüllt war, wurde feste Kohlensäure zugesetzt, die aus großen, ca. 20 kg flüssige Kohlensäure fassenden Bomben, durch direktes Ausströmen in einen Sammtbeutel erhalten wurde. Ein schlimmer Mißstand war das sehr bald eintretende Verstopfen der Ausströmungsöffnung durch das stets in den Bomben enthaltene und in der Öffnung gefrierende Wasser. Um Zeitverluste möglichst zu vermeiden, wurden deshalb mehrere Bomben gleichzeitig in Anbruch genommen.

Das Kühlgefäß faßte ca. 17 Liter Gemisch. Die Schichtdicke des Bades rings um den Zylinder betrug ca. 3 cm. Der Gesamtbedarf an Kohlensäure für einen Versuchstag, an dem etwa 8—10 Versuche gemacht werden konnten, belief sich auf 120—140 kg, der an absolutem Alkohol auf etwa 15 Liter.[1])

Wie das Bolometer zeigte, dauerte es rund drei Stunden vom Beginn der Badherstellung an, bis die Luft im Untersuchungsrohr Temperaturkonstanz erreichte. und der Stahlstab zum erstenmal angestrichen werden konnte. Nun wurde der Druckzylinder geöffnet. das Untersuchungsrohr möglichst rasch herausgeholt, ein neues inzwischen vorbereitetes eingeschoben, und der Zylinder wieder verschlossen. Gleichzeitig wurden die Kontrollrohre ausgetauscht. Nun, nachdem der Druckzylinder abgekühlt war. dauerte es nur etwa 30 Minuten, bis die Temperatur wieder konstant wurde. Um ganz sicher zu gehen, wartete man bei jedem Versuch vom Druckpumpen bis zum Anstreichen des Stahlstabs mindestens 45 Minuten.

Die Verschraubungen und Dichtungen funktionierten bei — 79⁰ genau so gut wie bei 0⁰.

[1]) Der Institutsmaschinist Georg Eichenseher hatte vollauf zu tun, das Kältegemisch dauernd in richtigem Zustand zu halten. Nur durch sein durchaus selbständiges Vorgehen hierbei war es mir möglich, die ganze Aufmerksamkeit auf die eigentlichen Messungen zu konzentrieren.

Aichungen und Korrektionen. Diskussion der Fehlerquellen.

Chemische Beschaffenheit der Luft. Wasserdampf und Kohlensäure.

Die besonderen Vorsichtsmaßregeln, die getroffen wurden (siehe oben), um die aus dem Kompressor austretende Luft zu trocknen, sind sehr wichtig, weil beim Komprimieren feuchter Luft die relative Feuchtigkeit ungefähr dem Druck proportional zunimmt, so daß Luft, die bei Atmosphärendruck nur Bruchteile von Prozenten relativer Feuchtigkeit besitzt, auf 200 Atmosphären komprimiert, mit Feuchtigkeit gesättigt sein kann, zumal wenn sie noch abgekühlt wird.

Man überschlägt den Einfluß der Feuchtigkeit auf die Schallgeschwindigkeit, indem man in Gleichung (1) für die Dichte trockener Luft die der feuchten einführt.[1]) Der isotherme Elastizitätskoeffizient und k sind für feuchte Luft nur wenig verschieden von den entsprechenden Werten in trockener Luft, so daß man ihre Änderung für den vorliegenden Überschlag nicht in Betracht zu ziehen braucht. Im ungünstigsten Falle, wenn die Luft bei Atmosphärendruck und 0^0 mit Wasserdampf gesättigt ist, ergibt sich der Einfluß zu $1.1\,^0/_{00}$. Dieser Einfluß muß bei wachsendem Druck diesem proportional abnehmen, weil der Sättigungsdruck des Wasserdampfes konstant bleibt. Schon bei 25 Atmosphären beträgt der mögliche Fehler also nur noch etwa $0.04\,^0/_{00}$. Für $-\,79^0$ entfällt er vollständig.

Der Einfluß etwa nicht absorbierter Kohlensäure nimmt nicht mit wachsendem Druck ab, weil die Kohlensäure sehr weit vom Zustand der Sättigung entfernt ist. Im ungünstigsten Fall könnte er $0.08\,^0/_{00}$ betragen.

Temperaturmessung.

Zur Bestimmung der Temperatur des Wasserbades, in dem das Kontrollrohr lag, dienten zwei in ganze Grade geteilte Quecksilberthermometer (siehe oben). Sie wurden unter allen Vorsichtsmaßregeln verglichen mit einem von der physikalisch-technischen Reichsanstalt beglaubigten, in 0.1^0 geteilten Normalthermometer, dessen Nullpunkt kontrolliert wurde und innerhalb der Ablesemöglichkeit mit den Angaben des Prüfungsscheins stimmte. Die erhaltenen Korrektionen wurden graphisch aufgetragen und verwertet.

[1]) Winkelmann, Handbuch. 1. Aufl., I, S. 794. 1891.

Durch die Verwendung von Wasser von Zimmertemperatur als Bad für das Kontrollrohr wurde der Temperaturgang sehr herabgedrückt. Er betrug selten über 0.1^0 pro Stunde, wodurch die Sicherheit gegeben ist, daß die Luft im Kontrollrohr wirklich die Temperatur hatte, die die Thermometer des Wasserbades anzeigten.

Die Temperaturbestimmung der Luft im Kontrollrohr ist also mindestens auf 0.1^0 genau. Der davon mögliche Fehler auf das Endresultat beträgt $0.2^0/_{00}$.

Zur Konstatierung, ob und in welcher Zeit die Luft im Untersuchungsrohr die Temperatur des den Druckzylinder umgebenden Bades annahm, diente das Bolometer (siehe oben). Zur Aichung mußte es vom Stahlstab abmontiert werden. Es bildete den einen Zweig einer Whentstoneschen Brücke, der andere war ein Widerstand von Edelmann-München, der dritte und vierte ein Meßdraht mit Ballastwiderstand. Im Brückenzweig lag ein Drehspulengalvanometer von Siemens und Halske mit objektiver Ablesung (Widerstand 10000 Ohm, Empfindlichkeit 1 Skt $= 1 \cdot 4 \cdot 10^{-8}$ Ampère). Um die späteren Temperaturmessungen unmittelbar mit der Aichung vergleichen zu können, wurde nach der Aichung an der ganzen Kombination nichts mehr geändert, auch am Rheostaten wurden dieselben Widerstandsrollen benutzt. Nur das Bolometer mußte wieder auf den Stahlstab aufmontiert werden. Dies geschah so, daß die Zuleitungen sich nur änderten einerseits um das Stück des Stahlstabs zwischen seinen beiden Knoten, andererseits um das in Betracht kommende Stück des Druckzylinders (siehe oben). Eine wahrnehmbare Änderung des Widerstandes trat, wie zu erwarten war, hierbei nicht ein. Die Verschiebung des Schleifkontaktes auf dem Meßdraht betrug 1.13 cm für 1^0 Temperaturänderung des Bolometers.

Auf diese Art wurde die oben vorweggenommene Tatsache festgestellt, daß eine Stunde nach Einfüllen des Eises in den Zinkkasten der Bolometerwiderstand konstant wurde und innerhalb der Meßfehlergrenze (0.2 mm Verschiebung am Meßdraht, entsprechend 0.02^0 C.) der Temperatur von 0^0 entsprach.

Dasselbe ergab sich, wenn der Zylinder komprimierte Luft enthielt. Eine Berücksichtigung des Druckeinflusses auf den Bolometerwiderstand[1]) fand nicht statt, weil die Größenordnung dieses Einflusses etwa die der Meßfehlergrenze ist.

In ähnlicher Weise erfolgte Aichung des Bolometers und Temperaturmessung bei der Temperatur des Alkohol-Kohlensäuregemisches. Es wurde die Zeit ermittelt, die man abwarten mußte, um im Druckzylinder Temperaturkonstanz zu erhalten und festgestellt, daß diese Temperatur auf etwa 0.1^0 die

---

[1]) W. E. Williams, Phil. Mag. May. 1907. Dortselbst auch Literatur.

des Außenbades war. Der davon herrührende mögliche Fehler auf das Endresultat beträgt 0.2⁰/₀₀. Die Temperatur des Kältegemisches hierbei und bei den Schallgeschwindigkeitsmessungen wurde aus dem Barometerstand entnommen. Zu Grunde gelegt wurde der von Holborn[1]) angegebene Siedepunkt: — 78·34⁰ für 760 mm Quecksilberdruck, kombiniert mit der von Dubois und Wills[2]) ermittelten Abhängigkeit dieser Temperatur vom Druck: $\frac{dp}{dt} = 55$ mm Quecksilbersäule pro Grad. Dazu kommt unter Umständen der Einfluß der Eintauchtiefe des gekühlten Raumes in das Kältegemisch. Nach Bestelmeyer[3]) entsprechen 42 cm Tiefe des Gemisches rund 2.7 cm Quecksilberdruck.

Druckmessung.

Die Druckmessung geschah mit dem auf dem Wasserabscheider befestigten Federmanometer von Schäffer und Budenberg. Sein Druckbereich ging bis 400 Atmosphären. der Wert eines Teilstrichs war 10 Atmosphären, die Ablesemöglichkeit also eine und unter günstigen Bedingungen eine halbe Atmosphäre.

Es wurde verglichen mit einem großen Präzisionsinstrument derselben Firma, dessen Verwendbarkeit für exakte Druckmessungen von Wagner[4]) in eingehender Weise mit Hilfe des Amagatmanometers untersucht war. Nach den dort gemachten Erfahrungen war zu berücksichtigen der Einfluß von elastischer Nachwirkung und Temperatur.[5])

Zur Abkürzung sei das von Wagner auf das Amagatmanometer bezogene Instrument mit *M M*, das bei den Schallgeschwindigkeitsmessungen verwendete mit *L M* bezeichnet.

Die Gebrauchsweise des *L M*, wenigstens bei den 0⁰-Versuchen, war eine typische im Sinne Wagners, so daß die Berücksichtigung der elastischen Nachwirkung nach den dort gegebenen Vorschriften erfolgen konnte: es wurde stets nach einer Erholungszeit von mindestens sechs Stunden der Druck langsam hergestellt und eine Stunde darnach abgelesen.

Um bei der Vergleichung von *L M* und *M M*, die mit Hilfe einer von Schäffer und Budenberg gelieferten Druckpumpe erfolgte, Bedingungen zu haben, die den genannten möglichst entsprächen, wurden beide Manometer

[1]) Holborn, Drudes Ann. 6, S. 242. 1901.
[2]) Dubois und Wills, Verh. d. deutschen phys. Ges. 1, S. 168. 1899.
[3]) Drudes Ann. 13, S. 968. 1904.
[4]) Drudes Ann. 15, S. 906. 1904.
[5]) Für freundliche Unterstützung bei allen Fragen der Druckmessung sage ich Herrn Dr. Wagner hiermit meinen Dank.

nach einer Erholungspause von einem Tage unter den gewünschten Druck gesetzt und eine Stunde lang stehen gelassen. Die Temperatur dabei betrug 8°, dieselbe, die sehr konstant im Maschinenraume bei der Benutzung des *L M* geherrscht hatte. Dann wurden beide Manometer abgelesen.

Der Druck, der dabei in den Manometern herrschte, war zu entnehmen aus der von Wagner für das *M M* gegebenen Tabelle X, S. 951. Dabei ist zu berücksichtigen, daß diese Werte erhalten sind, indem der Druck in 35 Minuten gleichmäßig auf 300 Atmosphären gesteigert und bei jeder Druckstufe sofort abgelesen wurde, während im vorliegenden Fall die Manometer außerdem noch eine Stunde unter Druck gestanden hatten. Die Größe der hierfür an den Werten der Tabelle X anzubringenden Korrektionen ist den Angaben der Seiten 940 und 941 entnommen. Sie ist für unsere Zwecke belanglos und nur der Vollständigkeit halber angebracht.

Zu dieser Korrektion des *M M* für elastische Nachwirkung kommt die Korrektion für Temperatur. Die Vergleichung der Manometer erfolgte bei 8°, während die Werte der Tabelle X für 15° gelten. Der Einfluß der Temperatur auf die Angaben des *M M* ist der von Wagner in seiner Dissertation[1]) S. 38 gegebenen Beziehung entnommen:

$$P_t = P_{15} + \frac{(P_{15} - 130)(15 - t)}{2933}.$$

Dabei bedeutet P_{15} den Druck in Atmosphären, den das Manometer bei 15° anzeigt, P_t den bei der Gebrauchstemperatur t.

Nach Anbringung dieser Korrektionen an den Angaben des *M M* ist der Druck bekannt, der zur Zeit der Ablesung in der Druckpumpe herrschte. Auf diesen kann also die Ablesung des *L M* einwandsfrei bezogen werden.

Da es sehr zeitraubend gewesen wäre, das ganze *L M* in typischer Gebrauchsweise durchzuaichen, begnügte man sich mit der Feststellung, daß bei drei Drucken, die den Teilstrichen 90, 150, 210 Atmosphären des *M M* entsprachen, der Gang der elastischen Nachwirkung beim *L M* derselbe war. Die Vergleichung bei den anderen Drucken erfolgte, indem bei steigendem und fallendem Druck ein rascher Zyklus durchlaufen wurde. An den so gewonnenen, auf die Angaben des *M M* bezogenen Ablesungen des *L M*. waren dann noch die für einstündiges Stehen unter Druck ermittelten Korrektionen anzubringen, die gerade in der Grenze der Meßmöglichkeit lagen.

Die beigegebenen Tabellen enthalten die Zahlendaten. Die korrigierten Werte für andere als in der Tabelle angeführte Drucke wurden aus diesen interpoliert.

[1]) Leipzig, Johann Ambrosius Barth.

Die Druckberechnung erfolgte für die — 79°-Versuche in derselben Weise. Es war zwar die Erholungszeit für das *L M* meist kürzer, wie bei den 0°-Versuchen, jedoch nicht in dem Maß, daß ein für die Messungen merklicher Fehler entstehen konnte.

Tabelle 1.

Vergleich der elastischen Nachwirkung der Manometer.

Datum	Druck erzeugt	Ablesung am		Zeit	Ablesung am	
		M M	*L M*		*M M*	*L M*
15. XII. 04	10^h 38	210	222	11^h 43	210	222.5
16. XII. 04	11 2	150	158	12 8	150	158.5
17. XII. 04	9 35	90	95	10 45	90	95.5

Alle Drucke in kg/qcm.

Tabelle 2.

Vergleichung der Manometer bei rasch durchlaufenem Druckzyklus.

Der Gang aufwärts dauerte 3 Minuten.

M M	*L M* steigender Druck	*L M* fallender Druck
30	33	33
60	65	
90	95	
125	132 ↓	↑ 132.5
150	158	
180	189 ↓	
210	222	222

Tabelle 3.

Korrektionen an den Ablesungen des *M M* für die Vergleichsbedingungen.

Nomineller Druckwert	Wirklicher Druckwert für die bei Wagner, Tabelle X, S. 951, definierte Art der Beanspruchung	Druckwert, korrigiert für den Fall, daß das *M M* vor der Ablesung eine Stunde unter Druck stand	Druckwert, korrigiert für die Benützung des *M M* bei 8°
5	4.56	4.56	4.26
30	29.00	28.98	28.74
60	59.16	59.13	58.96
90	89.27	89.22	89.12
125	124.54	124.48	124.47
150	149.60	149.52	149.57
180	179.51	179.42	179.54
210	209.41	209.31	209.50

Tabelle 4.

Korrektionstabelle für das *L M* bei der definierten typischen Gebrauchsweise.

Angabe des *L M*	Wirklicher Druck
0	0
33.5	28.7
65.5	59.0
95.5	89.1
132.5	124.5
158.5	149.6
189.5	179.5
222.5	209.5

Für die spätere Verwertung der Tabellen 1—4 sei darauf hingewiesen, daß alle Drucke Überdrucke über die Atmosphäre bedeuten. Um den bei den Schallgeschwindigkeitsmessungen im Innern des Druckzylinders vorhandenen Druck zu erhalten, ist zu den Ablesungen des *L M* der Atmosphärendruck zu addieren. (Siehe Tabellen 5 und 6, Kolonne 3.)

Aussehen der Staubfiguren.

Wie erwähnt, war es zu vermeiden, die komprimierte Luft im Untersuchungsrohr in intensive Schwingungen zu versetzen, entweder durch Resonanz oder energisches Anreiben des Stahlstabes. Die Folge war, besonders bei hohen Drucken, die, daß das Pulver aus den Schwingungsbäuchen weggeblasen wurde und sich in unregelmäßig verteilten Staubhäufchen in der Nähe der Knoten sammelte. Schon Kundt[1]) und später Kundt und Warburg[2]) haben auf diese Folge zu intensiver Schwingungen hingewiesen.

Wie Kundt[3]) gezeigt hat, kann die starre Verbindung zwischen Schallquelle und Wellenrohr zu Störungen der Staubfiguren Anlaß geben dadurch, daß das Wellenrohr zum Mitschwingen veranlaßt wird. Die starre Verbindung von Stahlstab und Druckzylinder war im vorliegenden Fall aus Dichtungsgründen nicht zu umgehen. Dafür ist die Masse des Zylinders (ca. 50 kg), verglichen mit der des Stahlstabs so groß, daß ein Mitschwingen ausgeschlossen sein dürfte.

---

[1]) Pogg. Ann. 127, S. 497, 1866.
[2]) Pogg. Ann. 157, S. 362, 1876.
[3]) Pogg. Ann. 135, S. 351, 1868.

Einige charakteristische Typen von Staubfiguren, besonders aus dem Untersuchungsrohr, sind auf Tafel 1 reproduziert. Sie sind erhalten als direkte Schattenrisse auf lichtempfindliches Papier, das an das Wellenrohr zylindrisch angebogen wurde, hergestellt mit Sonnenlicht. Trotz ihres meist etwas unregelmäßigen Aussehens sind sie gut auszuwerten und ergeben befriedigende Übereinstimmung der Einzelwellenlängen, wenn man die in den Knoten liegen gebliebenen Staubhäufchen zur Einstellung benutzt, ein von Kundt und Warburg (l. c.) für solche Fälle empfohlenes Verfahren.

Das Aussehen der Wellen im Kontrollrohr war immer sehr regelmäßig, mit engen Knoten und breiten Bäuchen.

Korrektionen für die Wellenlänge.

Der Messingmaßstab, an dem die Ablesung der Staubfiguren erfolgte, wurde mit dem Normalmaßstab des Institutes aus Invar,[1]) an dem praktisch keine Korrektion anzubringen ist, verglichen. Die Vergleichstemperatur betrug 14.0°, die Meßfehlergrenze 0.02 mm. Der Maßstab erwies sich als für den vorliegenden Zweck fehlerfrei mit Ausnahme der Strecke 0—10 cm, die um 0.08 mm länger war als das entsprechende Stück des Normalmaßstabes und die Strecke 40—50 cm, die um 0.12 mm zu lang war. Auf der Strecke 40 bis 50 cm gelang es mir einen Sprungfehler von rund 0.1 mm nachzuweisen zwischen den Teilstrichen 46.7 und 46.8 cm, um den dieser Millimeter zu groß war. Deswegen wurde zu jeder Ablesung über 46.8 0.1 mm addiert. Auf der Strecke 0—10 cm war ein größerer Sprungfehler nicht nachzuweisen. Da es nicht sicher war, ob mehrere kleinere Sprungfehler vorhanden waren, oder ob sich der Fehler gleichmäßig über die ganze Strecke verteilte, wurde eine Korrektion dafür nicht angebracht. Abgesehen von der Kleinheit ist diese Unterlassung auch deswegen belanglos, weil die Wellen im Kontroll- und im Untersuchungsrohr am selben Maßstab gemessen und daraus das Verhältnis der Wellenlängen berechnet wurde. Diese Bemerkung gilt auch für den Sprungfehler zwischen 46.7 und 46.8 cm.

Weil der Messingmaßstab bei 14.0° mit dem Normalmeter verglichen war und bei einer anderen Temperatur $14 \pm t$ zur Ablesung benutzt wurde, waren zur Wellenlänge λ mm zu addieren bzw. davon zu subtrahieren: $0.000019 \cdot t \cdot \lambda$ mm.

Die Glasrohrausdehnung war in Rechnung zu ziehen, weil die Staubfiguren

[1]) Geliefert von der Société génévoise pour la construction d'instruments.

bei verschiedenen Temperaturen erzeugt und abgelesen wurden.[1]) Sei die Temperaturdifferenz t, dann ist die mittlere Wellenlänge um $0.000008 \cdot t \cdot \lambda$ zu verkleinern, falls die Ablesetemperatur höher ist als die Entstehungstemperatur der Wellen.

Eine Korrektion wegen des Druckeinflusses auf die Dimensionen des Untersuchungsrohrs wurde als nicht in Betracht kommend vernachlässigt.

Der von Kundt[2]) experimentell gefundene Einfluß der Röhrenweite auf die Schallgeschwindigkeit wurde von Kirchhoff[3]) auf die Wirkung von Wärmeleitung und innerer Reibung im Gase des Wellenrohrs zurückgeführt. Die so abgeleitete Beziehung wurde für weite Röhren unter normalen Bedingungen wenigstens annähernd experimentell bestätigt.

Nimmt man die Kirchhoffsche Formel für die im Untersuchungsrohr vorkommenden Bedingungen von Druck und Temperatur auch nur als annähernd gültig an, so wäre daraus zu folgern, daß die Röhrenweitenkorrektion bedeutend geringer sein muß, als bei Atmosphärendruck. Denn Wärmeleitung und innere Reibung ändern sich nur wenig mit dem Druck,[4]) wogegen die Gasmenge im Untersuchungsrohr ungefähr dem Druck proportional zunimmt. Experimentelle Resultate Witkowskis (s. l. c.) scheinen diese Schlußfolgerung zu bestätigen. Dieser arbeitete mit Röhren von 20.7 bzw. 8.6 mm Durchmesser und Wellenlängen von rund 26 und 46 mm bei 0^0 und Drucken bis 110 Atmosphären. Aus seinen Messungen scheint hervorzugehen, daß der Einfluß der Röhrenweite bei hohen Drucken sogar den entgegengesetzten Sinn haben kann von dem, den man nach der Kirchhoffschen Formel erwarten sollte, indem die Schallgeschwindigkeit in engen Röhren und für große Wellenlängen größer ist als für weite Röhren und kurze Wellen. Die Größenordnung der Abweichungen deckt sich allerdings nahe mit seiner Meßfehlergrenze. Witkowski vermutet als Ursache dieser merkwürdigen Umkehrung des Röhrenweiteneinflusses eine endliche Amplitude der Schwingungen im Untersuchungsrohr.

Im vorliegenden Fall wurde von einer Anbringung der Röhrenweitenkorrektion überhaupt abgesehen. Den so möglichen Fehler wird man kleiner als $1^0/_{00}$ schätzen dürfen. Denn es kommt lediglich das Verhältnis der Wellenlängen in Kontroll- und Untersuchungsrohr in Betracht. Die Korrektion beträgt

---

[1]) Strecker, Wiedem. Ann. 13, S. 28, 1881.

[2]) Monatsberichte der Berliner Akademie S. 858. 1867.

[3]) Pogg. Ann. 134, S. 177. 1868.

[4]) Die kinetische Gastheorie verlangt Unabhängigkeit vom Druck. Für die innere Reibung von Kohlensäure bei höheren Drucken liegen Untersuchungen von Warburg und Babo (Wiedem. Ann. 17, S. 390. 1882) vor, die eine kleine Abhängigkeit vom Druck ergeben.

für das Kontrollrohr rund 1⁰/₀₀,[1]) während sie für das Untersuchungsrohr dem eben Gesagten zufolge jedenfalls kleiner ist.

Die Korrektion könnte noch weiter herabgedrückt werden durch Verkleinern der Wellenlänge im Verhältnis zur Röhrenweite. Dem setzt das Auftreten unregelmäßiger und schiefer Staubfiguren eine Grenze. Die in dieser Beziehung gemachten Erfahrungen decken sich völlig mit denen von R. Koenig.[2]) F. A. Schulze,[3]) sowie J. Müller,[4]) ziehen zur Erklärung das Vorhandensein von Obertönen heran, ersterer unter Annahme von Intensitätsunterschieden senkrecht zur Röhrenachse.

Experimentell läßt sich feststellen, daß die Staubfiguren bei gleicher Röhrenweite besonders schief werden, wenn man die Röhre lang nimmt und den tongebenden Stahlstab nicht zentrisch parallel zur Röhrenachse, sondern schief dazu einstellt, daß dagegen die Figuren regelmäßig werden, wenn man bei gleicher Röhrenweite die Wellenröhre nur einige Wellen lang macht und den Stahlstab möglichst gut zentriert und der Röhrenachse parallel stellt.

Wie bemerkt, kamen bei allen Versuchen der 0°-Reihe dieselben beiden Röhren als Kontroll- und Untersuchungsrohr zur Verwendung. Dies war bei den Versuchen der — 79°-Reihe nicht möglich. Die dazu benützten Röhren wurden so ausgesucht, daß ihr Durchmesser bis auf Bruchteile von Millimetern übereinstimmte. So war man sicher, daß der Einfluß der Röhrenweite bei allen Versuchen wenigstens derselbe war.

Die für die Staubfiguren nötige Pulvermenge wurde so gering gewählt wie möglich, um gut sichtbare Figuren zu erhalten. Nach den Erfahrungen von Kundt[5]) dürfte bei der relativ großen Röhrenweite ein davon herrührender merklicher Fehler auf das Resultat ausgeschlossen sein.

Unsere zu Grunde gelegte Beziehung (1) ist abgeleitet unter der Voraussetzung, daß die Schwingungsamplitude der die Schallfortpflanzung vermittelnden Luftteilchen unendlich klein ist, verglichen mit der Wellenlänge des Tons.[6]) Für Atmosphärendruck hat Kundt[7]) gezeigt, daß innerhalb seiner Meßfehlergrenze ein Einfluß der Schwingungsintensität des tongebenden Stabes auf die

---

[1]) Valentiner, Drudes Ann. 15, S. 91, 1904.

[2]) Wiedem. Ann. 69, S. 654, 1899.

[3]) Wiedem. Ann. 68, S. 880, 1899. Drudes Ann. 13, S. 1067, 1904.

[4]) Drudes Ann. 11, S. 335, 1903.

[5]) Pogg. Ann. 135, S. 527, 1868.

[6]) S. z. B. Voigt, Thermodynamik I, S. 133.

[7]) Pogg. Ann. 135, S. 538, 1868.

Schallgeschwindigkeit im Wellenrohr nicht zu erkennen war. Ebenso hat Kayser [1]) nachgewiesen, daß unter normalen Bedingungen von Druck und Temperatur eine Änderung der Amplitude der Schwingungen im Wellenrohr im Verhältnis 1 : 8 keine Änderung der Schallgeschwindigkeit hervorbringt, die größer ist als $1\frac{1}{2}$ ‰.

Experimentelle Untersuchungen bei hohen Drucken liegen nicht vor.

Wäre ein merklicher Einfluß vorhanden, so müßte er mit einiger Wahrscheinlichkeit zu erkennen sein aus der schlechten Übereinstimmung von Resultaten, die unter sonst gleichen Bedingungen gewonnen sind, da die Intensität der Stahlstaberregung sehr verschieden war. Die am Schluß diskutierte Fehlergrenze der Meßresultate ist also wohl auch ein Maß für diesen sonst vorläufig unzugänglichen Einfluß.

Es wurde weiter in Erwägung gezogen die Möglichkeit einer Erwärmung der im Wellenrohr befindlichen Luft durch die hineingesandte Schallenergie. Warburg [2]) fand mit Hilfe eines Thermoelements, daß in festen Körpern, wenn in ihnen ein Longitudinalton erregt wird, eine Temperaturerhöhung bis zu 2^0 eintreten kann, und daß diese in den Knoten größer ist als in den Bäuchen. Für Gase dagegen war eine merkliche Temperaturerhöhung beim Tönen nicht zu konstatieren, obwohl eine Temperaturänderung der Thermoelementlötstelle von $\frac{1}{500}{}^0$ zu erkennen gewesen wäre.

Dvorak [3]) findet dagegen eine sehr starke Erwärmung der Luft beim Erzeugen stehender Wellen in einer Kundtschen Röhre. Der Nachweis erfolgt durch ein kleines Luftthermometer mit Weingeistindex. Es zeigt sich eine größere Erwärmung, wenn die Thermometerkugel im Bauch einer Welle steht.

Bei den vorliegenden Druckversuchen, bei denen sich ein Bolometer im Druckraum befand, war beim Anstreichen des Stahlstabs eine Temperaturänderung des Bolometers von 0.02° mit Sicherheit nicht nachzuweisen. Wegen des großen Wasserwertes des Bolometers und seiner damit verbundenen Unempfindlichkeit für Temperaturschwankungen der umgebenden Luft sind diesem Resultat weitergehende Schlüsse nicht zu entnehmen.

Eine eingehendere Untersuchung mit einem Bolometer von möglichst geringem Wasserwert, das hergestellt wurde durch Aufwickeln von Platindraht von $\frac{1}{20}$ mm Dicke auf ein Gerüst von vier dünnen Hartgummistäbchen, die im Viereck aufgestellt waren, zeigte, daß in Wellenröhren mit Luft von Atmo-

[1]) Wiedem. Ann. 6, S. 465, 1879.

[2]) Pogg. Ann. 137, S. 632, 1869.

[3]) Pogg. Ann. 153, S. 113, 1874.

sphärendruck unter keinen Umständen eine Erwärmung des Bolometers eintrat, die 0.002° überstieg. Dabei wurden alle in Betracht kommenden Bedingungen, wie Resonanzlänge des Wellenrohrs, Ort des Bolometers, Intensität des Anreibens variiert.

Zur Erklärung der Beobachtungen Dvoraks, die denen Warburgs und den vorliegenden direkt widersprechen, ist es vielleicht nicht ausgeschlossen, daß Dvorak mit seinem Luftthermometer nicht Wärme-, sondern Druckeinflüsse gemessen hat.

Eigenschaften des Stahlstabs.

Die Tonhöhe des schallgebenden Stahlstabs war nicht konstant. Die größten Abweichungen von Einzelwerten untereinander betrugen 8‰. Ein Einfluß des Druckes auf die Tonhöhe war nicht zu erkennen, wohl aber war die Dämpfung hervorgerufen dadurch, daß das eine Ende des Stahlstabs Luft von bedeutend größerer Dichte in Schwingungen zu setzen hatte, sehr merklich. Der Stahlstab war bei hohen Drucken bedeutend schwerer anzureiben.

Die Inkonstanz des Stahlstabtones kann in den Fällen gefährlich werden, in denen ein mehrmaliges Anreiben erfolgen muß, weil nicht sofort die Wellen im Untersuchungsrohr fallen. Dabei können etwa beim ersten Anreiben die Wellen im Untersuchungsrohr entstehen, beim zweiten mit vielleicht etwas geändertem Ton, die Wellen im Kontrollrohr. Dagegen spricht die Tatsache, daß die Wellen im Untersuchungsrohr wegen der großen Dichte der Luft bedeutend leichter entstehen als im Kontrollrohr. Selbst wenn also beim zweiten Anstreichen der Stahlstab einen anderen Ton geben sollte, ist mit einiger Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß der Ton des zweiten Anstreichens für die Lagerung des Pulvers im Untersuchungsrohr maßgebend ist, daß also die Wellen in beiden Röhren von der gleichen Tonhöhe erzeugt werden.

Jedoch hat man auch hier, wie beim Einfluß der Amplitude, nur in der Übereinstimmung von unter sonst gleichen Bedingungen gewonnenen Resultaten ein Maaß für die Erlaubtheit der Annahme.

Zahlenresultate.

Die Tabelle 5 enthält die Resultate der bei 0° ausgeführten Meßreihe. Es wurde keine Messung verworfen, bei der überhaupt gleichzeitig im Kontroll- und Untersuchungsrohr ablesbare Figuren entstanden waren.

Die erste Spalte enthält den Druck, abgelesen am Manometer, in kg/qcm, die zweite den korrigierten Druck in kg/qcm (siehe oben), die dritte den

Tabelle 5. $t = 0^0$.

Druck abgelesen kg qcm	Druck korrigiert kg/qcm	Druck korrigiert in Atm. à 76 cm *Hg* im Druckzylinder	λ in mm im Untersuchungsrohr unkorrigiert	λ im Untersuchungsrohr korr. in mm	λ in mm im Kontrollrohr unkorr.	λ in mm im Kontrollrohr korrigiert	t im Kontrollrohr Grad Celsius	λ im Kontrollrohr auf 0^0 in mm	$\frac{\lambda \text{ Untersuchungsrohr}}{\lambda \text{ Kontrollrohr}}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.9	29.811	29.809	30.682	30.684	17.0	29.770	1.0013
0	0	0.9	29.819	29.817	30.674	30.675	16.0	29.813	1.0001
0	0	0.9	29.827	29.824	30.648	30.649	15.8	29.797	1.0009
22.0	18.9	19.2	29.947	29.944	30.590	30.591	15.2	29.771	1.0058
33.5	28.7	28.7	30.035	30.032	30.573	30.574	15.6	29.735	1.0100
28.5	24.4	24.5	29.948	29.944	30.528	30.529	14.5	29.748	1.0066
54.5	48.6	47.9	30.390	30.387	30.546	30.547	14.3	29.775	1.0206
54.0	48.1	47.5	30.460	30.457	30.609	30.609	13.5	29.876	1.0195
55.5	49.5	48.8	30.435	30.432	30.577	30.578	13.6	29.842	1.0198
76.0	69.6	68.3	30.833	30.830	30.634	30.635	14.2	29.867	1.0322
77.5	71.0	69.6	30.827	30.824	30.497	30.498	14.0	29.743	1.0363
78.0	71.5	70.1	30.830	30.827	30.553	30.554	14.9	29.751	1.0362
104.5	97.7	95.4	31.586	31.584	30.699	30.700	15.0	29.887	1.0568
101.5	94.8	92.6	31.508	31.505	30.717	30.719	15.9	29.859	1.0551
101.0	94.4	92.3	31.506	31.504	30.713	30.715	15.6	29.871	1.0547
127.0	119.2	116.3	32.020	32.017	30.563	30.564	14.7	29.771	1.0754
128.0	120.2	117.2	32.135	32.132	30.622	30.623	14.9	29.818	1.0776
129.0	121.1	118.1	32.193	32.189	30.599	30.599	14.5	29.816	1.0796
151.0	142.4	138.7	33.097	33.093	30.492	30.492	13.8	29.747	1.1125
150.0	141.4	137.7	33.081	33.078	30.610	30.611	15.5	29.776	1.1109
146.5	138.0	134.4	32.981	32.978	30.632	30.633	15.5	29.797	1.1068
179.0	169.4	164.8	34.337	34.333	30.631	30.631	13.2	29.915	1.1477
181.5	171.8	167.2	34.250	34.247	30.485	30.485	13.9	29.737	1.1517
182.5	172.8	168.1	34.323	34.320	30.444	30.445	13.5	29.717	1.1549
203.0	191.8	186.5	35.489	35.485	30.646	30.647	15.5	29.871	1.1903
202.5	191.3	186.0	35.360	35.356	30.602	30.603	15.2	29.783	1.1871
212.5	200.4	194.8	35.980	35.976	30.772	30.773	15.2	29.949	1.2012
118.0	110.6	107.9	32.021	32.018	30.557	30.558	12.9	29.859	1.0723
128.5	120.7	117.7	32.258	32.254	30.513	30.513	12.9	29.815	1.0818
139.0	130.8	127.5	32.737	32.734	30.569	30.569	13.2	29.855	1.0964
152.5	143.8	140.1	33.200	33.196	30.595	30.595	13.2	29.880	1.1110

Druck, umgerechnet auf Atmosphären zu 76 cm Quecksilber von 0^0, vermehrt um den Druck der äußeren Atmosphäre, also den wirklichen Druck, der beim Erzeugen der Staubfiguren im Innern des Druckzylinders geherrscht hatte. In der vierten Spalte steht die bei diesem Druck und 0^0 erhaltene Wellenlänge im Untersuchungsrohr in mm, berechnet aus den doppelt ausgeführten Ablesungen der Knoten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, in der fünften die Wellenlänge korrigiert nach den eben ausgeführten Grundsätzen. In der sechsten und siebenten Spalte stehen die entsprechenden Wellenlängen im Kontrollrohr, in der achten die Temperatur des Kontrollrohrs in Grad Celsius korrigiert. Die neunte gibt die Reduktion dieser Wellenlängen auf 0^0 mit Zugrundelegung der Beziehung:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_t}{\sqrt{1 + 0.00367 \cdot t}},$$

wo λ_0 die Wellenlänge bei 0^0 und λ_t die entsprechende Wellenlänge bei t^0 bedeutet. Die Zahlen dieser Spalte geben gleichzeitig Auskunft über die Veränderlichkeit des Stahlstabtones. In der zehnten Spalte endlich findet sich das Verhältnis der Wellenlängen in Untersuchungs- und Kontrollrohr und damit das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in Luft von 0^0 und dem angegebenen Druck zu der in Luft von 0^0 und Atmosphärendruck.

Tabelle 6. $t = -79.3^0$.

Druck abgelesen kg/qcm	Druck korrigiert kg/qcm	Druck korrigiert in Atm. à 76 cm Hg im Druckzylinder	λ in mm im Untersuchungsrohr unkorrigiert	λ im Untersuchungsrohr korr. in mm	λ in mm im Kontrollrohr unkorr.	λ in mm im Kontrollrohr korrigiert	t im Kontrollrohr Grad Celsius	λ im Kontrollrohr auf 0^0 in mm	λ Untersuchungsrohr / λ Kontrollrohr
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.9	24.982	24.964	30.268	30.264	11.2	29.661	0.8416
28.0	24.0	24.1	24.634	24.617	30.182	30.178	9.9	29.644	0.8304
76.5	70.0	68.6	24.835	24.814	30.174	30.170	8.4	29.716	0.8350
131.5	123.5	120.4	27.910	27.886	30.148	30.144	8.0	29.710	0.9386
212.0	200.0	194.4	35.762	35.734	30.122	30.119	7.6	29.707	1.2029
212.5	200.5	194.9	35.852	35.822	30.304	30.300	10.6	29.727	1.2050
171.5	162.1	157.8	31.763	31.736	30.267	30.263	8.6	29.795	1.0652
115.0	107.8	105.2	26.715	26.693	30.368	30.364	8.2	29.917	0.8922
51.0	45.3	44.8	24.685	24.664	30.168	30.164	8.5	29.704	0.8303
0	0	0.9	25.021	25.000	30.110	30.106	8.4	29.653	0.8431

Tabelle 6 enthält die Ergebnisse der Einzelversuche, die bei der Temperatur des Alkohol-Kohlensäuregemisches ausgeführt wurden. Der Barometerstand an beiden Versuchstagen betrug rund 710 mm. Dem entspricht eine Temperatur des Kältebades von — 79.3°. Die Bedeutung der einzelnen Spalten ist dieselbe wie in Tabelle 5.

In dem beistehendem Diagramm, Tafel II, sind die Resultate beider Tabellen graphisch aufgetragen. Abszisse ist der Druck in Atmosphären à 76 cm Quecksilber von 0°, Ordinate das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in Untersuchungs- und Kontrollrohr.

Der mögliche Gesamtfehler für dieses Verhältnis ergibt sich als Summe der Einzelfehlermöglichkeiten: Reduziert man die Wellenlängenablesungen eines Einzelversuchs in Kontroll- und Untersuchungsrohr nach der Methode der kleinsten Quadrate und berechnet daraus den wahrscheinlichsten Fehler des Mittelwertes, so findet man Fehlergrenzen von der Größenordnung ± 0.5 ‰ für Kontroll- und Untersuchungsrohr, zusammen also ± 1 ‰. Dazu kommt für das Kontrollrohr eine Fehlermöglichkeit von ± 0.2 ‰, herrührend von der Temperaturmessung. Eine entsprechende Korrektion für das Untersuchungsrohr entfällt, weil dort die Temperatur mit großer Genauigkeit 0° bzw. — 79.3° betrug. Eine Irrtumsmöglichkeit in der Druckablesung, die bis ± ½ Atmosphäre betragen kann, würde, besonders bei höheren Drucken, wo die Schallgeschwindigkeit stark mit dem Druck variiert, das Resultat etwa um ± ½ ‰ fälschen können. Die Gesamtfehlermöglichkeit für das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten für den Einzelversuch beträgt also ± 1.7 ‰.

Abweichungen bis zu dieser Größe und darüber kommen bei Versuchen, die unter sonst gleichen Bedingungen gewonnen sind, in der Tat vor. Soweit man übersehen kann, ist der einzige Faktor, über den man nicht mit Sicherheit verfügen kann, die Tonhöhe des Stahlstabs und eventuell davon abhängende Bedingungen. Eine davon herrührende Fehlermöglichkeit ist Seite 399 diskutiert und als unwahrscheinlich ausgeschlossen worden, weil sie die Wellenlängen in Kontroll- und Untersuchungsrohr gleichzeitig und im selben Sinn beeinflussen müßte. Vielleicht hängen die Abweichungen zusammen mit Veränderungen der Resonanzbedingungen von Versuch zu Versuch in den beiden Wellenröhren, eine Fehlerquelle, die wegen der Inkonstanz des Stahlstabtones kaum zu vermeiden wäre.

Versuche zur Aufklärung sind in Aussicht genommen.

Zum Zweck der Kombination der in Tabelle 5 und 6 gegebenen Schallgeschwindigkeitsmessungen mit den im II. Teil veröffentlichten Isothermen,

sowie zur Vergleichung mit schon vorhandenen Messungen früherer Beobachter wurden für Druckstufen von 25 zu 25 Atmosphären graphische Mittelwerte genommen. Die Resultate der 0°-Reihe stehen in Tabelle 7.

Es enthält Kolonne 1 den Druck in Atmosphären, 2 das zugehörige Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten. In 3 stehen zum Vergleich die Mittelwerte Witkowskis für ein Verhältnis von Wellenlänge (27 mm) zur Röhrenweite (20 mm), das etwa dem von mir benutzten entspricht. Die Übereinstimmung ist befriedigend.

Tabelle 7. $t = 0^0$.

Druck in Atmosphären à 76 cm *Hg*	Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten	Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten nach Witkowski
1	2	3
1	1.000	1.000
25	1.007	1.009
50	1.021	1.021
75	1.039	1.038
100	1.061	1.062
125	1.091	
150	1.126	
175	1.166	
200	1.212	

Vielleicht etwas besser verbürgte Mittelwerte sind zu erwarten, wenn man, anstatt für Druckstufen von 25 zu 25 Atmosphären zu mitteln, die Einzelresultate in passende Gruppen zusammenfaßt und für den dem Gruppenmittelpunkt entsprechenden Druck den Mittelwert des Schallgeschwindigkeitsverhältnisses angibt. Man erhält so die Werte der Tabelle 7a. Die Gruppen, in die die Einzelversuche zusammengefaßt sind, wird man aus der graphischen Darstellung unschwer erkennen. In Kolonne 1 steht der dem Gruppenmittelpunkt entsprechende Druck, in 2 der zugehörige aus den Einzelversuchen berechnete Mittelwert des Schallgeschwindigkeitsverhältnisses und in 3 zum Vergleich die Werte, die die zur Tabelle 7 benutzte Kurve für den in 1 angeschriebenen Druck liefert.

Tabelle 7a. $t = 0^0$.

1	2	3
24.1	1.008	1.007
48.1	1.020	1.020
69.3	1.035	1.035
93.4	1.056	1.055
114.9	1.076	1.078
135.7	1.107_5	1.106
166.7	1.151_4	1.152
189.1	1.193	1.192

Die Abweichungen der Kolonnen 2 und 3 in Tabelle 7a voneinander liegen innerhalb der eben diskutierten Fehlermöglichkeit, so daß die übersichtlichere und in vieler Hinsicht zweckmäßigere Art der zur Tabelle 7 benutzten Mittelbildung zur Weiterrechnung benutzt wurde.

In Tabelle 8 finden sich die Mittelwerte der -79.3^0-Reihe. Es steht in Kolonne 1 der Druck in Stufen von 25 Atmosphären, in 2 das zugehörige Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten und in 3 die entsprechenden Werte Witkowskis. Zum Vergleich der Kolonnen 2 und 3 ist zu berücksichtigen die Verschiedenheit des mittleren Luftdruckes in Krakau und München. Der davon herrührende Temperaturunterschied des Alkohol-Kohlensäuregemisches beträgt rund 1^0. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes würden sich die Werte der Reihen 2 und 3 noch um etwa 2‰ nähern. Trotzdem bleibt hier die Übereinstimmung zwischen Witkowski und mir weniger gut als bei der 0^0-Reihe.

Tabelle 8. $t = -79.3^0$.

1	2	3
1	0.842	0.844
25	0.830	0.841
50	0.829	0.837
75	0.841	0.856
100	0.882	0.901
125	0.955	
150	1.040	
175	1.130	
200	1.224	

II. Teil.

Die Isothermen der Luft für 0° und — 79° und für Drucke bis 200 Atmosphären.

Zur Bestimmung der Isothermen sind zwei Methoden üblich. Die eine[1]) arbeitet mit einem konstanten Volumen und ermittelt wie viel Luft von Atmosphärendruck und Zimmertemperatur dieses Volumen bei Hochdruck und der Temperatur der gesuchten Isotherme enthielt. Die andere[2]) arbeitet mit konstanter Gasmenge und untersucht deren Volumen bei den gewünschten Bedingungen von Druck und Temperatur.

Die vorliegende Untersuchung ist nach der ersten Methode geführt, die gegenüber der zweiten den Hauptvorzug konstanter Empfindlichkeit über den ganzen Druckbereich besitzt: Es wurde ein bestimmtes, genau gemessenes Volumen mit komprimierter Luft von 0° bzw. — 79° gefüllt. Diese ließ man dann aus einem mit Glyzerin gefüllten Ballon so lange Glyzerin verdrängen, bis zum Schlusse des Versuchs im gesamten System wieder Atmosphärendruck herrschte.

Übersicht der Anordnung. (Figur 3.)

Die aus dem Maschinenraum im Keller kommende Druckleitung *D* (Beschreibung im I. Teil) führt zu einer Kupferspirale *K* und von dort zu einem Ducretetschen Hahn *V*, der hier nur als T-Stück dient. Dort teilt sie sich in einen Zweig nach dem Amagatmanometer *A* und in einen anderen zum Meßvolumen in Form eines Druck-

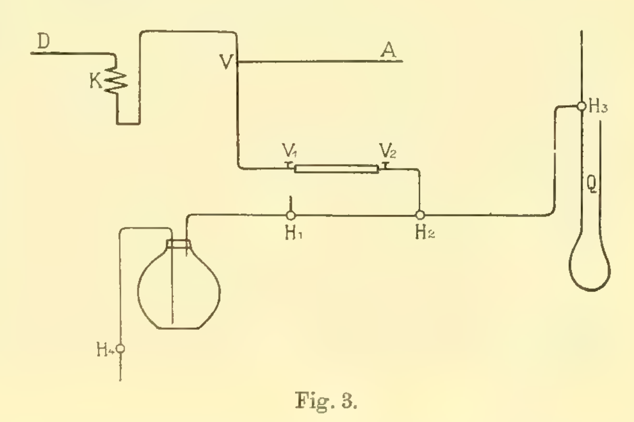


Fig. 3.

---

[1]) Natterer, Pogg. Ann. 62, S. 132, 1844. Derselbe, Pogg. Ann. 94, S. 436, 1855. Wroblewski, Wiener Berichte 97, S. 1321, 1888. Witkowski, Phil. Mag. 41, S. 288, 1896.

[2]) Regnault, Expériences I. Cailletet, Compt. rend. 70, S. 1131, 1870; Journ. de phys. 19, S. 386, 1880. Andrews, Ann. de chim. et de phys. 21, S. 208, 1870. Amagat, in zahlreichen Arbeiten von 1869 an, die an Ort und Stelle zitiert sind. Kammerlingh-Onnes, in den Communications of the laboratory of Leiden.

stahlrohrs, das zwischen den Ventilen V_1 und V_2 liegt. Die Leitungen bis V_2 sind Hochdruckleitungen, die von V_2 ab weiterführenden haben höchstens Überdrucke bis eine Atmosphäre auszuhalten und bestehen größtenteils aus Glas. Die Leitung verzweigt sich beim Dreiweghahn H_2. Nach der einen Seite geht sie über den Dreiweghahn H_1, der eine Verbindung mit der Atmosphäre gestattet, zu einem großen Glyzerinballon, aus dem ein Heber mit Hahn H_4 herausführt, nach der anderen gelangt man zu einem weiteren Dreiweghahn H_3, der einerseits mit der Atmosphäre, andererseits mit dem Quecksilbermanometer Q in Verbindung steht.

Einzelnheiten der Anordnung.

Das Amagatmanometer.

Das zur Druckmessung benutzte Amagatmanometer,[1]) von Gindre frères Lyon geliefert, ist von Wagner[2]) eingehend beschrieben mit Gebrauchsanweisung und ausführlichem Hinweis auf Vorsichtsmaßregeln. Es wurde das kleinere Übertragungsverhältnis von rund 60 benutzt. Die zur Messung von 200 Atmosphären verlangte Quecksilberhöhe betrug nicht ganz $2\,{}^1/_2$ Meter. Steigröhren und Bandmaß waren sorgfältig vertikalisiert und montiert wie bei Wagner. Die Ablesung erfolgte von einer Leiter aus.

Die ständige Benutzung des Manometers ist, falls es mit den einmal bestimmten Kolbenquerschnitten als Drucknormale dienen soll, vielleicht nicht ganz vorteilhaft für das Instrument, weil immerhin die Möglichkeit vorliegt, daß bei dem zum Einstellen unumgänglichen Kolbenrotieren sich die Kolben eine Spur abnutzen. Im vorliegenden Fall ließ sich die dauernde Benützung nicht umgehen, da die Genauigkeit, mit der die anderen in Betracht kommenden Größen sich feststellen ließen, eine Genauigkeit der Druckmessung erforderte, die nur mit dem Amagatmanometer zu erreichen war.

Die Druckleitung aus dem Keller, die Zuleitung zum Amagatmanometer und die Leitung zum Stahlrohr waren an den Ducretetschen Hahn verschraubt mit Hilfe von Flanschen und Überwurfmuttern und mit Blei abgedichtet.

---

[1]) E. H. Amagat, Ann. de chim. et de phys. 29, p. 70—77, 1893.

[2]) Drudes Ann. 15. S. 906. 1904.

Das Stahlrohrvolumen. (Figur 4.)

Einige Schwierigkeiten machte die endgültige Gestaltung des Meßvolumens. Es bestand schließlich aus einem Stück nahtlos kaltgezogenen Stahlrohr [1]) (Länge etwa 205 mm, äußerer Durchmesser 26 mm, Wandstärke 3 mm), an dessen Enden zwei Hochdruckventile Kammerlingh-Onnesscher Konstruktion [2]) aus Stahl angeschraubt waren. Dazu waren an den Enden des Stahlrohrs auf der Innenfläche Gewinde eingeschnitten und in diese Gewinde Stahlplatten heiß



Fig. 4.

mit Zinnlot eingeschraubt. In die Platten waren Stahlröhrchen gleichfalls mit Lot eingeschraubt, die an ihren Enden Flanschen mit Überwurfmuttern trugen, zum Verschrauben an die Hochdruckventile. Abdichtung mit Blei. Um das Volumen des Systems durch das bei einer Meßreihe etwa nötig werdende Anziehen der Verschraubungen nicht zu ändern, wurden sie vorher ein für allemal mit aller Sorgfalt festgezogen.

Die Ventile waren so angesetzt, daß das Volumen im Stahlrohr abgegrenzt wurde durch die auf den Ventilsitz niedergeschraubten Stahlventilkegel. Der Raum der Ventile, der an die Packungen grenzte, gehörte also nicht zum Meßvolumen; es wird dadurch die Möglichkeit einer Absorption von Luft in den Packungen vermieden, die bei den hohen Drucken unter Umständen stark stören könnte. Die Packungen bestanden Anfangs aus Leder, zum Schluß bei den — 79^0-Versuchen aus Feuerschwamm.

Das Stahlrohr war innen vergoldet, um Oxydation zu verhüten.

Die Verbindung der Ventile mit der Druckleitung bzw. mit der Weiterleitung zu H_2 erfolgte ebenfalls durch Überwurfmuttern und Flanschen. Dichtung durch Blei.

[1]) Geliefert von den deutsch-österreichischen Mannesmannröhrenwerken Düsseldorf in hervorragender Vollkommenheit.

[2]) Geliefert unter freundlicher Vermittlung des Herrn Prof. Kammerlingh-Onnes von Kipp und Zonen in Delft. Beschreibung in Commun. from the Labor. of Leiden, Nr. 46 und 54.

Zu unten ausgeführten Zwecken konnte die Druckzuleitung an V_1 entfernt und an ihre Stelle eine Verbindung zu einer Quecksilberluftpumpe mit Mc Leod-Manometer angesetzt werden.

Um dem ganzen Druckstahlrohrsystem den nötigen Halt zu geben, waren die beiden Ventile durch je vier Schrauben auf eine massive Stahlplatte aufmontiert.

Temperaturbäder.

Zur Festlegung der Isothermen (im Folgenden kurz als $p\,v$-Messungen bezeichnet), wurde das Stahlrohr samt Ventilen in ein Gemisch von Eis und destilliertem Wasser bzw. von fester Kohlensäure und absolutem Alkohol gesetzt.

Für den ersten Fall diente ein Zinkkasten $93 \times 16 \times 16$ cm, für den zweiten drei ineinandergesteckte Weißblechkästen, durch Flanell thermisch voneinander isoliert, von denen der innerste im Lichten $56 \times 16 \times 6\,{}^1/_2$ cm hielt. Um keine Wärmeleitung vom Boden her zu haben, wurde die Stahlplatte mit Stahlrohr und Ventilen auf zwei schmale Holzblöcke von etwa 5 cm Höhe gesetzt, so daß beim Umrühren des Bades auch eine Zirkulation unter der Stahlplatte stattfinden mußte.

Vor direkter Berührung mit der Umgebung waren die oberen Teile der Ventile durch übergezogene Schlauchstücke geschützt, besonders um den Alkohol des -79^0 Bades von den Packungen fernzuhalten.

Die Ventile funktionierten auch bei -79^0, nachdem die Lederpackungen durch Feuerschwamm ersetzt waren, hervorragend zuverlässig.

Die Möglichkeit, die Ventile ganz im Temperaturbad zu halten, macht jede, stets etwas mißliche Annahme bzw. Messung des Temperaturgefälles von im Bad befindlichen Teilen gegen solche außerhalb überflüssig und vereinfacht die Berechnung der Versuche in hohem Maße.

Die vom Ventil V_2 durch das Temperaturbad wegführende Leitung war eine Kupferkapillare. Außerhalb war sie mit Siegellack in das Glasrohr eingekittet, das zum Hahn H_2 führte.

Der Glyzerinballon faßte ca. 25 Liter. Er stand in einem großen Wasserbad von Zimmertemperatur.

Quecksilbermanometer.

Das empfindliche Organ der Anordnung ist das Quecksilbermanometer. Es dient gleichzeitig zur Messung des Stahlrohrvolumens und als Manometer bei den $p\,v$-Messungen.

Die Manometerröhren aus Glas haben etwa 1.1 cm Durchmesser i. L., sind ca. 75 cm lang und tragen je eine Millimeterteilung. Die linke Röhre mit dem Dreiweghahn ist gut vertikalisiert und fest aufmontiert auf ein Holzbrett von etwa 2 1/2 Meter Länge, das auf dem Fußboden aufsteht. Die rechte Röhre sitzt auf einem Holzbrettchen von ca. 30 cm Länge, das in einer Nut des großen Holzbrettes auf- und abgezogen werden kann. Die Verschiebung erfolgt vom Platz des Beobachters aus durch eine Schnur, die über je eine an der Decke und am Beobachtungstisch angebrachte Rolle läuft. Am unteren Ende sind beide Röhren verbunden durch einen übersponnenen, sehr massiven Gummidruckschlauch.

Die Röhren sind möglichst eng aneinandergerückt aus Ablesungszwecken. Die Ablesung der Niveaus erfolgt durch ein Kathetometer. Durch ein Klopfwerk, das vom Kathetometer aus betätigt werden kann, werden die Quecksilberniveaus beim Ablesen zwecks sicheren Einspielens erschüttert.

Bestimmung des Stahlrohrvolumens zwischen den Ventilen.

Eine direkte Auswägung des Stahlrohrvolumens mit Quecksilber war ausgeschlossen. es konnte nur eine volumenometrische Methode in Betracht kommen.

Dazu wurde folgendermaßen verfahren: Das Stahlrohr wurde evakuiert und dann aus dem festen Schenkel des Quecksilbermanometers, in dem Anfangs Atmosphärendruck herrschte, in das Vakuum Luft eingesogen. Nun wurde der bewegliche Schenkel soweit hochgezogen, bis im festen wieder Atmosphärendruck herrschte. Das vom Quecksilber im festen Manometerrohr zwischen Anfangs- und Endstellung eingenommene Volumen ist mit den nötigen Korrektionen gleich dem Volumen des Stahlrohrs.

Ein Vorteil der Methode ist der, daß nur das Volumen des festen Manometerrohrs mit Quecksilber ausgewogen zu werden braucht. Das Volumen der Verbindungsröhren zwischen Stahlrohr und Manometer braucht gar nicht, oder für einige geringfügige Korrektionen nur ganz oberflächlich bekannt zu sein. Man kann deswegen jederzeit das Stahlrohr zum Auswechseln der Temperaturbäder oder Nachsehen der Ventile wegnehmen, ohne irgendwelche Neuaichungen vornehmen zu müssen.

Evakuierung des Stahlrohrs.

An das Ventil V_1 wurde anstatt der Druckleitung ein Verbindungsrohr mit der Quecksilberluftpumpe angeschraubt (siehe oben). Ventil V_1 wurde geöffnet, V_2 geschlossen und das Stahlrohr evakuiert. Man kam dabei leicht

auf einige tausendstel Millimeter Quecksilberdruck, der sich auch bei abgestellter Pumpe nur wenig änderte. Inzwischen wurde der Hahn H_2 so gestellt, daß nur die Verbindung V_2 H_2 H_3 bestand. Durch H_3 blieb zunächst das Röhrensystem von V_2 ab nebst dem Manometer mit der Atmosphäre in Verbindung.

Orientierung des Kathetometers.

Um nach erfolgtem Nachsaugen von Luft ins Stahlrohr erkennen zu können, wann der Innendruck gleich dem äußeren war, wurde das Kathetometer gleich für die im Voraus bekannte Endstellung des Fernrohrs orientiert, da es sich gezeigt hatte, daß die Säule des Kathetometers etwas gekrümmt war.

Dazu wurde der rechte bewegliche Schenkel des Manometers hochgezogen, so daß der Rand des Quecksilbers in ihm am unteren, im linken festen Schenkel also am oberen Ende der Glasröhre einstand. Unter Erschüttern der Quecksilbersäulen durch das Klopfwerk wurde der Faden des Kathetometerfernrohrs so eingestellt, daß er mit den Rändern der beiden Quecksilberniveaus sich deckte, also horizontal stand. Die Kuppenhöhen waren nur in seltenen Fällen voneinander verschieden. Es mußte dann die Fadeneinstellung auf die Kuppen erfolgen. Der Unterschied in den Kuppenhöhen war nie so groß, daß eine Korrektion wegen Kapillardepression nötig war.

An dem so orientierten Faden des Fernrohrs, das bei den Messungen höchstens um etwa einen Zentimeter verschoben zu werden brauchte, wurden die Überdrucke bzw. Unterdrucke im Manometer an der Millimeterteilung der linken Manometerröhre abgeschätzt. Am Schluß jeder Volumbestimmung wurde der Fernrohrfaden unter denselben Bedingungen wie am Anfang kontrolliert.

Nach diesen Vorbereitungen wurde der bewegliche Manometerschenkel wieder tief gestellt, so daß das Quecksilber in der rechten Röhre oben, in der linken unten einstand.

Eigentliche Messung.

Nun wurde die Einstellung des Quecksilberrandes und die Kuppenhöhe im linken festen Schenkel mit einem kleinen Hilfsfernrohr an der aufgeätzten Millimeterteilung parallelaxenfrei abgelesen und der Druck im Stahlrohr am Mc Leod-Manometer der Pumpe festgestellt. Durch Drehen des Schliffes H_3 wurde das Manometer von der Atmosphäre abgeschlossen, so daß es nur noch mit dem System V_2 H_2 in Verbindung stand und hierauf das Ventil V_1 durch Niederschrauben geschlossen, das Ventil V_2 geöffnet. Schließlich wurde der bewegliche Manometerschenkel soweit hochgezogen, bis das Quecksilber in beiden Röhren wieder gleich hoch stand, im ganzen System von V_1 ab also

wieder Atmosphärendruck herrschte. Die genaue Einstellung wurde durch Interpolieren gefunden. Wie erwähnt, ist das Volumen im festen Manometerrohr zwischen Anfangs- und Endstellung des Quecksilbers gleich dem Stahlrohrvolumen zwischen den Ventilen V_1 und V_2.

Das Verfahren setzt voraus, daß das ganze System sich im thermischen Gleichgewicht befindet, insbesondere, daß Stahlrohr und festes Manometerrohr die gleiche Temperatur haben. Diese Bedingung war nicht immer erfüllt wegen des Temperaturgefälles von der Decke zum Boden, das bei kaltem Wetter, wenn im Zimmer geheizt wurde, Beträge bis zu einigen Grad pro Meter erreichte. Um das äußerst umständliche Einsetzen der ganzen Anordnung in ein Wasserbad zu umgehen, wurde das ganze Zimmer als Luftbad benutzt: die umgebenden Räume wurden auf annähernd gleicher Temperatur gehalten und die Luft im Zimmer durch einen kleinen Ventilator, der in etwa 4 m Entfernung von der Anordnung so orientiert war, daß er einen Luftstrom vom Fußboden schräg nach oben blies, energisch umgerührt. Wenige Minuten nachdem der Ventilator in Gang gesetzt war, zeigten sämtliche in freier Luft befindliche Thermometer innerhalb ihrer Ablesemöglichkeit von 0.1^0 die gleiche Temperatur an. Frühestens $1^1/_2$ Stunden nach dem Ingangsetzen des Ventilators wurden die Volummessungen begonnen.

Aichungen und Korrektionen für die Volumbestimmung.

Die Auswägung des festen Manometerrohrs.

Die Millimeterteilung auf dem festen Manometerrohr war im Institut hergestellt. Die Striche dienten in den meisten Fällen nur als Marken, lediglich beim Interpolieren kamen ganz kurze Strecken als Millimeterteilung zur Verwendung.

Die Teilung wurde verglichen mit einem Messingmaßstab, der an dem Normalmeter des Instituts verifiziert war. Für die vorgesehene Meßgenauigkeit von 0.1 mm war an der Röhrenteilung eine Korrektion nicht anzubringen.

Das zur Auswägung bestimmte Quecksilber wurde in dünnem Strahl durch verdünnte Salpetersäure geträufelt, dann im Vakuum destilliert und vor der Benutzung noch einmal auf rund 120^0 erhitzt und filtriert.

Der Gewichtssatz wurde mit einem Präzisionsgewichtssatz verglichen, der seinerzeit auf ein von der physikalisch-technischen Reichsanstalt beglaubigtes 100-Grammstück bezogen worden war.

Die Auswägung des Manometerrohrs erfolgte dreimal im Laufe der pv-Messungen, das erstemal in Intervallen von 5 zu 5 cm, das zweite und drittemal

mit ganz engem Einschluß der für die Volummessungen in Betracht kommenden Teilstriche am unteren und oberen Ende der Röhre.

Die Ablesung erfolgte am Rand der Quecksilbersäule. War bei einer Auswägungsreihe die Kuppenhöhe nicht konstant (es handelte sich bei einer Kuppenhöhe von ca. 1.3 mm höchstens um $\pm$ 0.1 mm), so wurden alle Randeinstellungen auf gleiche Kuppenhöhe umgerechnet, indem man die Kuppe, wie es auch der Augenschein lehrte, als Teil einer Kugelkalotte ansah.

Ein Druckeinfluß auf das Volumen des Manometerrohrs, hervorgerufen durch das Gewicht des zum Auswägen benutzten Quecksilbers, war nicht wahrnehmbar.

Eine Prismenwirkung der Röhrenwand, die auch bei senkrechtem Anvisieren eine scheinbare Verschiebung des Quecksilberrandes gegen die auf der Außenseite der Röhre angebrachte Teilung hervorrufen könnte, war nicht zu erkennen.

Auf diese Art erhielt man das Volumen des Manometerrohrs zwischen den eingestellten Teilstrichen bei der Auswägungstemperatur. Herrscht bei der Volumbestimmung des Stahlrohrs eine andere Temperatur, so ist das Volumen des Manometerrohrs mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten des Glases auf die letztere umzurechnen.

Korrektionen für die eigentliche Volumbestimmung.

Hatte vor und nach dem Einsaugen von Luft ins Stahlrohr das Quecksilber bei seiner Einstellung unten bzw. oben im festen Manometerrohr verschiedene Kuppenhöhen, so war die Einstellung des Randes wie oben auf gleiche Kuppenhöhe umzurechnen.

Das Interpolationsverfahren auf Gleichheit des Innendrucks im Gesamtvolumen mit dem Außendruck wurde nach dem Nachsaugen von Luft ins Stahlrohr etwa 1½ Stunden lang alle 20 Minuten wiederholt, um die bei der anfänglichen Druckerniedrigung etwa entstandenen Temperaturdifferenzen sich ausgleichen zu lassen und Temperatur- und Barometergang in Rechnung ziehen zu können (siehe unten). Das Interpolieren erfolgte mit Hilfe des beweglichen Manometerschenkels, den man einmal hochzog, bis ein kleiner Überdruck im festen Manometerrohr vorhanden war und dann herabließ, bis ein kleiner Unterdruck herrschte. Die so interpolierte Einzeleinstellung des Quecksilbers im festen Rohr, bei der der Innendruck gleich dem Außendruck war, stimmte bei Wiederholung mit Sicherheit auf 0.1 mm. Weil nur Über- bzw. Unterdrucke von wenigen Millimetern ins Spiel kamen, war die Temperatur des Quecksilbers

im Manometer gleichgültig. Ein dynamischer Einfluß auf das Einspielen der Quecksilberniveaus, herrührend von dem Luftzug des Ventilators, war nicht zu bemerken.

Der Temperaturgang im Beobachtungszimmer wurde verfolgt mit Hilfe von vier Thermometern, die etwa alle 30 Minuten abgelesen wurden. Sie gestatteten 0.1° mit Sicherheit abzulesen und waren unter den üblichen Vorsichtsmaßregeln mit einem von der physikalisch-technischen Reichsanstalt beglaubigten Thermometer verglichen, dessen Nullpunkt kontrolliert wurde. Ein Thermometer lag am Stahlrohr so, daß seine Kugel das Rohr direkt berührte, das zweite hing am Hahn H_2 in freier Luft und das dritte und vierte neben dem festen Manometerrohr. Der Temperaturgang betrug in den ungünstigsten Fällen bis 0.3° pro Stunde. Es wurde durch besondere Versuche festgestellt, daß selbst bei viel stärkerem Temperaturgang die Temperatur der Luft im Röhrensystem nicht merklich hinter der Außentemperatur nachhinkte. Durch Rechnung und Experiment wurde ermittelt, daß eine Temperaturänderung der Luft im Röhrensystem um 0.1° bei Gleichheit des Innen- und Außendrucks eine Verschiebung des Quecksilberniveaus im festen Schenkel um 0.3_1 mm verursachte. Damit wurden die beim Interpolieren gefundenen Einstellungen im festen Schenkel auf die Temperatur bei Beginn des Versuchs reduziert.

In derselben Weise wurde der Barometergang in Rechnung gezogen und die Einstellung im festen Schenkel auf den Barometerstand beim Abschließen von der Atmosphäre umgerechnet. 1 mm Außendruckänderung bewirkt bei 710 mm Barometerstand eine Verschiebung des Quecksilbers im festen Schenkel um 1.20 mm. Betreffend Prüfung des Barometers siehe unten bei den pv-Messungen. Hier kommen bloß Barometerstandsdifferenzen in Betracht.

Zu berücksichtigen war die Volumänderung unseres Systems, hervorgerufen durch das Öffnen des Ventils V_2 beim Verbinden des Vakuums im Stahlrohr mit der Luft im Manometer. Ein Öffnen des Ventils V_2 um eine halbe Umdrehung bewirkte eine Volumvergrößerung, die einer Verschiebung des Quecksilbers im festen Manometerrohr um 0.2_3 mm bei gleichem Innen- und Außendruck entsprach.

Eine Korrektion dafür, daß die Luft, die bei Beginn des Versuchs im festen Manometerrohr sich befunden hatte, zum Schluß in dem etwa 30 cm höher gelegenen Stahlrohr also unter niedererem Druck sich befand, wurde wegen der Geringfügigkeit: 0.03 mm nicht angebracht.

Zu achten ist auf gute Trocknung der Luft, die aus dem Manometer ins Stahlrohr nachgesogen werden soll. Andernfalls kann man, besonders bei raschem Öffnen des Ventils V_2, Volumwerte erhalten, die stark gefälscht sind

dadurch, daß wegen der Abkühlung sich Wasserdampf auf die Röhrenwand niederschlägt, der dann beim Steigen des Quecksilbers an der Wand eingeschlossen wird. Es ist deshalb gut auf alle Fälle das Ventil V_2 nur langsam zu öffnen und gleichzeitig den beweglichen Manometerschenkel hochzuziehen, so daß im festen stets ungefähr Atmosphärendruck herrscht.

Dies empfiehlt sich aus dem ferneren Grunde, weil im oberen Teil des Ventils V_2 zwischen dem Ende der Schraube und der Packung ein kleiner Hohlraum sich befindet, der bei Druckänderungen im Röhrensystem seinen Druck nur langsam dem Schraubengewinde entlang ausgleichen kann. Es wurde deswegen, wenn etwa die ganze Anordnung zur Prüfung auf Dichthaltung evakuiert worden war, mit dem Beginn der Volumbestimmungen einige Stunden gewartet, da an den Ventilen selbst, auf deren sicheres Funktionieren alles ankam, nichts geändert werden sollte.

Eine Aichung des Mc. Leod-Manometers, an dem der Anfangsdruck im Stahlrohr vor dem Einsaugen der Luft abgelesen wurde, war wegen der Kleinheit dieses Druckes, der für die Zwecke der Volumberechnung gleich Null gesetzt werden konnte, nicht nötig.

Zahlendaten zur Volumbestimmung.

Der Gang der Festlegung der Isothermen war so, daß zwischen je einer Reihe von pv-Messungen eine Reihe von Volumbestimmungen ausgeführt wurde. Für die definitiven Werte wurden nur die pv-Messungen von Nr. 16 an benutzt, weil erst von da an alle in Betracht kommenden Bedingungen in einwandfreier Weise festgestellt waren. Die vorherigen Messungen dienten zur Orientierung. Nach dem Versuch 27 brach das Verbindungsrohr zwischen dem Stahlrohr und dem einen Ventil, so daß die Verbindung erneuert werden mußte. Infolgedessen sind die Volumbestimmungen vor und nach dem pv-Versuch 27 nicht miteinander vergleichbar. Die pv-Messungen vor und nach dem Bruch wurden aneinander angeschlossen durch Wiederholung einer Anzahl von Messungen (bei 100 Atmosphären) mit dem neuen Stahlrohrvolumen.

Tabelle 9 gibt die Einzelresultate der Volumbestimmungen.

In Kolonne 1 steht das Datum, in 2 die Nummer der pv-Messungen, zwischen denen die Volumbestimmungen ausgeführt wurden, in 3 die Anfangsstellung des Quecksilbers im festen Manometerrohr vor dem Einsaugen der Luft ins Stahlrohr in cm, in 4 die Endstellung, bei der Innen- und Außendruck wieder gleich war, beide Einstellungen mit sämtlichen Korrektionen, in 5 die Differenz in Zentimetern der Röhrenteilung und in 6 die Temperatur, bei der die Volumbestimmung ausgeführt wurde.

Wie man sieht, stimmen die Einzelmessungen innerhalb der Meßmöglichkeit überein. Das Stahlrohrvolumen blieb also während der ganzen Meßreihe für unsere Zwecke merklich konstant. Es ist somit erlaubt zur Vereinfachung der Rechnung Mittelwerte zu nehmen und diese weiter zu verwerten.

Tabelle 9.

1	2	3	4	5	6
		cm	cm	cm	
19.—21. VI. 06	15—16	5.095	69.527	64.432	17.6
		4.680	69.127	64.447	17.5
		5.200	69.641	64.441	17.7
		4.140	68.573	64.433	17.8
		4.010	68.452	64.442	18.0
		4.015	68.437	64.422	18.1
9.—10. VII. 06	27—28	3.600	68.057	64.457	18.2
		3.600	68.061	64.461	18.4
		3.590	68.030	64.440	18.3
		3.790	68.237	64.447	18.9
		4.385	68.847	64.462	19.0
		4.715	69.155	64.440	19.1
20. VII. 06	$37—38_{I}$	4.305	68.739	64.434	19.1
		4.045	68.487	64.442	19.5
		4.110	68.570	64.460	19.9
		4.170	68.605	64.435	19.9
1. X. 06	$37—38_{II}$	3.420	67.846	64.426	12.1
		3.440	67.870	64.430	12.6
14. X. 06	58—59	3.420	67.866	64.446	13.8
		3.380	67.838	64.458	13.9
30. X. 06	Nach 67	3.575	68.005	64.430	13.1
		3.175	67.631	64.456	13.8

Tabelle 10 zeigt die Art der Weiterrechnung. Kolonne 1 enthält die Gruppe, für die das Mittel genommen ist, Kolonne 2 das Mittel der Anfangsstellungen, 3 das der Endstellungen, 4 das der Differenzen, 5 das der Temperaturen. Zur Weiterrechnung sind von hier ab auch noch die Gruppen zusammengezogen in der Art, wie die Klammern zeigen. Die Kolonnen 6 a und 6 b geben das Volumen in ccm zwischen den so ermittelten Teilstrichen

und zwar aus den beiden Auswägungen, die mit engem Einschluß dieser Striche gewonnen sind. In 7 steht das Mittel aus 6 a und 6 b, also das Volumen zwischen den Teilstrichen des festen Manometerrohrs bei der Auswägungstemperatur von 18^0. In 8 folgt das Volumen desselben Stückes bei der Temperatur der Volumbestimmung (also auch das Volumen des Stahlrohrs bei dieser Temperatur), berechnet mit dem Ausdehnungskoeffizienten des Glases: $\alpha = 6 \cdot 10^{-6}$. In 9 endlich steht das Volumen des Stahlrohrs bei 0^0, berechnet mit Hilfe des durch eine einfache Fühlhebelmethode gemessenen Ausdehnungskoeffizienten des Stahls zwischen 0 und 100^0: $\alpha = 11.0 \cdot 10^{-6}$.

Tabelle 10.

1	2	3	4	5	6 a	6 b	7	8	9
15—16	4.523	68.960	64.436	17.8	61.303	61.304	61.304	61.304	61.268
27—28	3.947	68.398	64.451	18.7	61.316	61.309	61.312	61.314	61.275
37—38$_{I}$	4.158	68.600	64.442	19.6					
37—38$_{II}$	3.430	67.858	64.428	12.4	61.311	61.296	61.304	61.298	61.272
58—59	3.400	67.852	64.452	13.9					
Nach 67	3.375	67.818	64.443	13.5					

So erhielt man schließlich:

Volumen des Stahlrohrs zwischen den Ventilen für 0^0 und eine Atmosphäre Innendruck:

für die pv-Versuche 16—27: 61.268 ccm

„ „ „ „ 28—67: 61.274 ccm.

Diese Werte dürften auf wenige Zehnte pro Mille verbürgt sein. Bei den pv-Versuchen 38—67 war das Stahlrohr auf rund — 79^0 abgekühlt. Der mit einer einfachen Fühlhebelmethode zwischen 0^0 und — 79^0 gemessene Ausdehnungskoeffizient des benutzten Stahls ergab sich zu $9.7 \cdot 10^{-6}$. Daraus berechnet sich das Volumen des Stahlrohrs bei — 79^0 und einer Atmosphäre Innendruck zu 61.132 ccm.

Der Druckeinfluß auf das Stahlrohr wurde rechnerisch ermittelt. Als durch den Druck deformiertes Volumen wurde nur das Stahlrohr selbst in Betracht gezogen. Der Einfluß auf die Hohlräume in den Stahlverbindungsröhren zwischen eigentlichem Stahlrohr und Ventil und in den Ventilen selbst wurde vernachlässigt, weil sie an sich nur etwa 2% des Gesamtvolumens ausmachten und diese Teile obendrein sehr dicke Wandungen hatten.

Das Stahlrohr wurde als Zylinder mit zwei ebenen Endflächen betrachtet und die Beziehung angewandt:

$$dv = \pi\, a^2\, l \left[\frac{p_0 a^2 - p_1 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{k} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \frac{p_0 - p_1}{n}\right].$$ [1])

Dabei ist:

dv die Änderung des Innenvolumens in ccm durch den Druck.

π = 3.14,

a = innerer Radius des Zylinders: 1.00 cm,

b = äußerer „ „ „ : 1.30 cm,

p_1 = Innendruck = 200 Atmosphären = $2.03 \cdot 10^8$ c. g. s.,

p_1 = Außendruck = 71 cm Hg = $9.47 \cdot 10^5$ c. g. s.,

l = lichte Länge des Zylinders zwischen den Endplatten = 19.0 cm,

k = Kompressibilität des Stahls = 17.10^{11} c. g. s.

n = Scherungsmodul des Stahls = $8.8 \cdot 10^{11}$ c. g. s.

Die beiden letzten Konstanten sind Mittelwerte. Wegen der Kleinheit des Druckeinflusses war eine besondere Messung überflüssig.

Daraus ergibt sich: $dv = 0.044$ ccm.

Da das Volumen des Stahlrohrs selbst rund 60 ccm betrug, so ist diese Korrektion für 200 Atmosphären etwa 0.7 ‰ des Gesamtvolumens.

Für andere Drucke wurde der Druckeinfluß graphisch interpoliert, indem man ihn als lineare Funktion des Druckes behandelte.

Die Korrektion für -79^0 wurde mit denselben elastischen Konstanten berechnet, da diese sich mit der Temperatur in für unsere Zwecke nicht in Betracht kommender Weise ändern.[2])

Gang der pv-Messungen bei 0^0.

Zu den pv-Messungen wurde vor jedem Versuch die ganze Röhrenanlage sorgfältig von Wasserdampf befreit. Dazu wurde die Druckzuleitung hinter dem Ducretetschen Hahn V abgeschraubt und unter Erhitzung der Kupferspirale K, in der von dem vorhergehenden Versuch noch Feuchtigkeit sitzen konnte, vom Kompressor her etwa 15 Minuten lang trockene Luft durchgeblasen. Inzwischen war mit Hilfe einer Wasserluftpumpe durch das System $V_1\, V_2\, H_2\, H_1$ mindestens zwei Stunden lang sorgfältig getrocknete Luft durch-

[1]) Poynting, Textbook of Physics, I, S. 117, 1903.

[2]) Cl. Schäfer, Drudes Ann. 5, S. 220, 1901 und nach im hiesigen Institut ausgeführten Messungen.

gesogen worden. Hierauf wurde das Drucksystem wieder zusammengeschraubt und die Kupferspirale mit einem Gemisch von Alkohol und fester Kohlensäure zur letzten Absorption von Wasserdampf während des Druckpumpens umgeben. Gleichzeitig wurde das Kühlgefäß des Stahlrohrs mit Eis und destilliertem Wasser gefüllt. Dann wurde das Ventil V_2 geschlossen, V_1 geöffnet und der gewünschte Druck hergestellt.

Um die Luft im Stahlrohr die Temperatur des Bades annehmen zu lassen, wurde etwa 45' gewartet. Inzwischen wurde, während die Röhren von V_2 ab durch H_1 bzw. H_3 mit der Atmosphäre in Verbindung standen, das Kathetometer orientiert, und der Faden des Fernrohrs unter den bei der Volumbestimmung beschriebenen Vorsichtsmaßregeln auf die Ränder des Quecksilbers im Manometer Q horizontal eingestellt.

Jetzt wurden Amagatmanometer und Barometer abgelesen, das Ventil V_1 geschlosssen und die Hähne H_1 und H_3 von der Atmosphäre abgeschlossen. Sofort darauf wurde das Ventil V_2 und gleichzeitig der Hahn H_4 am Glyzerinballon geöffnet. Die aus dem Stahlrohr kommende Luft drückte dann das Glyzerin aus dem Ballon in ein untergestelltes Glasgefäß.

Der Austritt der Luft aus dem Stahlrohr ließ sich durch das Ventil V_2 sehr gut regulieren. Es wurde stets nur soweit geöffnet, daß der am Quecksilbermanometer Q abzulesende Überdruck höchstens eine halbe Atmosphäre betrug.

Es wurde solange Glyzerin ausfließen lassen, bis im System von V_1 ab wieder Atmosphärendruck herrschte. Die dazu genau erforderliche Glyzerinmenge wurde interpoliert, indem man zuerst soviel auslaufen ließ, bis noch einige Millimeter Überdruck herrschten, dann etwa eine Stunde auf Temperaturkonstanz der Luft im Ballon wartete und schließlich noch etwas Glyzerin zapfte, so daß einige Millimeter Unterdruck herrschten.

Das Volumen des so gewonnenen Glyzerins gibt das Volumen der in den Ballon eingetretenen Luft bei Atmosphärendruck und der im Ballon herrschenden Temperatur. Diese Luft hatte sich vorher bei 0^0 und Hochdruck im Stahlrohr befunden. Damit sind alle Daten gegeben zur Festlegung eines Punktes der 0^0-Isotherme.

Zum Schluß wurde das Glyzerin wieder in den Ballon eingesogen und es konnten die Vorbereitungen für den nächsten Versuch beginnen.

Gang der pv-Messungen bei — 79°.

Bei den Messungen der — 79°-Reihe mußte man wegen der Kostspieligkeit des Kältebades, unbeschadet der Genauigkeit der Versuche, rascher arbeiten. Die Anordnung wurde nur vor dem ersten Versuch jedes Versuchstags in der beschriebenen Art getrocknet. Das Kältegemisch um die Kupferspirale K wurde ständig unterhalten. In dem Bad des Stahlrohrs lag ein Bolometer. Falls das Einbringen neuer fester Kohlensäure nötig war, erfolgte es stets vor oder während des Druckpumpens. Auf diese Art konnte man es leicht erreichen, daß während der 40 Minuten, die man nach dem Druckpumpen auf Temperaturkonstanz für die Luft im Stahlrohr wartete, die Temperatur im Kältebad mit Sicherheit um nicht mehr als 0.1° schwankte.

Im übrigen wurde verfahren wie bei der 0°-Reihe.

Aichungen und Korrektionen.

Die Druckmessung mit dem Amagatmanometer.

Zur Berechnung des Drucks im Stahlrohr aus der Steighöhe des Quecksilbers im Amagatmanometer und den Konstanten des Manometers wurde die Reduktionsformel benutzt:

$$p = n \cdot H_{15} \frac{s_{15} + (s_{15} - \sigma)\frac{q}{q_1}}{76 \cdot s_0}.$$ [1]

Es ist:

p der im Drucksystem herrschende Überdruck über die Atmosphäre, gerechnet in Atmosphären zu 76 cm Quecksilber von 0°.

n ist das Verhältnis der Kolbenquerschnitte, von Wagner (s. l. c.) ermittelt zu: 61 · 45 ± 0.03.

H_{15} ist die beobachtete und auf 15° umgerechnete Steighöhe des Quecksilbers, vom Nullpunkt des Manometers an gerechnet, in cm. Das zur Ablesung benutzte Bandmaß wurde mit einem am Normalmeter geaichten Messingmaßstab unter Berücksichtigung der Temperatur verglichen. Die Korrektionen gingen bis 0.4 mm. Die Temperatur der Quecksilbersäule wurde durch ein etwa auf halber Höhe der Säule angebrachtes Thermometer festgestellt. Ein vertikales Temperaturgefälle von hier in Betracht kommender Größe war nicht vorhanden, da sämtliche pv-Messungen in die Sommermonate fielen, während deren das Zimmer nicht geheizt wurde (siehe oben). Der Nullpunkt des

[1] Wagner, Drudes Ann. 15, S. 925, 1904. Ebendort auf S. 916, Figur.

Manometers wurde oft kontrolliert und innerhalb der Ablesemöglichkeit konstant gefunden. Er lag bei 0.61 cm des Bandmaßes.

s_{15} ist die Dichte des Quecksilbers bei $15^0 = 13.559$,

s_0 ist die Dichte des Quecksilbers bei $0^0 \quad = 13.596$,

σ ist die Dichte des Rizinusöls $= 0.96$,

q, der mittlere Querschnitt der Steigröhren, ergab sich durch Auswägen mit Quecksilber zu 0.252 qcm.

Daß die Steigröhren nicht konisch waren, wurde durch stückweises Auswägen festgestellt.

q_1, der Querschnitt des Manometerbassins, wurde zu 77.45 qcm gefunden (Wagner).

Die zu benutzende Reduktionsformel berechnet sich daraus zu:

$$p = H_{15} \cdot 0.8088.$$

Dieses p ist, wie bemerkt, der Überdruck im Drucksystem über den Außendruck. Um den gesamten Innendruck zu erhalten, ist dazu der Barometerstand auf 0^0 reduziert und auf Atmosphären umgerechnet zu addieren. Eine Schwerekorrektion und die von Regnault[1]) angegebene Korrektion wegen der Abnahme des Luftdrucks auf das freie Ende der Quecksilbersäule bei steigendem Quecksilber wurde nicht angebracht, weil sie sich entgegenwirken und nur die absoluten Werte beeinflussen.

Die Kompressibilität des Quecksilbers wurde gleichfalls vernachlässigt.

Beim Ablesen der Quecksilbersäule wurden die üblichen Vorsichtsmaßregeln beobachtet, bestehend in Kolbenrotieren und Klopfen des Meniskus. Parallaxenfreie Ablesung erfolgte mit Hilfe eines kleinen Spiegels an der Kuppe. Die Kuppenhöhen waren merklich konstant. Kapillardepression war deshalb nicht zu berücksichtigen.

Die bei den Druckmessungen ausgeführten Einzeleinstellungen, zwischen denen stets größere Schwankungen des Quecksilberniveaus in den Steigröhren mit der Ölregulierschraube (R in der Figur Wagners) vorgenommen wurden, ergaben mit Sicherheit Übereinstimmung innerhalb der Ablesegenauigkeit von 0.1 mm. Die daraus genommenen Mittel dürften also auf 0.1 mm sicher sein. Der gleiche Fehler ist beim Ablesen des Nullpunktes möglich. Dies entspricht im günstigsten Fall, bei einer Quecksilbersäule von rund $2^1/_2$ Metern, einer relativen Genauigkeit der Druckmessung von rund 0.1 ‰. Bei niederen Drucken ist die Genauigkeit entsprechend geringer. Dagegen ist zu betonen,

[1]) Regnault, Expériences I, (1847), Sixième Mém., S. 360.

daß die absolute Genauigkeit gegeben ist durch das Verhältnis der Kolbenquerschnitte, das von Wagner auf 1 ‰ verbürgt wird.

Das nach der Ablesung des Manometers betätigte Schließen des Ventils V_1 hatte keine feststellbare Druckerhöhung zur Folge.

Das Volumen des ausgeflossenen Glyzerins und das Volumen der aus dem Stahlrohr in den Glyzerinballon eingetretenen Luft.

Das aus dem großen Ballon durch die aus dem Stahlrohr kommende Luft verdrängte Glyzerin floß in große, ca. 7 Liter haltende zylindrische Glasgefäße und wurde auf einer Robervalschen Wage mit Tariermethode gewogen. Die benutzten Gewichte waren auf Normalgewicht bezogen.

Als Temperatur des Glyzerins wurde die an dem Thermometer des großen Wasserbades unter häufigem und anhaltendem Rühren abgelesene angenommen. Das Thermometer war in 0.2° geteilt und mit einem Normalthermometer verglichen (siehe oben). Bei den günstigen Verhältnissen, die zur Zeit der pv-Messungen herrschten, änderte sich die Temperatur des Bades nur in verschwindendem Maße mit der Zeit. Der höchste, nur ein- oder zweimal beobachtete Gang betrug 0.05° pro Stunde. Ein für die übrige Genauigkeit der Versuche in Betracht kommendes Nachhinken der Glyzerintemperatur hinter der des Wasserbades war also nicht zu befürchten.

Die Dichte des Glyzerins wurde Anfangs nach jeder pv-Messung, später weniger häufig, mit dem Pyknometer bestimmt. Sie nahm mit der Zeit etwas ab und zwar während der insgesamt ausgeführten 67 pv-Messungen um rund 1 ‰, wohl infolge der Aufnahme von Wasserdampf aus der Luft. Der Gang der Glyzerindichte, abhängig von der Zeit, wurde graphisch aufgetragen und daraus für jeden Versuch die Dichte entnommen. Die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur ergab sich aus dem mit dem Pyknometer gemessenen Ausdehnungskoeffizienten: $\alpha = 0.00045$.

Das so gemessene Volumen des Glyzerins ist mit den nötigen Korrektionen gleich dem Volumen der aus dem Druckstahlrohr ausgetretenen Luft bei dem herrschenden Barometerstand und der Temperatur des Wasserbades.

Folgende Korrektionen und Vorsichtsmaßregeln wurden berücksichtigt:

1. Die Frage nach der Zeit, innerhalb deren die aus dem Druckrohr ausgetretene kalte Luft die Temperatur des Wasserbades annahm, ließ sich experimentell beantworten, indem man die ganze Anordnung als Luftthermometer benutzte. Wenige Minuten nachdem das Auszapfen des Glyzerins beendet war, was bei 200 Atmosphären Druck etwa 30 Minuten dauerte, wurde

der am Quecksilbermanometer Q festzustellende Druck merklich konstant. Bis zu den definitiven Druckablesungen für die Zwecke der Glyzerininterpolation wartete man dann noch 30—40 Minuten.

2. Der Temperaturgang war im allgemeinen verschieden für die in freier Luft befindlichen Verbindungsröhren zwischen Druckstahlrohr und Quecksilbermanometer bzw. Glyzerinballon, und für den im Wasserbad befindlichen großen Ballon. Die Temperatur im Druckrohr selbst war konstant. Es befand sich ein Thermometer neben dem festen Rohr des Quecksilbermanometers, eines hing am Hahn H_2, ein weiteres in 0.2^0 geteiltes (siehe oben), steckte im Wasserbad.

Der Temperaturgang in freier Luft war an sich nicht groß und auch deshalb von verschwindendem Einfluß, weil die Verbindungsröhren selbst in ungünstigen Fällen bei Versuchen mit niedrigem Druck nur etwa 5% des Gesamtvolumens ausmachten. Der Temperaturgang im Wasserbad des Ballons war ganz unbedeutend, dagegen von relativ großem Einfluß, weil das Hauptvolumen in Betracht kam.

Die Überdrucke bzw. Unterdrucke, die am Quecksilbermanometer zur Interpolation der ausgeflossenen Glyzerinmenge abgelesen wurden, wurden auf die Temperatur, die beim Abschließen der Hähne H_3 und H_1 von der Atmosphäre geherrscht hatte, umgerechnet mit dem thermischen Druckkoeffizienten der Luft und unter Berücksichtigung der Anteile von Ballon und Verbindungsröhren am Gesamtvolumen, sowie ihrer besonderen Temperaturgänge. Diese Korrektionen hatten die Größenordnung von einigen Zehntelmillimetern. Deswegen entfiel auch hier die Notwendigkeit, das Volumen der Verbindungsröhren genauer zu kennen.

3. Ein Gang des äußeren Luftdrucks wurde in Rechnung gezogen, indem die Interpolationsüber- und Unterdrucke auf den Barometerstand reduziert wurden, der beim Abschließen der Hähne von der Atmosphäre geherrscht hatte.

4. Es war möglich, daß der große Ballon mit Glyzerinfüllung ein anderes Volumen hatte als ohne diese, wegen des Bodendrucks des Glyzerins. In der Tat war ein solcher Einfluß wahrzunehmen. Er wurde nicht berücksichtigt, weil im ungünstigsten Fall die Volumänderung $^1/_{100000}$ des Gesamtvolumens betrug. Noch weniger brauchte also in Rücksicht gezogen zu werden der Einfluß der Interpolationsüber- bzw. Unterdrucke auf das Volumen des Ballons.

5. Ein Fehler konnte auftreten dadurch, daß das Glyzerin Luft absorbierte und das Volumen der aus dem Stahlrohr austretenden Luft zu klein erscheinen ließ. Dagegen spricht die geringe Absorptionsfähigkeit des Glyzerins für

Gase,[1]) der kleine Überdruck, unter dem die Luft in den Ballon eintrat, und die Tatsache, daß das Glyzerin beim Auszapfen mit großer Oberfläche mit Luft in Berührung kam, so daß es reichlich Gelegenheit hatte, sich zu sättigen. Auch die pv-Versuche selbst geben keinen Anhalt für das Vorhandensein einer solchen Fehlerquelle.

6. Auf die Beseitigung der letzten Reste von Wasserdampf aus der in das Druckrohr eintretenden Luft wurde besonderer Wert gelegt. Die zu dem Zwecke auf — 79° abgekühlte Kupferspirale K hatte eine Gesamtlänge von ca. 4 Metern und einen Innendurchmesser von 2 mm. Die in das Stahlrohr hineinzupressende Luft durchströmte sie in einem Betrag von 10 ccm pro Sekunde. Dadurch ist, wie auch besondere Versuche mit Glasröhren ergaben, die Sicherheit gewährleistet, daß die Spannung des etwa aus der Spirale austretenden Wasserdampfes nicht größer ist, als der Temperatur von — 79° entspricht. Dieser Dampfdruck kommt für die Genauigkeit der vorliegenden Versuche nicht mehr in Betracht.[2])

7. Gegen das Vorhandensein von Kohlensäure wurde außer der Schicht Natronkalk im Trockenrohr der Druckluftanlage keine Vorsichtsmaßregeln getroffen, weil der Einfluß auf die Dichte der Luft für unsere Endgenauigkeit nicht merklich ist (siehe oben bei den Schallgeschwindigkeitsmessungen).

8. Der Glyzerindampfdruck konnte störend wirken, falls er sich während eines pv-Versuchs aus irgend einem Grunde änderte. Es wurde während der Wartezeit zwischen Auszapfen des Glyzerins und Ablesen des Quecksilbermanometers die besondere Aufmerksamkeit auf Druckänderungen gerichtet, die von diesem Einfluß herrühren konnten. Wie zu erwarten, wurde nie eine wahrnehmbare Wirkung beobachtet, denn der Glyzerindampfdruck ist schon an sich unbeträchtlich. Er beträgt für reines Glyzerin 0.24 mm für 118.5°.[3])

9. In eingehender Weise wurde die Möglichkeit in Betracht gezogen, daß durch Undichtwerden, besonders des Drucksystems, störende Luftverluste eintreten könnten. Besonderes Augenmerk war deswegen zu richten auf die Packungen der Ventile V_1 und V_2, auf die Verschraubungen dieser Ventile mit dem Stahlrohr und auf die Absperrkegel, die den Weg sperrten von den Ventilen in die Druckröhrenleitungen. Die anderen Verbindungen und Hähne von V_2 bis zum Glyzerinballon bzw. zum Quecksilbermanometer hatten nur

[1]) G. Just, Zeitschr. für phys. Chemie, 37, S. 342, 1901.

[2]) Scheel, Verh. d. d. phys. Ges. 5, S. 287, 1903 gibt unter Diskussion der vorhandenen Messungen den Dampfdruck des Wassers für — 50° zu rund 0.04 mm.

[3]) Richardson, Journal of the chemical Society, 49, S. 764.

Überdrucke bis eine halbe Atmosphäre auszuhalten und waren mit den gewöhnlichen Vorsichtsmaßregeln leicht dicht zu bekommen. Von dem Dichthalten der unter Hochdruck stehenden Stahlrohrverschraubungen und Packungen konnte man sich während der Versuche dauernd überzeugen, weil sie in einem Flüssigkeitsbad lagen. Das Dichthalten des Ventilkegels in V_2 wurde mit dem Quecksilbermanometer untersucht, während des Abwartens der Temperaturkonstanz im Stahlrohr, das des Kegels in V_1 dadurch, daß man die Druckleitung abschraubte und ein Glyzerinmanometer ansetzte. Es machte keine Schwierigkeiten, alle Verschraubungen und Ventilkegel mit Sicherheit dicht zu bekommen. Dagegen versagten die Lederverpackungen am Ventil V_1 bei den -79^0-Versuchen bei höheren Drucken, indem trotz schärfsten Anziehens der Packungsschrauben beim Schließen des Ventils nach der Ablesung des Amagatmanometers hörbar Luft auszischte, so daß es unsicher war, welcher Druck im Stahlrohr im Moment des Ventilschließens herrschte. In der Tat gingen die Versuche 46—50 inklusive auf diese Art verloren. Vollständige Abhilfe wurde erzielt, indem man die Lederpackungen im Ventil V_1 und gleichzeitig im Ventil V_2 durch Feuerschwamm ersetzte.

10. Es bliebe die Möglichkeit einer Absorption von Luft durch die Stahlrohrwände bei hohem Druck. Mangels jeglicher experimenteller Daten über diesen jedenfalls außerordentlich geringen, wenn überhaupt vorhandenen Einfluß, erübrigt sich das Anbringen einer Korrektion.

Berechnung der Endwerte.

Um aus dem so korrigierten Volumen der aus dem Stahlrohr ausgetretenen Luft ihre Maße zu erhalten, ist es mit ihrer Dichte zu multiplizieren. Als Temperatur der Luft ist dabei die des Wasserbades beim Abschließen der Hähne H_1 und H_3 von der Atmosphäre, als Druck der gleichzeitige Barometerstand zu nehmen (siehe oben). Die Dichte wurde aus den Tabellen von Landolt und Börnstein, 3. Auflage, entnommen. Da hier der absolute Barometerstand in Frage kommt, wurde das benutzte Heberbarometer von Fueß-Berlin auf die Güte des Vakuums nachgeprüft. Die davon herrührende Korrektion betrug einige hundertstel Millimeter und wurde weggelassen. Auch die Schwerekorrektion wurde weggelassen, einmal, weil sie für München blos $^5/_{100000}$ beträgt[1]) und dann, weil sie für unseren pv-Endwert, der auf Luft von 0^0 und 760 mm bezogen ist, herausfällt. Eine Korrektion für eine etwaige Niveau-

[1]) Landolt-Börnstein, 3. Auflage.

differenz zwischen Barometer und freiem Ende des Quecksilbermanometers kam nicht in Betracht.

Um das spezifische Volumen v der Luft im Stahlrohr bei Hochdruck und 0^0 bzw. -79^0 zu erhalten, ist zu dieser Luftmasse im Glyzerinballon noch die Luftmasse im Stahlrohr bei Atmosphärendruck und 0^0 bzw. -79^0 zu addieren und die Summe durch das Volumen des Stahlrohrs bei dem Versuch zu dividieren. Daraus ergibt sich schließlich durch Beziehen von v auf Luft von 0^0 und 760 mm und durch Multiplikation mit p, dem am Amagatmanometer abgelesenen Druck, der Endwert pv, bezogen auf Luft von 0^0 und 760 mm.

Zahlendaten.

Tabelle 11 enthält die Einzelresultate für die pv-Messungen bei 0^0.

In Reihe 1 steht die laufende Nummer des Versuchs, in 2 die Steighöhe des Quecksilbers im Amagatmanometer mit Bandmaßkorrektion und auf 15^0 reduziert in cm, in 3 der Druck im Stahlrohr in Atmosphären zu 76 cm Quecksilber von 0^0, in 4 die ausgeflossene Glyzerinmasse in gr, in 5 die Glyzerindichte, in 6 das Volumen des Glyzerins in ccm, alles mit sämtlichen Korrektionen. Es folgen in 7 und 8 Temperatur und Druck der Luft im Ballon, letzterer auf 0^0 reduziert. Daraus ergibt sich in 9 die Dichte der Luft, in 10 ihre Masse in gr im Ballon, in 11 die Masse in gr im Stahlrohr, in 12 die Summe von 10 und 11, also die Gesamtluftmasse, die bei Hochdruck und 0^0 im Stahlrohr enthalten gewesen war. In 13 steht das Volumen des Stahlrohrs in ccm für den Versuch mit allen Korrektionen, und in 14 der Wert von pv, bezogen auf Luft von 0^0 und 760 mm.

Tabelle 12 enthält die entsprechenden Resultate der -79^0-Reihe. Die Bedeutung der einzelnen Reihen von 1 bis 13 ist dieselbe. Im besonderen ist zu bemerken: Zu 11. Die Masse der Luft im Stahlrohr bei -79^0 und dem äußeren Barometerstand wurde berechnet, indem man als mittleren Ausdehnungskoeffizienten der Luft zwischen 0^0 und -79^0 den Wert: 0.00367 annahm.[1])

Zu 14. In 14 steht die Temperatur des Alkohol-Kohlensäuregemisches aus dem Barometerstand entnommen (siehe S. 391) und auf 0.1^0 abgerundet.

In Reihe 16 stehen alle pv-Messungen der -79^0-Reihe, auf -79.1^0 reduziert mit Hilfe der mittleren Ausdehnungskoeffizienten zwischen 0^0 und -79.1^0 (siehe unten Tabelle 15).

[1]) Holborn und Wien, Wiedem. Ann. 59, S. 213, 1896.

Tabelle 11. $t = 0^0$.

Lfd. Nr.	Steighöhe des Hg im Amagat in cm	Druck in Atm. à 76 cm Hg	Ausgeflossenes Glyzerin in gr	Glyzerin dichte	Volumen des Glyzerins in ccm	Luft im Ballon t	Luft im Ballon Druck in mm Hg	Dichte der Luft	Masse der Luft im Ballon gr	Masse der Luft im Stahlrohr gr	Summe	Volumen des Stahlrohrs in ccm	pv
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
17	31.577	26.185	2199.9	1.2218	1797.6	17.82	719.2	0.0011183	2.0642	0.0750	2.1392	61.273	0.9807
18	31.835	26.691	2221.4	1.2216	1818.0	18.05	716.8	11436	2.0790	0.0747	2.1537	61.273	0.9817
19	122.736	100.210	8735.5	1.2216	7139.6	18.10	716.1	11423	8.1554	0.0747	8.2301	61.290	0.9648
20	62.128	51.195	4315.5	1.2256	3518.7	16.28	718.9	11539	4.0950	0.0749	4.1699	61.279	0.9726
21	62.056	51.135	4333.5	1.2258	3538.1	15.82	718.1	11547	4.0858	0.0749	4.1607	61.279	0.9736
22	92.543	75.794	6477.2	1.2261	5287.4	15.09	718.8	11585	6.1254	0.0749	6.2004	61.284	0.9685
23	91.720	75.127	6430.6	1.2260	5249.1	15.20	718.2	11572	6.0744	0.0749	6.1493	61.284	0.9680
24	122.613	100.138	8612.8	1.2258	7032.2	15.64	718.8	11563	8.1315	0.0749	8.2065	61.290	0.9669
25	31.721	26.598	2208.6	1.2253	1804.0	16.48	716.2	11488	2.0726	0.0747	2.1472	61.273	0.9813
26	122.219	99.810	8713.3	1.2252	7117.1	16.61	711.3	11403	8.1158	0.0742	8.1900	61.289	0.9656
27	123.016	100.433	8726.2	1.2253	7127.8	16.38	713.5	11449	8.1605	0.0744	8.2348	61.290	0.9664
28	122.706	100.188	8685.8	1.2217	7098.3	17.14	718.2	11482	8.1502	0.0749	8.2251	61.296	0.9652
29	123.352	100.713	8710.1	1.2249	7116.8	16.96	719.5	11522	8.2000	0.0750	8.2750	61.296	0.9645
30	154.367	125.796	10844.1	1.2255	8856.8	15.90	718.1	11542	10.2225	0.0749	10.2974	61.301	0.9682
31	154.542	125.939	10811.3	1.2256	8828.5	15.50	719.4	11579	10.2225	0.0750	10.2975	61.301	0.9692
32	184.180	149.911	12766.1	1.2258	10423.3	15.12	720.1	11605	12.0962	0.0751	12.1713	61.307	0.9761
33	185.186	150.725	12830.3	1.2257	10476.5	15.18	720.3	11606	12.1590	0.0751	12.2341	61.307	0.9765
34	214.917	174.773	14710.8	1.2254	12014.8	15.62	721.9	11614	13.9540	0.0753	14.0293	61.312	0.9875
35	215.581	175.309	14763.8	1.2254	12058.5	15.56	721.3	11608	13.9975	0.0752	14.0727	61.312	0.9874
36	218.734	202.123	16798.4	1.2251	13723.6	16.08	721.0	11582	15.8947	0.0752	15.9699	61.318	1.0033
37	246.214	200.081	16744.6	1.2247	13684.4	16.78	719.1	11523	15.7685	0.0750	15.8435	61.318	1.0011

Tabelle 12. $t =$ 79.1°.

Lfd. Nr.	Steighöhe des Hg im Amagat in cm	Druck in Atm. à 76 cm Hg	Ausgeflossenes Glyzerin in gr	Glyzerindichte	Volumen des Glyzerins in ccm	Luft im Ballon t	Luft im Ballon Druck in mm Hg	Dichte der Luft	Masse der Luft im Ballon gr	Masse der Luft im Stahlrohr gr	Summe	Volumen des Stahlrohrs in ccm	t des Kältebades	pv	pv für −79.1°
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
38	29.967	25.185	3021.0	1.2276	2463.0	11.45	720.8	0.0011767	2.8982	0.1056	3.0038	61.138	−79.1	0.6627	0.6627
39	61.322	50.545	6630.0	1.2276	5405.4	11.46	720.4	11760	6.3567	0.1056	6.4623	61.143	−79.1	0.6183	0.6183
40	89.809	73.584	10264.0	1.2275	8368.6	11.55	719.7	11744	9.8281	0.1055	9.9336	61.148	−79.1	0.5856	0.5856
41	62.406	51.419	6762.5	1.2275	5513.9	11.63	718.9	11729	6.4673	0.1053	6.5726	61.143	−79.1	0.6184	0.6184
42	32.692	27.386	3319.4	1.2274	2706.7	11.71	718.5	11718	3.1717	0.1053	3.2770	61.138	−79.1	0.6605	0.6605
43	92.068	75.411	10593.0	1.2271	8639.9	12.33	719.8	11714	10 1208	0.1055	10.2263	61.149	−79.1	0.5830	0.5830
44	123.731	101.019	14886.5	1.2271	12142.1	12.40	719.8	11711	14.2196	0.1055	14.3251	61.154	−79.1	0.5575	0.5575
45	153.953	125.463	18804.5	1.2269	15339.2	12.52	719.4	11700	17.9469	0.1054	18.0523	61.160	−79.1	0.5495	0.5495
51	123.939	101.189	14970.3	1.2263	12217.8	13.53	720.7	11679	14.2692	0.1056	14.3748	61.154	−79.1	0.5565	0.5565
53	154.232	125.689	18908.9	1.2263	15431.9	13.53	720.1	11669	18.0075	0.1055	18.1130	61.160	−79.1	0.5487	0.5487
54	187.228	152.376	22665.2	1.2264	18497.4	13.46	720.3	11676	21.5976	0.1055	21.7031	61.166	−79.1	0.5552	0.5552
55	216.253	175.850	25408.2	1.2264	20735.6	13.41	719.7	11669	24.1964	0.1055	24.3019	61.171	−79.1	0.5722	0.5722
56	217.731	177.044	25568.9	1.2264	20866.8	13.39	718.4	11648	24.3058	0.1053	24.4111	61.171	−79.1	0.5736	0.5736
57	246.570	200.368	27905.1	1.2264	22773.7	13.42	718.0	11640	26.5086	0.1052	26.6138	61.176	−79.1	0.5954	0.5951
58	246.693	200.468	27785 2	1.2263	22677.0	13.49	718.1	11639	26.3938	0.1052	26.4990	61.176	−79.1	0.5983	0.5983
59	248.333	201.788	28159.8	1.2264	22979.8	13.21	713.9	11583	26.6175	0.1047	26.7222	61.177	−79.2	0.5972	0.5975
60	216.835	176.315	25617.1	1.2264	20905.1	13.21	714.8	11598	24.2457	0.1048	24.3505	61.171	−79.2	0.5726	0.5729
61	189.034	153.830	22981.4	1.2264	18754.4	13.22	715.2	11603	21.7607	0.1049	21.8656	61.166	−79.2	0.5563	0.5566
62	155.523	126.727	19157.3	1.2264	15634.0	13.26	715.4	11605	18.1433	0.1049	18.2482	61.160	−79.2	0.5491	0.5494
63	121.956	99.584	14706.9	1.2265	12001.1	13.08	719.5	11679	14.0161	0.1054	14.1215	61.154	−79.1	0.5575	0.5575
64	122 929	100.371	14829.0	1.2265	12100.8	13.03	719.8	11685	14.1398	0.1055	14.2453	61.154	−79.1	0.5571	0.5571
65	91.411	74.879	10572.2	1.2265	8627.1	13.00	719.5	11682	10.0782	0.1054	10.1836	61.148	−79.1	0.5813	0.5813
66	61.949	51.050	6758.4	1.2265	5515.0	12.99	718.7	11669	6.4354	0.1053	6.5408	61.143	−79.1	0.6170	0.6170
67	30.888	25.928	3146.8	1.2265	2567.9	13.00	718.2	11660	2.9941	0.1052	3.0994	61.138	−79.1	0.6612	0.6612

Wie man sieht liegen die Abweichungen der Einzelwerte voneinander im allgemeinen unter 1 ‰ und gehen in seltenen Fällen bis zu 2 und 3 ‰. Die graphisch gewonnenen Mittelwerte dürften demnach relativ zueinander auf 1 ‰ richtig sein. Die absolute Genauigkeit wird wegen der Unsicherheit der Druckmessung und der anderen Fehlermöglichkeiten auf etwa $1\frac{1}{2}$ ‰ zu schätzen sein.

Tabelle 13 enthält die pv-Mittelwerte für 0^0. In Kolonne 1 stehen die Drucke in Atmosphären, in 2 die zugehörigen pv-Werte der vorliegenden Untersuchung, bezeichnet als pv_K.

Tabelle 13. $t = 0^0$.

p Atm.	pv_K	pv_{AI}	pv_W
1	2	3	4
1	1.0000	1.0000	1.0000
25	0.9821		0.9869
50	0.9732		0.9754
75	0.9682		0.9694
100	0.9656	0.9730	0.9681
125	0.9685		0.9722
150	0.9762		
175	0.9875		
200	1.0016	1.0100	

Ohne Umrechnung vergleichbar mit diesen Werten sind die Amagats[1]) und Witkowskis,[2]) die ebenfalls bei 0^0 gewonnen wurden. Sie stehen in Kolonne 3 und 4 als pv_{AI} und pv_W. Amagat maß seine Drucke mit dem Amagatmanometer. Witkowski basierte seine Druckmessung mit Hilfe eines Luftmanometers auf frühere Resultate Amagats,[3]) die in der Kirche von Fourvières durch direkte Aichung von Luftmanometern mit Quecksilbersäulen ohne Kolbenübertragung erhalten sind. Diese letzteren pv-Werte Amagats sind bei 16^0 erhalten und lassen sich durch Vermittlung von Ausdehnungskoeffizienten, die Witkowski (s. l. c.) zwischen 16^0 und 0^0 bei den entsprechenden Drucken gemessen hat, auf 0^0 reduzieren. Tabelle 13a enthält die auf diese Reduktion bezüglichen Zahlen. In Kolonne 1 steht der von Amagat benutzte Druck in Metern Quecksilber, in 2 die zugehörigen pv-Werte

[1]) Ann. de chim. et de phys. 6 s. 29, S. 68, 1893.
[2]) Phil. Mag. 41, S. 288, 1896.
[3]) C. R. 1884, II, S. 1154.

Amagats bei 16°, 3 gibt den Druck der Kolonne 1, umgerechnet in Atmosphären à 76 cm *Hg* von 0°; in 4 steht der pv-Wert der Kolonne 2, umgerechnet auf 0° mit Hilfe der von Witkowski gegebenen Ausdehnungskoeffizienten, in 5 endlich zum Vergleich die pv_K-Werte für denselben Druck.

Tabelle 13 a.

Amagat				pv_K 0°
Druck Meter *Hg*	pv 16°	Druck in Atm.	$pv_{A\,II}$ 0°	
1	2	3	4	5
0.76	1.0000	1.00	1.0000	1.0000
20.00	0.9901	26.32	0.9823	0.9816
25.00	0.9876	32.90	0.9784	0.9788
30.00	0.9855	39.47	0.9748	0.9761
35.00	0.9832	46.05	0.9718	0.9741
40.00	0.9824	52.63	0.9699	0.9723
45.00	0.9815	59.21	0.9678	0.9705
50.00	0.9808	65.79	0.9661	0.9691
55.00	0.9804	72.37	0.9646	0.9682
60.00	0.9803	79.08	0.9638	0.9671
65.00	0.9807	85.53	0.9632	0.9662

Wie man sieht, stimmen in Tabelle 13 die pv_W und pv_K-Werte gut überein. Dagegen weichen die $pv_{A\,I}$-Werte von den vorgenannten bis zu 8 ‰ ab.

In Tabelle 13 a wiederum stimmen die auf 0° reduzierten $pv_{A\,II}$-Werte bedeutend besser mit den entsprechenden pv_K-Werten, wenn auch noch eine kleine systematische Abweichung vorhanden zu sein scheint.

Nun basieren die pv_K-Werte wie die $pv_{A\,I}$-Werte auf Druckmessung mit Hilfe des Amagatmanometers. Beide Meßreihen können deshalb prinzipiell mit einer Unsicherheit behaftet sein, herrührend von der Bestimmung des Kolbenquerschnittsverhältnisses. Amagat hat keine näheren Einzelheiten veröffentlicht über die Art, in der er dieses Verhältnis feststellte. Infolgedessen ist eine Diskussion von dieser Seite aus nicht möglich. Jedenfalls zeigen die meisten der Tabellen Amagats (s. l. c.), in denen die Druckangaben verschiedener Manometersysteme zusammengestellt sind, systematische Abweichungen dieser Angaben voneinander, die groß genug sind, um die Unterschiede der $pv_{A\,I}$-Werte und der pv_K-Werte zu erklären.

Die Druckmessung Amagats in der Kirche zu Fourvières ist von den eben besprochenen Fehlermöglichkeiten frei und verdient somit erhöhtes Zutrauen. Die Übereinstimmung der so gewonnenen $pv_{A\,II}$-Werte mit den pv_K-Werten weist daraufhin, daß das von K benutzte Kolbenquerschnittsverhältnis richtig ist. Als weitere Stütze dieser Folgerung kommt dazu die gute Übereinstimmung zwischen den pv-Werten von K und W, welch letztere sich ja auf die $pv_{A\,II}$-Werte stützen.

Soviel mir bekannt hat Amagat keine Messungen veröffentlicht, die seine mit direkter Quecksilbersäule bestimmten Isothermen, die bis 85 Atmosphären gehen, mit seinen mit dem Amagatmanometer ermittelten verbinden, die bei 100 Atmosphären beginnen. Andernfalls hätte ein etwaiger Sprung in diesen mit zwei verschiedenen Druckmeßmethoden erhaltenen Isothermen zutage treten können.

Tabelle 14 enthält die pv-Mittelwerte der — 79°-Reihe. In Kolonne 1 steht der Druck in Atmosphären, in 2 der zugehörige pv-Mittelwert, bezeichnet als pv_K und zwar für — 79.1°, in 3 der Wert von pv_K für — 79.3°, berechnet zum Zweck der Kombination mit den Schallgeschwindigkeitsmessungen (siehe oben), die bei — 79.3° ausgeführt wurden, in 4 die pv-Werte Witkowskis für — 78.5° und in 5 endlich die letzteren zum Vergleich umgerechnet auf — 79.1°. Die Übereinstimmung zwischen Kolonne 2 und 5 ist befriedigend.

Tabelle 14. $t = -79°$.

p	pv_K — 79.1°	pv_K — 79.3°	pv_W — 78.5°	pv_W — 79.1°
1	2	3	4	5
1	0.7097	0.7092	0.7119	0.7103
25	0.6628	0.6623	0.6689	0.6670
50	0.6199	0.6194	0.6252	0.6234
75	0.5820	0.5814	0.5863	0.5845
100	0.5572	0.5566	0.5600	0.5582
125	0.5495	0.5489	0.5520	0.5501
150	0.5540	0.5534		
175	0.5715	0.5709		
200	0.5960	0.5954		

Der pv_K-Wert für 1 Atmosphäre ist berechnet mit Hilfe des Ausdehnungskoeffizienten für Luft: $\alpha = 0.00367$.

Die zu den Umrechnungen der Tabelle 14 benutzten mittleren Ausdehnungskoeffizienten der atmosphärischen Luft zwischen 0^0 und -79.1^0 finden sich in Tabelle 15. Sie folgen unmittelbar aus der Kombination der $p v_K$-Werte in den Tabellen 13 und 14. Zum Vergleich stehen in der letzten Kolonne die entsprechenden Werte Witkowskis (s. l. c.).

Tabelle 15.

Druck in Atmosphären	Ausdehnungskoeffizient K	Ausdehnungskoeffizient W
1	2	3
25	0.00411	0.00411
50	459	457
75	504	503
100	535	537
125	547	551
150	547	
175	533	
200	512	

Die Resultate der Tabellen 13 und 14 sind auf Tafel III graphisch dargestellt. Die kleinen Abweichungen zwischen dieser Darstellung und den Zahlenwerten der Tabellen sind wegen des aus Reproduktionsgründen gewählten, etwas zu kleinen Maßstabes, unvermeidlich.

III. Teil.

Berechnung des Verhältnisses der spezifischen Wärmen.

Aus Gleichung (1) folgt, wenn man die nachfolgende Entwickelung auf die Masseneinheit bezieht:

$$k = -\frac{c^2}{v^2} \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)}. \tag{2}$$

Die im II. Teil festgelegten Isothermen setzt man in der Form an:

$$p \cdot v = f(p) \tag{3}$$

und erhält daraus:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right) = \frac{p}{\frac{d f(p)}{d p} - \frac{f(p)}{p}}. \tag{4}$$

Aus (4), (2) und (3) ergibt sich:

$$k = c^2 \cdot \frac{f(p) - p \frac{d f(p)}{d p}}{f^2_{(p)}}. \tag{5}$$

Für Luft von 0^0 und Atmosphärendruck ist:

$$f(p) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d f(p)}{d p} = 0,$$

das letztere wegen der für unsere Zwecke genügend genauen Annäherung an den idealen Gaszustand.

Also:

$$k_0 = c_0^2. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt:

$$k = k_0 \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 \frac{f(p) - p \frac{d f(p)}{d p}}{f^2_{(p)}}. \tag{7}$$

In Tabelle 16 sind noch einmal sämtliche Daten zusammengestellt, die nötig sind, zur Berechnung von $\frac{c_p}{c_v} = k$ bei 0^0.

In Reihe 1 steht der Druck in Atmosphären à 76 cm Quecksilber von 0°, in 2 das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten aus Tabelle 7, in 3 der Wert von $f(p)$ aus Tabelle 13, in 4 der graphisch ermittelte Wert von $\frac{df(p)}{dp}$, in 5 der Wert von k und in 6 zum Vergleich der k-Wert Witkowskis für die gleichen Bedingungen. Als Wert von k_0 wurde angenommen:

$$k_0 = 1.4053.$$[1]

Tabelle 16. $t = 0°$.

p	c/c_0	$f(p)$	$\frac{df(p)}{dp} \cdot 10^{-5}$	k	$k_{\text{Witk.}}$
1	2	3	4	5	6
25	1.007	0.9821	— 51.3	1.470	1.47
50	1.021	0.9732	— 27.4	1.527	1.53
75	1.039	0.9682	— 15.9	1.586	1.58
100	1.061	0.9656	+ 1.6	1.636	1.64
125	1.091	0.9685	+ 22.3	1.677	
150	1.126	0.9762	+ 37.3	1.721	
175	1.166	0.9875	+ 50.3	1.762	
200	1.212	1.0016	+ 62.7	1.803	

Die Fehlergrenze für die Werte der Reihe 5 ergibt sich als Summe der Teilresultatfehler. Zu den in Teil I und II diskutierten Fehlermöglichkeiten kommt der Fehlereinfluß, herrührend von der Bestimmung von $\frac{df(p)}{dp}$. Dieser Einfluß ist zufolge (7) an sich gering. Die graphisch wiederholt und aus Kurven verschiedenen Maßstabs entnommenen Werte von $\frac{df(p)}{dp}$ stimmten untereinander meist vorzüglich überein. Abweichungen von Prozenten waren selten. Dadurch kann der Wert von k in ungünstigen Fällen um Beträge von der Größenordnung von 1‰ beeinflußt werden. Alles zusammen wird man die Endwerte der 0°-Reihe für auf ½ % verbürgt halten dürfen.

In Tabelle 17 stehen die Daten zur Berechnung von k für — 79.3°. Die Bedeutung der einzelnen Kolonnen ist dieselbe wie in Tabelle 16. In Anbetracht der erhöhten Schwierigkeiten wird man die Genauigkeit der k-Endwerte hier nur auf etwa 1 % schätzen.

[1]) Röntgen, Pogg. Ann. 148, S. 580, 1873.

Die Resultate der Tabellen 16 und 17 sind auf Tafel IV dargestellt.

Mit den Werten Witkowskis stimmen die k-Werte der Tabelle 16 befriedigend, die der Tabelle 17 weniger gut.

Tabelle 17. $t = -79.3^{0}$.

p	c/c_0	$f(p)$	$\frac{df(p)}{dp} \cdot 10^{-5}$	k	$k_{\text{Witk.}}$
1	2	3	4	5	6
1	0.842	0.7092	0	1.405	. . .
25	0.830	0.6623	− 188	1.566	1.58
50	0.829	0.6194	− 162	1.763	1.79
75	0.841	0.5814	− 128	1.992	2.06
100	0.882	0.5566	− 63.1	2.187	2.30
125	0.955	0.5489	− 8.1	2.378	
150	1.040	0.5534	+ 41.8	2.435	
175	1.130	0.5709	+ 80.3	2.370	
200	1.224	0.5954	+ 106	2.277	

Auch mit dem, was von dem Verhalten der spezifischen Wärmen anderer reeller Gase bisher bekannt ist,[1]) stimmen die Resultate der vorliegenden Untersuchung qualitativ gut überein.

Schließlich sei kurz hingewiesen auf die Lage des Maximums von $c_p\, c_v$.

Die van der Waalssche Zustandsgleichung:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) - R \cdot T = 0,$$

zusammen mit der für alle homogenen Körper geltenden Beziehung:

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right) = -\vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}\right)$$

ergibt für das Maximum von c_p die Bedingung:

$$v = 3\, b = v_K,$$

wo v_K das kritische Volumen bedeutet. Da dieselben Grundgleichungen verlangen $c_v =$ const., so folgt für das Maximum von $\frac{c_p}{c_v}$ gleichfalls: $v = v_K$.

[1]) Literatur bei Knoblauch und Jakob: Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 35 und 36. Valentiner, Drudes Ann. 15, S. 74, 1905.

Für Luft liegen sehr gut übereinstimmende Werte von Olszewski und v. Wroblewski vor für die kritische Temperatur T_K und den kritischen Druck p_K. Das Mittel aus den Werten beider Beobachter [1]) ist:

$$T_K = 132.5^0 \text{ abs.} \qquad p_K = 39.3 \text{ Atm.}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung folgenden Beziehungen:

$$p_K = \frac{a}{27\,b^2}; \qquad R \cdot T_K = \frac{8\,a}{27\,b};$$

wenn man $R = 0.00366$ nimmt, der Wert:

$$v_K = 3\,b = 0.00463.$$

Für — 79° müßte also zufolge der im zweiten Hauptabschnitt gegebenen Isothermen c_p seinen Maximalwert bei rund 120 Atmosphären erreichen, für 0° bei Drucken höher als 200 Atmosphären.

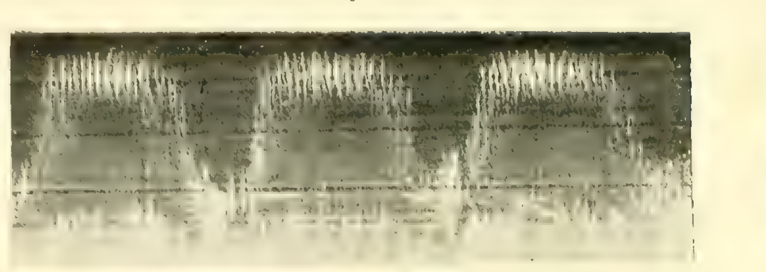
Die qualitativ gute Übereinstimmung dieser aus der van der Waalsschen Zustandsgleichung gezogenen Schlußfolgerung mit den Resultaten der vorliegenden, auf ganz anderen Grundlagen basierenden Experimentaluntersuchung ist immerhin bemerkenswert.

Eine eingehendere Verwertung des gewonnenen Beobachtungsmaterials zur Prüfung thermodynamischer Beziehungen ist in Aussicht genommen.

---

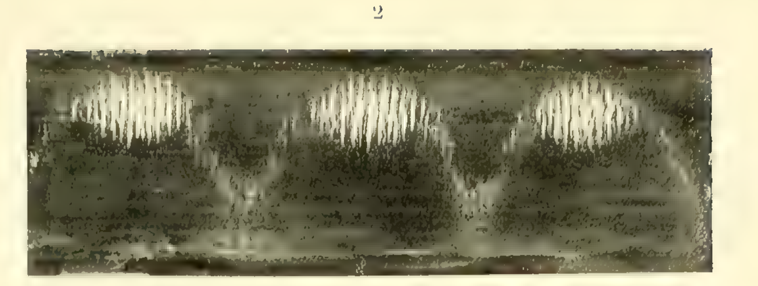
[1]) Landolt-Börnstein, Tabellen, 3. Aufl., S. 186.

1



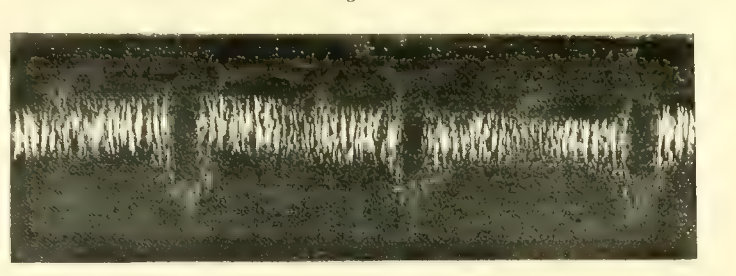
Wellen im Kontrollrohr $p = 1$ Atm. $t =$ ca. 15°

2



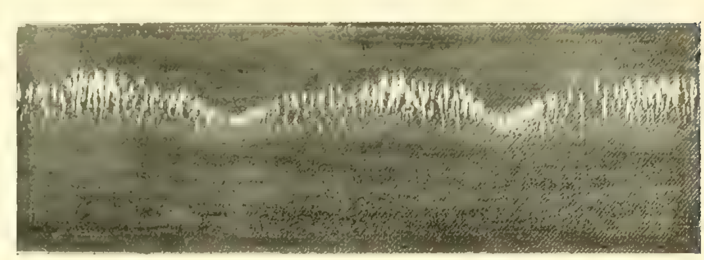
Wellen im Untersuchungsrohr $p = 11{,}5$ Atm. $t = 0°$

3



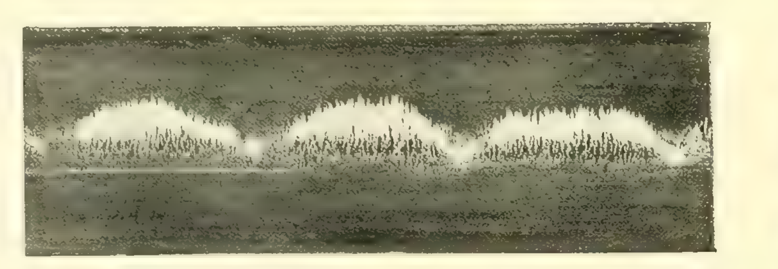
Wellen im Untersuchungsrohr $p = 29$ Atm. $t = 0°$

4



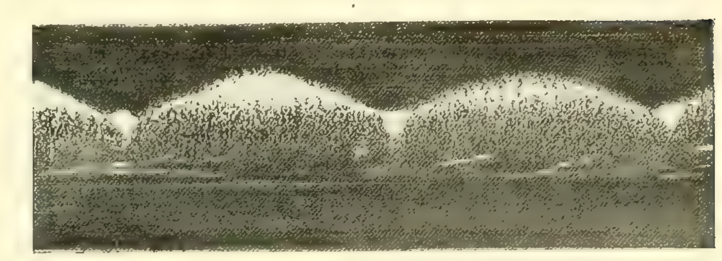
Wellen im Untersuchungsrohr $p = 195$ Atm. $t = 0°$

5



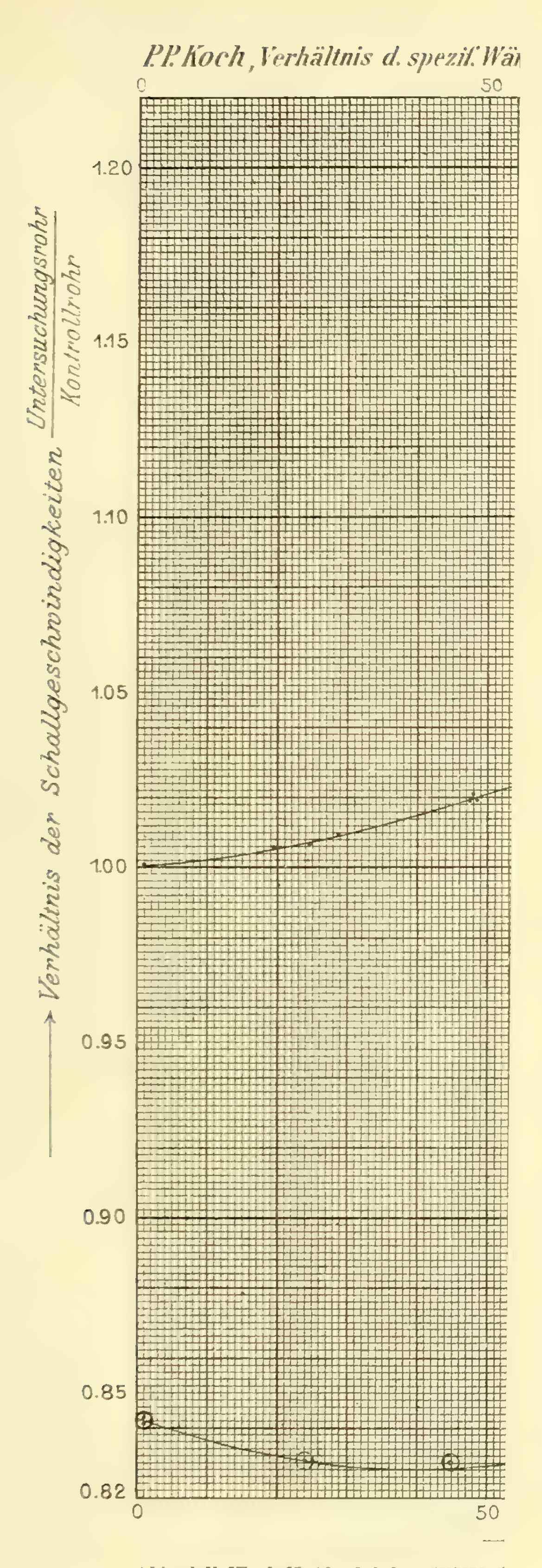
Wellen im Untersuchungsrohr $p = 115{,}5$ Atm. $t = -79°$

6



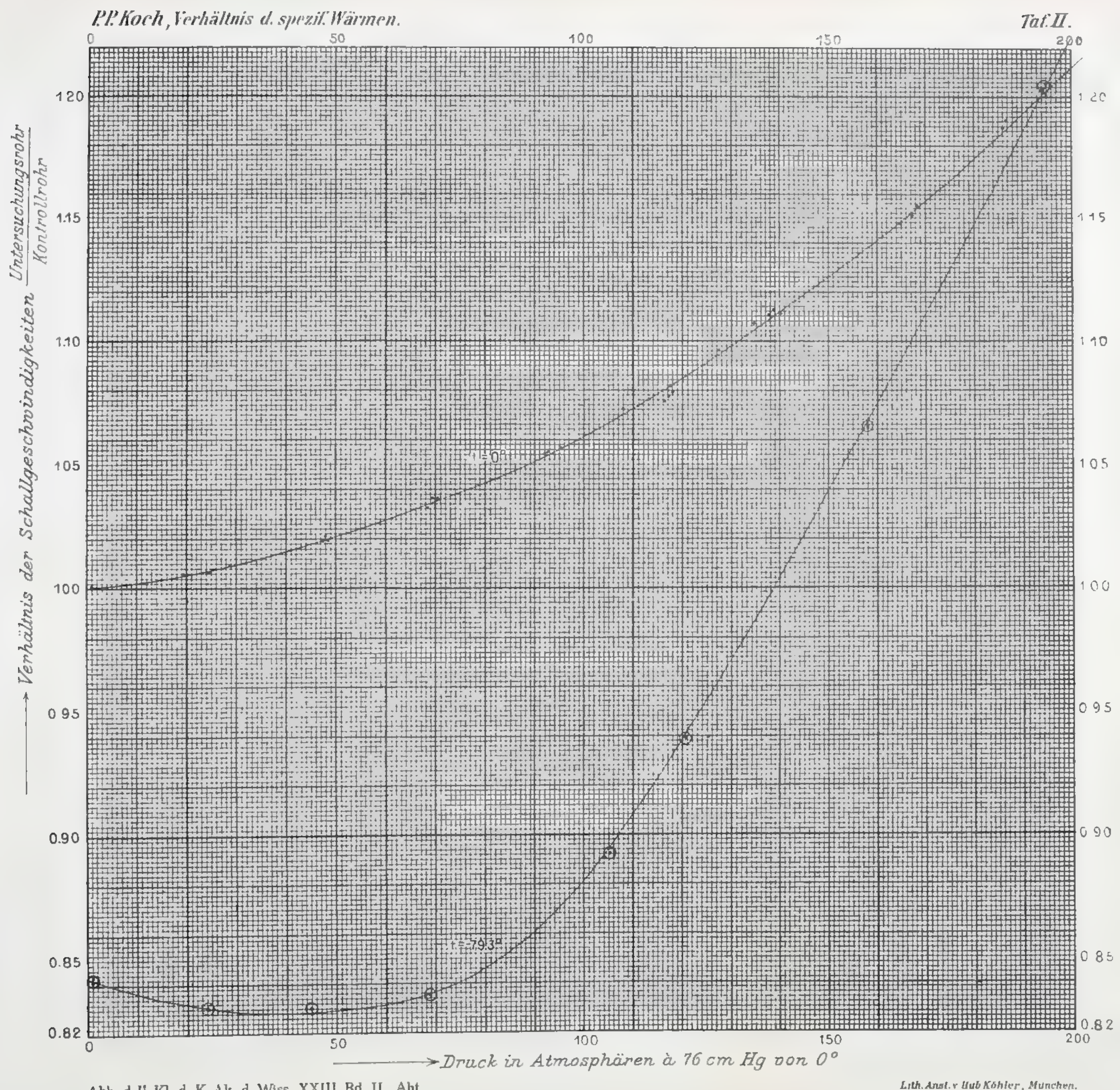
Wellen im Untersuchungsrohr $p = 195$ Atm. $t = -79°$





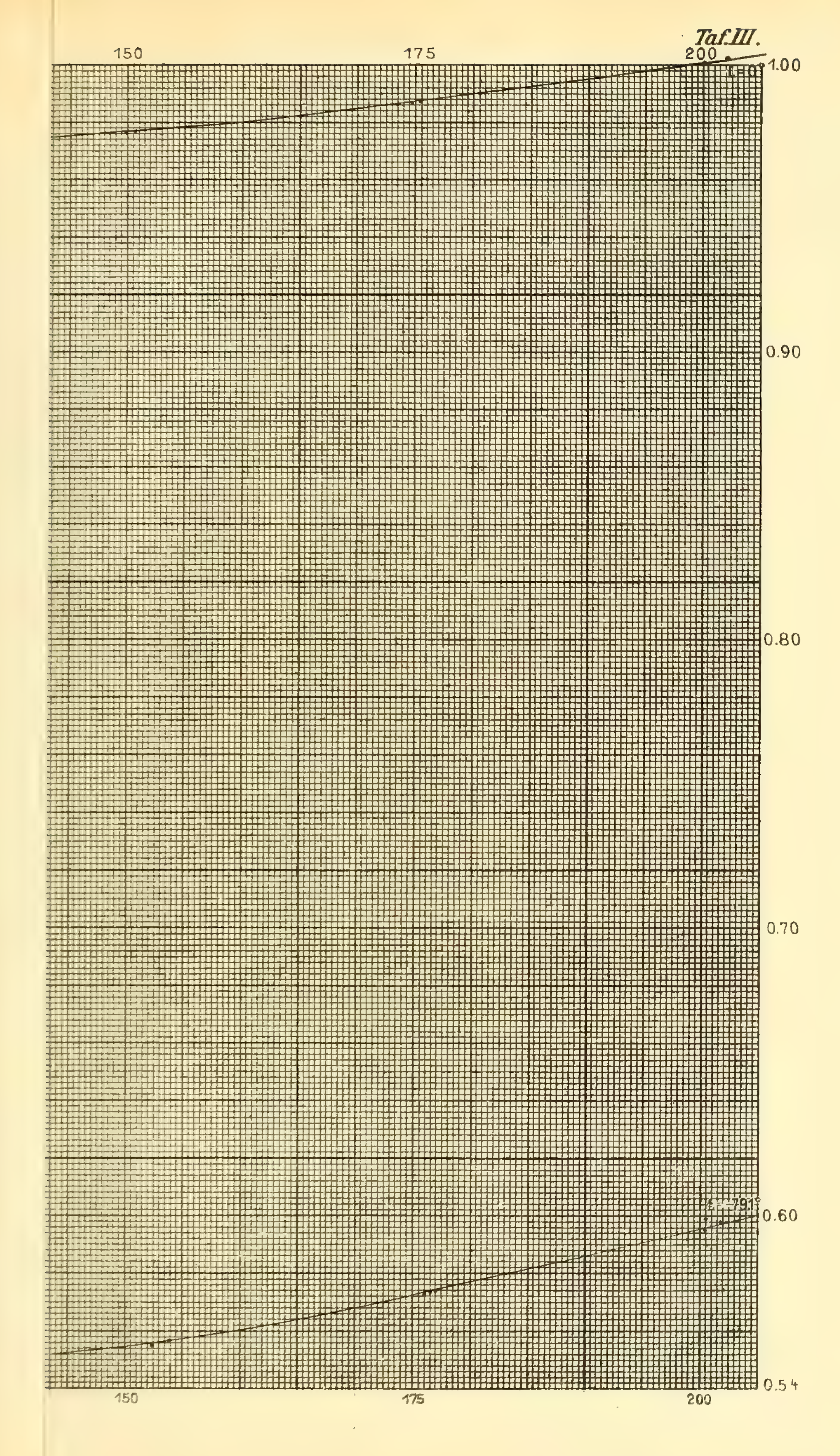
0
50
1.20
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
0.90
0.85
0.82
0
50
Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten Untersuchungsrohr / Kontrollrohr





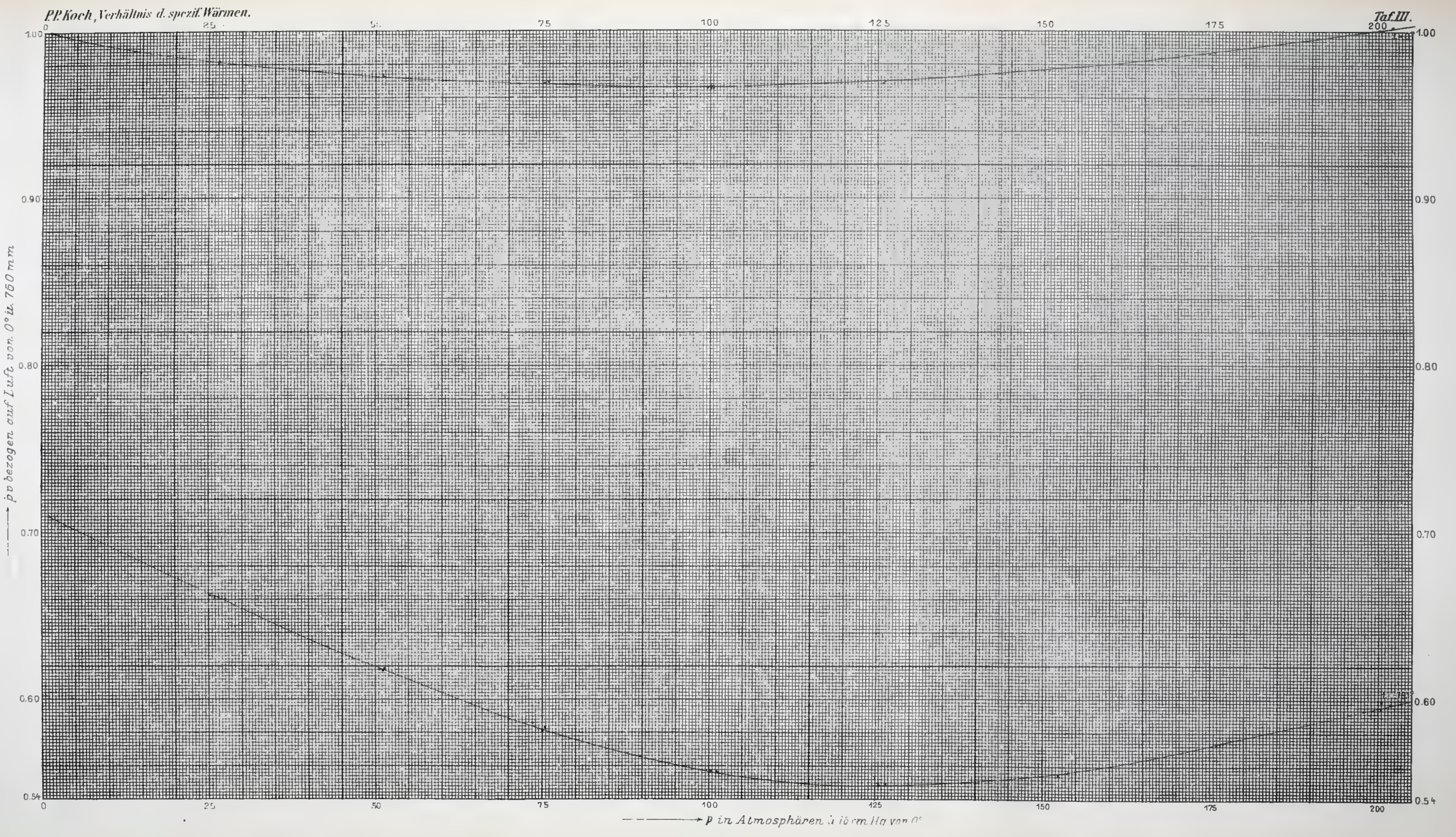
Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München.





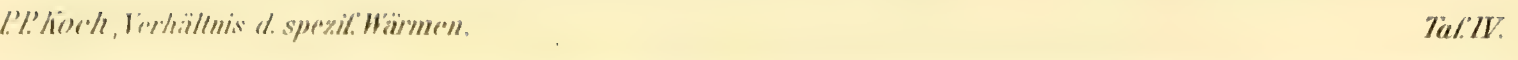
Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München.





Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München.





Lith. Anst. v. Hub. Köhler, München.



Photographien und Zeichnungen

des

Kometen 1907 d, Daniel.

Von

Max Wolf.

Mit 3 Tafeln.

Der Komet, den Z. Daniel in Princeton am 9. Juni 1907 entdeckte, entwickelte sich im August 1907 zu einem auffallenden Objekte und sein Schweif, der nahezu senkrecht zu unserer Gesichtslinie lagerte, erreichte eine Länge von 12 Bogengraden. Da das Wetter ziemlich günstig war, konnte der Komet in unserem Institut in der Zeit vom 21. Juli bis zum 27. August an 10 Tagen mit 41 Platten photographiert werden; 19 dieser Platten wurden vom Unterzeichneten am 28zölligen Waltz-Reflektor aufgenommen. Der Kern des Kometen war so hell, daß mit den feinen Fäden des Pointers auf ihn gehalten werden konnte, so daß die Bilder befriedigende Schärfe erhielten.

Der Reflektor besitzt bei einer freien Spiegelfläche von 72 cm eine Brennweite von 282 cm; das Leitfernrohr hat 16 cm Öffnung und 240 cm Brennweite.

Der Komet bot durch das Finderokular des Reflektors (Vergrößerung 41fach) einen prächtigen Anblick und reizte unwillkürlich zur Anstellung von Vergleichen, zwischen dem, was gesehen und dem, was photographiert werden konnte.

Schon früher war dem Unterzeichneten die Unvereinbarkeit des optischen und des photographischen Bildes bei Kometen aufgefallen; allein es fehlte ein genügend mächtiges optisches Hilfsmittel, um befriedigende Vergleiche anzustellen. Der Reflektor ermöglichte nun Vergleiche, und deshalb möchte der Unterzeichnete nicht versäumen, die gefundene Verschiedenheit an einigen seiner Bilder zur Anschauung zu bringen.

Die Originale der hier abgebildeten sieben*) photographischen Aufnahmen sind zu den folgenden Zeiten im Fokus des Reflektors aufgenommen worden:

1.	1907 August	2	von	14^h 39.6^m	bis	14^h 49.6^m	M. Z. Königstuhl
2.	„	4	„	14 27.6	„	14 42.6	„
3.	„	7	„	14 44.6	„	14 59.6	„
4.	„	8	„	14 29.7	„	14 54.7	„
5.	„	9	„	14 53.7	„	15 5.7	„
6.	„	11	„	14 57.7	„	15 11.7	„
7.	„	14	„	15 2.2	„	15 14.2	„

*) Vgl. Monthly Notices R. A. S.; LXVIII, pag. 180.

Die Bilder geben natürlich nur die nächste Umgebung des Kopfes wieder. Auf den Reproduktionen ist $1^0 = 86$ mm, also 1 Bogenminute etwa $1^1/_2$ mm. Auf den im folgenden besprochenen Zeichnungen ist der Maßstab 3—4 mal so groß.

Das Gemeinsame aller Aufnahmen ist die ungemein große Anzahl von Einzelästen, aus denen sich der Schweif aufbaut. Auf den Originalen lassen sich meist 30 und mehr Einzeläste zählen.

Die Äste, welche der Schweifachse näher liegen, sind im allgemeinen länger und heller als die mehr außen gelagerten. Knickungen kommen vielfach vor; meist liegen sie im Innern des Büschels.

Eine Gabelung ist auf mehreren Aufnahmen fast in derselben Lage bezüglich der Achse wiederzufinden, trotzdem kurz aufeinanderfolgende Aufnahmen derselben Nacht — die hier nicht reproduziert sind — zeigen, daß sich das Bild in wenigen Minuten ganz verändert. So liegt die auffallende Gabelung auf der Aufnahme 6 wohl in demselben Positionswinkel als auf der Aufnahme 5, aber dem Kern viel näher als auf der früheren Aufnahme. Man muß sich also sehr hüten, solche prägnante Stellen von verschiedenen Tagen rechnerisch zu verknüpfen, um die Bewegung der Schweifmaterie zu finden.

Interessant ist die Tatsache, daß auf allen Aufnahmen des Kometen die kürzesten Schweife — die auch den größten Winkelabstand von der Achse besitzen — am stärksten gekrümmt erscheinen. Ganz besonders lehrreich ist in dieser Beziehung das Bild 3, worauf sich kontinuierlich verfolgen läßt, daß je kürzer der Schweifast, um so größer und rascher eine Biegung eintritt.

Das reiche Detail der Aufnahmen bleibt späterer messender Untersuchung vorbehalten; auch zeigt die Betrachtung der Bilder die Einzelheiten objektiver als eine Beschreibung.

Die Zeichnungen des Kometen sind als fast gleichzeitig mit den photographischen Aufnahmen ausgeführt anzusehen. Allerdings sind sie nur das Resultat weniger Minuten, die die kurze, zwischen den Aufnahmen verfügbare Zeit übrig ließ. Immerhin wird der Anblick im wesentlichen getroffen sein.

Es sind folgende Bemerkungen zu den Zeichnungen nachzutragen:

Fig. 8. August 4: Auf der der Sonne abgewandten Seite des Kernes ist keine merkliche Helligkeit vorhanden, vielmehr kontrastiert die ganze Gegend hinter dem Kern wie ein tiefer Schatten gegen die 2 Schweifarme. Die Ränder dieses Schattens erscheinen vollkommen scharf, wie mit der Schere ausgeschnitten. Der Kern ragt in den Schattenraum herein, so daß beiderseits von ihm noch halbrunde Ausschnitte sichtbar sind. Erst in größerem Abstand von dem Kern (auf der der Sonne abgewandten Seite) füllt sich der Hohlraum mit merklicher Helligkeit. Die absolute Leere des Schattenraumes ist wohl nur eine Kontrastwirkung, aber der Unterschied ist jedenfalls enorm. Die Achse des der Sonne zugekehrten Ausströmungskegels ist etwa 20^0 nach Süden aus der Schweifachse herausgedreht. — Mit bloßem Auge ist der Schweif noch in der Rektaszension $4^h\ 25^m$ erkennbar.

Fig. 9. August 7: Der Ausströmungskegel hat die Schweifachse gegen Norden hin überschritten und ist jetzt ungefähr 20^0 nach Norden von dieser weggerichtet. In dem Ausströmungskegel haben sich mehrere Zonen stärkerer Verdichtung entwickelt. In der Verlängerung des Ausströmungskegels, auf die Sonne zu, ist eine Lücke deutlich erkennbar. — Der Schattenraum auf beiden Seiten neben dem Kern und hinter dem Kern (der Sonne abgekehrt) ist wieder sehr deutlich. — Der Schweif kann mit bloßem Auge bis 11 Orionis verfolgt werden.

Fig. 10. August 8: Der Ausströmungskegel hat sich mehr nach Norden gerichtet. Die Neigung gegen die Schweifachse beträgt wohl 30^0. Der Kegel ist schön symmetrisch gebaut. Es ist nur eine schwache Andeutung der Ausbuchtung an dem der Sonne zugekehrten Komarand zu erkennen. — Der Schattenraum ist beiderseits vom Kern geradlinig begrenzt, wie mit dem Lineal abgeschnitten. Diese Begrenzungslinie steht nicht senkrecht auf der Schweifachse, sondern ist etwas verdreht, wenige Grade und in dem Sinne, daß diese Linie der Achse des Ausströmungskegels nachgefolgt ist. — Mit bloßem Auge kann der Schweif bis zur Rektaszension $4^h\ 55^m$ verfolgt werden.

Fig. 11. August 9: Der Kegel hat sich noch mehr gegen Norden gedreht; die Neigung seiner Achse beträgt jetzt etwas mehr als 60^0 gegen die Schweifachse. — Die geradlinige Begrenzungslinie des Schattenraumes hat genau die gleiche Lage gegen die Schweifachse beibehalten, die sie am 8. August hatte; sie ist also dem Kegel nicht weiter nachgefolgt. Dagegen liegt die Linie etwas

weiter in der Richtung von der Sonne weg. — Der Schweif reicht mit bloßem Auge gesehen bis zur Rektaszension 4^h 50^m.

Fig. 12. August 11: 14^h 30^m. Der Ausströmungskegel ist zurückgependelt. Er steht noch etwa 15^0 von der Schweifachse gegen Norden gerichtet. Um 15^h 20^m ist eine zweite Ausströmung etwas südlich von der Achse zu erkennen. Es ist nicht mit Sicherheit zu sagen, daß diese Ausströmung um 14^h 30^m noch nicht da war, obwohl sehr wahrscheinlich. — Die Begrenzung des Schattens ist rund, eher etwas spitz.

Fig. 13. August 14: Der Ausströmungskegel ist sehr schwierig zu zeichnen. Es sind deutlich zwei sich übereinander lagernde Fächer. Der kleinere, viel hellere liegt etwas südlich von der Schweifachse; der breitere, schwächere mit seiner Mitte etwas nördlich, so daß der hellere, kleinere Fächer über die südliche Kante des schwächeren reicht und dieselbe in ihrem inneren Teile zu überdecken scheint. — Der Schattenraum ist halbrund begrenzt, im übrigen wie die letzten Tage.

Zur Vergleichung von Photographie und Zeichnung ist zu bemerken, daß sich zeitlich entsprechen:

Zeichnung	Figur	8	und	Photographie	Figur	2
„	„	9	„	„	„	3
„	„	10	„	„	„	4
„	„	11	„	„	„	5
„	„	12	„	„	„	6
„	„	13	„	„	„	7.

Die entsprechenden Bilder sind etwa gleichzeitig hergestellt[1]) und jeweils sollte das gezeichnete Bild mit dem photographierten übereinstimmen. Die Zeichnungen sind, wie gesagt, durch das gleiche Instrument wie die Aufnahmen hergestellt. und bei der ganz schwachen Vergrößerung eines Kellnerschen Okulares von 68 mm Äquivalentbrennweite. entsprechend einer schwachen Lupe von 3—4facher Vergrößerung.

Der erste Blick auf die Bilder zeigt. daß eine absolute Verschiedenheit zwischen dem photographischen und dem optischen Bilde besteht. Dort wo die Platte die hellen, der Sonne abgewandten Strahlen abbildete, die das

[1]) Etwa fünf Minuten nach Beendigung der Aufnahmen.

Wesentliche der Photographien ausmachen, sah das Auge gar keinen auffallenden Lichteindruck. Trotz größter Anstrengung und trotz künstlichen Verdeckens der hellsten Partien konnte durchaus nichts von den photographisch so hellen Ästen gesehen werden.

Die photographierbaren Schweife müssen also Lichtarten aussenden, die durchaus verschieden sind von denen, die die Koma und der optische Schweif dem Auge darbieten; und die Spektra müssen ebenso verschieden erscheinen, wenn es möglich sein wird, sie zu trennen.

Es ist danach wahrscheinlich, daß es auch ganz verschiedene Vorgänge sind, welche die optischen und die photographischen Schweife aussenden. Während die Platte bis zum gewissen Grade die gesehene Ausströmung mit abbildet als die ausgedehnte zurückgebogene Koma, sieht das Auge nichts von den zahlreichen, hellen Schweifen, die auf der Rückseite des Kernes zum Teil gerade dem optischen „Schattenraum" entspringen.

Wenn man die Bilder vorurteilsfrei betrachtet, möchte man geradezu zu der Ansicht kommen, daß die optisch erfaßbaren Schweifteile nach der Besselschen Auffassung von der Stirn des Kernes ausgehen, während die auffallendsten photographischen Büschel großenteils dem Vakuum auf der Rückseite des Kernes entspringen.

Heidelberg, Dezember 1907.

P. S. Leider ist es dem Lichtdrucker nicht gelungen, auch nur einigermaßen den Originalen entsprechende Abdrücke herzustellen, vielmehr sind sowohl alle Details nahe am Kopf, als auch alle äußeren, kürzeren Schweife verloren gegangen. (Heidelberg, Juli 1908.)

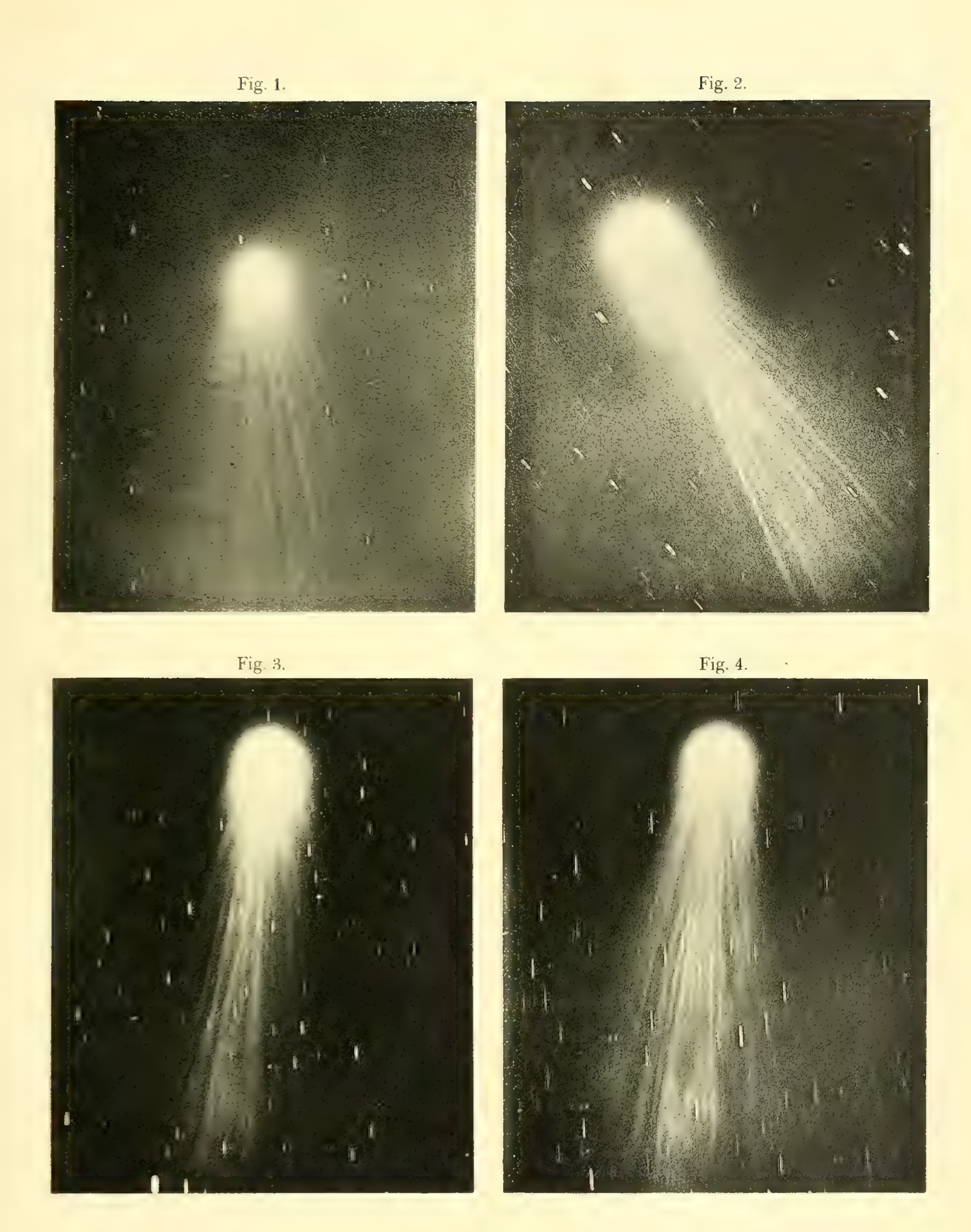


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7.






Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.



Die Polytrichaceen.

Eine biologische Monographie

von

Dr. Wilhelm Lorch.



Vorbemerkung.

In der vorliegenden Publikation übergebe ich dem botanischen Publikum eine biologische Monographie, die als solche meines Wissens ein Novum darstellt. Absichtlich wählte ich die hochorganisierte Familie der Polytrichaceen, um den Beweis zu erbringen, daß auch eine im System niedrig stehende Gruppe des Pflanzenreiches der biologischen Betrachtungsweise zugänglich ist. Maßgebend für die Wahl dieser Familie war fernerhin die Erwägung, daß darüber bereits zahlreiche Veröffentlichungen vorlagen, aus denen ich viel Brauchbares für meine Darstellung benutzen konnte.

Von berufener Seite wird oft der Einwand erhoben, daß der Begriff der Biologie noch durchaus ungeklärt sei und sich mit dem der Physiologie decke. Gewiß mag in vielen Fällen eine reinliche Scheidung beider Disziplinen eine schwierige Aufgabe sein, es muß aber doch auffallen, daß seit mehreren Jahrzehnten beide Begriffe in der Literatur Eingang gefunden und sich hartnäckig neben einander behauptet haben, was gar nicht zu verstehen wäre, wenn beide ihrem Wesen nach dasselbe bedeuteten. Wenn man aber „die Teile des Pflanzenkörpers nicht wie die Morphologie als Glieder, sondern als Organe, als Werkzeuge“ [1]) betrachtet, so meine ich, kann über den Inhalt und die Aufgabe der Biologie kein Zweifel mehr obwalten.

Ohne entwicklungsgeschichtliche, anatomische und physiologische Untersuchungen war auch bei dieser Arbeit nicht auszukommen, die Biologie erweist sich demnach als eine sehr befruchtende und belebende wissenschaftliche Disziplin.

---

[1]) Goebel, Pflanzenbiologische Schilderungen. Erster Teil, S. 2.

A. Der Gametophyt.

I. Die vegetativen Organe.

Das Stämmchen.

Denken wir uns die zahllosen Geschlechter der Laubmoose in üppiger Fülle teppichartig zu unseren Füßen ausgebreitet, so werden in erster Linie diejenigen Formen den Blick fesseln, die durch besondere habituelle Eigentümlichkeiten ausgezeichnet sind und sich infolgedessen scharf von der Umgebung abheben. Die winzigen Vertreter der Gattungen Diphyscium und Buxbaumia, ferner Sphagnum und Andreaea, Splachnum und die riesenhaften Formen von Polytrichum, Dawsonia, Spiridens u. a. würden auch dem nicht formengeübten Auge des Laien als Besonderheiten auffallen. Bei den Polytrichaceen incl. Dawsoniaceen ist es vor allem die starre und kräftige Tracht der Stämmchen, die auf das Auge wirkt und in ähnlicher Ausbildung bei keiner Gruppe der Laubmoose wiederkehrt.

Dank dem Entgegenkommen des Herrn Geh. Oberregierungsrats Prof. Dr. Engler war es mir möglich,[1]) an einem sehr umfangreichen Material die Verzweigungsarten der Polytrichaceenstämmchen zu studieren.

Alle Polytrichaceen besitzen orthotrope, radiäre und cymös verzweigte Sprosse von sympodialem oder dichasialem Typus. Wir finden, wie Goebel[2]) richtig bemerkt, „bei den Polytrichaceen alle Arten von normaler Entwicklung der Seitensprosse (wenigstens eines Teiles derselben) bis zur habituellen Hemmung, die aber auch keine ausnahmslose ist".

Beginnen wir mit der Gattung Polytrichadelphus, von der einige Arten, wie P. giganteus C. M. und ciliatus Mitt. als wahre Riesen bezeichnet werden dürfen. Eine recht bedeutende Höhe erreichen auch P. prolificans C. M., croceus Mitt., glaucus Hampe, juniperaceus C. M. und perelatus C. M.

Bei allen Arten dieser Gattung beschließt das Stämmchen sein Wachstum mit der Hervorbringung eines Archegoniums, so daß kein Zweifel über die Akrogynie bestehen kann. Die Art der Verzweigung läßt sich an den Polytrichadelphusarten sehr gut studieren, weil sie meist in merklich großen Abständen Innovationen bilden. Im Herbar C. Müller-Hal. befindet sich ein ca. 35 cm langes Stämmchen von P. giganteus C. M., das insgesamt zehn Sporogonien hervorgebracht hat. Die Stellen des Stämmchens, an denen die älteren Sporogonien saßen, sind noch deutlich an den seitlich hervortretenden, außerordentlich widerstandsfähigen Seten zu erkennen. In seinem unteren längeren Teil erscheint das Stämmchen einfach, es trägt in diesem Abschnitt fünf Sporogonien, weiter hinauf tritt eine gabelähnliche Verzweigung ein, diese Gabelzweige verhalten sich aber genau so wie

[1]) U. a. das vom Staate käuflich erworbene Herbar des bekannten Bryologen Dr. C. Müller-Hal.

[2]) K. Goebel, Archegoniatenstudien in Flora 1906, Band 96, Heft I, S. 3 und 4.

die Abschnitte des unteren Stämmchenabschnitts. In Wirklichkeit ist das Stämmchen, dessen Sprosse immer in der Verlängerung des nächst tieferen Abschnitts liegen, gar nicht, wie es scheinen könnte, einfach, sondern jeder höhere Abschnitt ist ein Seitenzweig des tieferen und nimmt unmittelbar unter der Spitze des letzteren, der ein Sporogonium erzeugte, seinen Ursprung.

Bei Polytrichadelphus glaucus Hampe tritt oft eine baumförmige Verzweigung ein. Aber auch hier sind alle Äste seitliche Hervorsprossungen. Im Herbar C. Müller-Hal, Berlin, liegen zahlreiche Exemplare dieser Art von dendritischem Habitus mit reichlichster Sporogonienbildung, die erkennen läßt, daß zum Aufbau derartiger Stämmchen ein Zeitraum weniger Jahre hinreicht. Mehrere Stämmchen trugen die Sporogonien von drei aufeinander folgenden Vegetationsperioden: alte, schwarzbraune, entdeckelte Kapseln in guter Erhaltung, dann solche von mittlerem Alter und hellbrauner Farbe mit Deckel und schließlich jugendliche, mit noch unentwickeltem Sporenbehälter und Kalyptren. Es ist mir kein Moos bekannt, an dem man in ähnlicher Weise durch die verschiedenalterigen Sporogonien in den Stand gesetzt wird, eine Altersschätzung des Stämmchens vorzunehmen.

Vielfach kommt es auch, wie ich dies bei P. croceus Mitt. beobachtete, zur Ausbildung mehrerer, nahe beieinanderstehender Sporogonien an einem Seitenzweige. Auf Längsschnitten ist jedoch sehr gut zu sehen, daß jene auch hier in ungleicher Höhe entspringen.

Hin und wieder erwecken einige P.-Arten, u. a. P. aristatus Hpe. und P. Abriaquiae C. M. den Anschein, als ob jeder höhere Abschnitt analog den Gliedern des männlichen Stämmchens aus dem Mittelpunkt eines Bechers entspränge. Dies kommt dadurch zustande, daß die Seitensprosse mit besonders kleinen Blättern ihr Wachstum beginnen und es in der Nähe des Archegoniums mit größeren Blättern beschließen.

Unter allen Polytrichaceen besitzen die Arten der Gattung Dendoligotrichum den höchsten Grad der Verzweigung. D. dendroides Hampe, microdendron C. M., micropus Dusén und squamosum Hook. et Wils. gehören gleich unserem Climacium dendroides W. et M. wegen ihres zierlichen baumförmigen Habitus zu den anmutigsten Formen der Laubmoose.

Nach Ausbildung eines sehr kräftigen und anatomisch außerordentlich gut differenzierten starren und starken Stämmchens kommt es in dessen oberem Teil zur Entwicklung einer vielverzweigten Krone. Das weibliche Stämmchen schließt nicht mit der Entwicklung eines Sporophyten ab, sondern erzeugt zunächst, wie Climacium dendroides W. et M., ein System von Ästen, an denen die Archegonien entstehen. Jeder folgende Ast ist aber stets der Seitenast der vorhergehenden, und damit hängt es zusammen, daß die weiblichen Stämmchen ein ganz anderes Aussehen als die männlichen haben müssen, weil hier, wie bei allen Polytrichaceen die Scheitelzelle am Leben bleibt und immer wieder neue Sprosse hervorbringt. Es darf aber nicht verschwiegen werden, daß an Ästen üppiger Kronen von Dendoligotrichum dendroides hin und wieder, nachdem schon mehrere Antheridienbecher gebildet worden sind, über diesen doch eine Verzweigung eintreten kann in der Weise, daß die Äste wiederum „männliche Blütenstände" — ich zählte deren mehrere Male bis zu drei — hervorbringen, es nimmt also diese Art eine Sonderstellung unter allen Polytrichaceen ein.[1]) Männliche Achsen können sich, was bisher unbekannt geblieben sein dürfte, ebenfalls verzweigen.

[1]) Solche Exemplare in größerer Anzahl im K. Herbar zu Berlin-Dahlem.

Bei Lyellia crispa Hook. habe ich an dem sehr reichlichen Material des K. Herbars in Berlin nur unverzweigte, weibliche Sprosse vorgefunden. Auch die Dawsonia-Arten besitzen, von verschwindend wenigen Ausnahmen abgesehen, einfache Stämmchen. Bei D. intermedia C. M. und longiseta Hampe kommt es hin und wieder zu einer bescheidenen Astbildung. Goebel bildet auf S. 2 seiner „Archegoniatenstudien“ (Flora. Band 96, Heft 1) ein Stämmchen von Dawsonia superba Grev. ab, das an seiner Spitze sich in zwei kurze Äste gabelt, von denen jeder ein Sporogon trägt. Solche Gabelung hat der genannte Forscher öfter beobachtet; er hält es für wahrscheinlich, daß der eine Zweig als Hauptachse, der andere als Nebenachse aufzufassen ist, es sei aber auch nicht ausgeschlossen, daß diese Verzweigung ebenso wie die sonst an unverzweigten Baumfarnen (z. B. Dicksonia antarctica) gelegentlich auftretende auf eine Beschädigung der Sproßspitze zurückzuführen ist. Ich möchte mich der ersteren Auffassung anschließen, wonach hier ausnahmsweise eine ruhende Sproßanlage zur Entwicklung gelangt ist, weil auch hier ein Sporogon, wie dies bei so vielen Polytrichaceen vorkommt, den Abschluß bildet. Wie erwähnt, bilden D. intermedia C. M. und longiseta Hampe hin und wieder Seitensprosse, es ist aber auffällig, daß, wie die Herbarexemplare ausweisen, bei ziemlich starker Gabelung keine Sporogonbildung eintrat. In diesen Fällen dürfte es sich tatsächlich um eine Beschädigung der Sproßspitze handeln, die dadurch in der Entwicklung des Sporogons gehemmt wurde und die tiefer stehenden ruhenden Axillarknospen zum Austreiben veranlaßte. Von einer Übergipfelung, wie sie bei den Polytrichadelphusformen und anderen Vertretern der Polytrichaceen normalerweise eintritt, kann aber hier nicht gesprochen werden. An den sonst stets unverzweigten Stämmchen von Polytrichum commune L. kommen hin und wieder auch Verästelungen vor. Es handelt sich aber stets um durchaus gleich starke Äste, deren Zustandekommen ohne Zweifel auf einer Verletzung der Sproßscheitelzelle beruht. Es kann aber auch vorkommen, daß, wie an einem Exemplar von Dawsonia polytrichoides im Berliner Herbar zu sehen ist, von den im weiblichen Blütenstand vereinigten Archegonien zwei zur Embryobildung gelangen, dieser Fall dürfte aber äußerst selten eintreten.

Die meisten Polytrichum-Pogonatum-Psilopilum-Catharinaea- und Oligotrichum-Arten haben unverzweigte Stämmchen. (Von den oft vorhandenen ruhenden Astanlagen sehe ich jetzt ab.) Einige Spezies der erstgenannten Gattung, z. B. Polytrichum austro-alpinum C. M., polare C. M., plurirameum C. M., hyperboraeum RBr., himalayanum C. M. u. e. a., weichen jedoch durch reichliche Astbildung ab, vielfach ist der Habitus deutlich baumförmig. Ältere Exemplare von Polytrichum austro-alpinum C. M. tragen eine Menge Sporogonien verschiedensten Alters, man sieht auf den ersten Blick, daß die Astbildung mehreren Vegetationsperioden angehört und mit der Sporogonbildung gleichen Schritt hält. Ganz anders bei Polytrichum plurisetum C. M. und polycarpum Schpr. Bei diesen Arten stehen die Sporogonien meist in größerer Anzahl an der Spitze des Stämmchens dicht gedrängt zusammen; bei P. plurisetum C. M. zählte ich an allen Exemplaren 8—9, bei P. polycarpum Schpr. bis 5 Kapseln. Diese entwickeln sich in einer und derselben Vegetationsperiode und rufen den Eindruck hervor, als ob sie, den Antheridien analog, in einem Becher vereinigt wären. Wie die Untersuchung ergab, findet im höchsten Teil des Stämmchens durch die hier zusammengedrängten kurzen, aber doch in verschiedener Höhe entspringenden Sporogonien tragenden Äste eine Verbreiterung des Sprosses statt. Polytrichum plurisetum C. M. erschien mir aber noch aus einem anderen Grunde interessant. Die Seten

sind nämlich bei dieser Art ziemlich stark hin- und hergebogen, sie erinnern in Verbindung mit den obersten Stämmchenblättern stark an die Verhältnisse bei Thysanomitrium und Campylopus.

Ich glaubte, auf die Schilderung der bei den Polytrichaceen auftretenden Verzweigungsarten nicht verzichten zu können, weil ich bei den sich anschließenden Mitteilungen immer wieder darauf zurückkommen muß.

Dem pleurokarpen Climacium dendroides W. et M. entspricht, was den Habitus anbelangt, das akrokarpe Dendoligotrichum dendroides Hampe vollständig. Äußerst kräftig gebaute Achsen dienen bei beiden Arten einer viel verzweigten Krone als Stütze. Die Größe der letzteren und die Säulen- und Biegungsfestigkeit der Achse stehen bei beiden Arten im besten Verhältnis. Entwickeln sich bei Climacium dendroides W. et M. aus dem Rhizom neue Sprosse, so dringen diese ohne jegliche Kronenentwicklung, wie dies jederzeit in der Natur beobachtet werden kann, zur Höhe der Kronen der ausgebildeten Stämmchen empor und lassen erst dann die schon sehr gut vorgebildeten, aber noch zwischen den Blättern des Stämmchens verborgenen Knospen unter dem Einfluß des Lichtes zu Zweigen auswachsen. Ältere Stämmchen dieser Art gehen nach Entwicklung von Sporogonien, die nicht gerade häufig ist, zu Grunde und werden durch neue ersetzt. Erst also, wenn das Licht seinen „belebenden“ Einfluß geltend machen kann, vollzieht sich die Streckung der verborgenen Knospen; dieser Einfluß zeigt sich erst, wenn die Sproßspitze zwischen die Kronen der älteren Stämmchen gelangt ist. Für Dendoligotrichum dendroides Hpe. dürfen wir wohl denselben Entwicklungsgang der vegetativen Teile annehmen. Unter den zahlreichen Exemplaren des K. Herbars zu Berlin befand sich nur ein Exemplar mit wenig entwickelter Krone, das Stämmchen war so groß, wie die der übrigen mit stark entwickelter Krone, welcher Umstand uns erkennen läßt, daß ein prinzipieller Unterschied gegen Climacium dendroides W. et M. nicht besteht.

Hiervon ganz abweichend verhalten sich die ebenfalls baumförmigen, aber zu dichten Rasen vereinigten Individuen von Polytrichum hyperboraeum RBr., austro-alpinum C. M., polare C. M. u. a. Bei diesen kann von einer starken Stütze, auf der die Krone ruhe, nicht die Rede sein. Sie erweist sich als überflüssig, denn die einzelnen Pflänzchen stehen dicht beieinander und bilden kompakte Massen.

Es hat den Anschein, als ob bei diesen Formen die Hauptachsen die Aufgabe, dem Stämmchen als Stütze zu dienen, gleichsam nur im Nebenamte übernähmen, es fehlt ihnen vollständig an der Kraft, ein einzeln stehendes Stämmchen, wie es bei Dendoligotrichum und Climacium der Fall ist, zu tragen. Die Hauptachsen sind außerdem verhältnismäßig sehr kurz — wenn die beiden letztgenannten Arten zum Vergleich herangezogen werden — außerdem verringert sich ihr Durchmesser nach der Basis hin ganz bedeutend, auch sind sie in auffälliger Weise hin- und hergebogen. Unser Polytrichum alpinum L. ähnelt in vieler Beziehung den genannten Arten, wenn auch bei ihm der baumförmige Habitus nicht immer so scharf hervortritt. Ich zweifle nicht daran, daß die Hauptachsen in der Jugend einen aufrechten Wuchs besitzen und daß die Verbiegungen erst später durch das sich stetig steigernde Gewicht der Krone verursacht werden. Bei Polytrichum alpinum L. ist die Schlängelung der Achse nur an deren unteren Teilen wahrzunehmen, oben dagegen ist sie gerade und auch kräftig genug, um nicht von der Last der Krone seitlich verbogen zu werden. Ein Rasen von Polytrichum hyperboraeum RBr., polare C. M. u. a. darf mit

einem Walde im Kleinen verglichen werden, dessen kurzstämmige Kronen dicht aneinanderstossen, deren Äste ineinandergreifen und das Umfallen der Stämmchen verhindern; die Achsen dienen hier nur als Befestigungsmittel der Pflänzchen im Boden und verhindern, daß der Wind den ganzen Wald wegfegt.

Die genannten dendritisch verzweigten Formen sind in ihrem Vorkommen sämtlich an arktische Breiten und bedeutende Höhenlagen gebunden, ein Umstand, der wohl der Beachtung wert ist. In mehrfacher Beziehung erinnern sie an den Wuchs alpiner Pflanzen, das Zwerghafte und Kümmerliche ihrer Erscheinung, die kurzen Hauptachsen, das Bestreben, viele Äste zu bilden, die Tendenz, in einer langen Reihe von kurzen Vegetationsperioden unter nicht sonderlich günstigen klimatischen Bedingungen zahlreiche Sporogonien zu entwickeln, wodurch die Existenz der Art gesichert wird, in allen diesen Punkten finden wir Anklänge an höhere Pflanzen, die alpine Regionen und hohe Breiten der Erde bewohnen.

Wohl alle unverzweigten Polytrichaceenstämmchen beschließen mit der Ausbildung des Sporophyten ihr Dasein. In der Natur hat man oft genug Gelegenheit, dies zu beobachten. An Stellen, wo man früher stets fruchtende Rasen zu finden gewohnt war, sind solche nicht mehr anzutreffen. Derartige Rasen machen einen ruinenhaften Eindruck, ihr frisches Grün ist dahin und an seine Stelle ist eine welke Farbe getreten. An derselben Lokalität kann man unter Umständen später wieder fruchtende Exemplare in üppigster Entwicklung sammeln. Der Rasen hat sich zum Teil erneuert und zwar aus Trieben, die er aus der Tiefe zum Lichte emporsandte. Die schwellenden Polster des im Grunewaldmoor massenhaft vorkommenden Polytrichum gracile Dicks. boten Gelegenheit, die einschlägigen Verhältnisse zu studieren. Reißt man ein Polster, das in größter Massenhaftigkeit Sporogonien hervorgebracht hatte, heraus, so nimmt man sofort eine Massenentwicklung von Innovationssprossen wahr, die mit dichtem, weißlichen Filz ausgestattet sind. Ein Stämmchen erzeugt meist mehrere solcher Sprossen. Diese dringen zum Lichte empor, und indem sie sich mit den älteren Stämmchen zu einem dichten Polster vereinigen, treten sie über die Oberfläche des Polsters hervor. Sie entwickeln Laubblätter und können zur Kapselbildung schreiten. So ragen die Stämmchen eines Polsters um einen gewissen Betrag über die Trümmer der Sprosse empor, an denen sie entstanden.

Als ich oben die Verzweigungsart von Polytrichadelphus darlegte, wies ich darauf hin, daß hier der neue Sproß stets unmittelbar unter der Spitze des mit einem Sporogon abschließenden Stämmchens hervorsprießt und in der Verlängerung des letzteren fortwächst, so daß es aussieht, als ob ein unverzweigtes Stämmchen vorläge. Stellen wir uns vor, bei dem riesigen Polytrichadelphus giganteus C. M. und ciliatus Mitt. z. B. würden die Verzweigungen in der natürlichen Länge unter einem Winkel von ca. 30° gegen die jeweilige Hauptachse geneigt seitwärts in die Höhe wachsen, so wird uns sofort klar, daß die Existenz des Stämmchens nicht denkbar ist. Wenn nun diese oft wiederkehrende Anfügung nach dem sympodialen Typus auch noch in der Form einer Schraubel sich vollzieht, indem die Scheinachsen immer nach derselben Seite hin entwickelt werden, wie es in der Tat bei manchen Polytrichadelphusarten der Fall zu sein scheint, — ich sage ausdrücklich: scheint! — so ist der Bestand eines mit schweren Ästen beladenen primären Stämmchens erst recht nicht denkbar. Ein kräftiger, längerer primärer Sproß könnte wohl einem Komplex kürzerer, auseinander hervorgehender Seitenzweige, die die Anordnung einer Schraubel aufweisen und unter einem kleinen Winkel gegen die jedesmalige Hauptachse geneigt sind, als Stütze

dienen, nicht aber vermag er diese Last zu tragen, sobald die Äste eine gewisse Länge überschreiten. Vom rein mechanischen Standpunkt aus betrachtet, unterscheiden sich also die unverzweigt erscheinenden Stämmchen vieler Polytrichadelphusarten in nichts von dem einfachen Sproß unseres Polytrichum commune L. In beiden Fällen gelangt ein einheitlicher, peripherischer, mechanisch festigender, auf Säulen- und Biegungsfestigkeit in Anspruch genommener Hohlzylinder zur Verwendung.

Bei Polytrichadelphus prolificans C. M. liegen die Verhältnisse anscheinend anders. Im K. Herbar zu Berlin finden sich Exemplare dieser Art von durchaus verschiedenem Habitus. Die größeren Stämmchen sind stark hin- und hergebogen und tragen längere Sprosse, die nicht in der Richtung der Achse, aus der sie hervorgingen, weiterwuchsen, sie sind im Gegenteil unter größerem Winkel gegen diese geneigt. Diese Zweige fallen, mit denen der übrigen Polytrichadelphusarten verglichen, durch ihre große Zartheit auf, die an ihnen inserierten Blätter nehmen von unten nach oben allmählich an Größe zu. Sie machen durchaus den Eindruck von Stolonen, die sich möglicherweise loslösen und die Art auf vegetativem Wege vermehren. Bestimmtes vermag ich aber darüber nicht mitzuteilen.

An dieser rein mechanischen Auffassung könnte man sich genügen lassen. Es dürfte aber eingewendet werden, daß hiermit noch lange keine ausreichende Erklärung für die Tatsache gegeben ist, daß der Tochtersproß unter Beiseiteschiebung der Spitze des Muttersprosses die Führung des letzteren übernimmt. Vom physiologischen Standpunkt könnten Licht- und Schwerkraftsreize zur Erklärung in Anspruch genommen werden. Da aber die Spitzen der Seitensprossen stets den höchsten Punkt einnehmen, weil sie unmittelbar unter der Spitze des älteren Sprosses entspringen, so ist wohl dem Einfluß des Lichtes ein geringerer Anteil bei der Entwicklung des Seitensprosses zuzuschreiben. Ohne Zweifel entwickelt sich eine der höchsten ruhenden Astanlagen zu einem neuen Triebe, was bei anderen Polytrichaceen, die auch solche ruhenden Knospen besitzen, niemals vorkommt. Warum bei Polytrichadelphus das Licht auf eine solche ruhende Astanlage einen anderen Einfluß ausüben soll als auf eine solche von Polytrichum commune L., ist nicht einzusehen, und diese wie zahlreiche andere Polytricha schließen doch ebenfalls die Entwicklung des Sprosses mit der Entwicklung des Sporogoniums. Meines Erachtens ist hier, wie bei den völlig im Dunkeln empordringenden Innovationssprossen von Polytrichum gracile Dicks. eine richtende Kraft in Anspruch zu nehmen, ich wage es aber nicht, für diese hier eine Bezeichnung zu wählen. Haben sich diese Sprosse in die Region erhoben, wohin der Einfluß des Lichtes reicht, so tritt außerdem eine Änderung in der Divergenz der Blätter ein. Sie zeigten bisher die Divergenz $^1/_3$ in bester Ausbildung, durch die Scheiteltorsion (Correns) werden sie in eine zum Lichte vorteilhaftere Lage gebracht, die nur durch eine Änderung in der Divergenz erzielt werden kann. Der Querschnitt des Stämmchens, bisher dreiseitig, wird in einen polygonalen übergeführt. In der Finsternis konnten sich derartige Einflüsse nicht geltend machen, der Segmentation der Scheitelzelle entspricht die Divergenz $^1/_3$ und die dreiseitig-prismatische Gestalt des Stämmchens.

Das jüngste und deshalb plastischste Gewebe enthält die Sproßspitze. Bricht nun, wie dies bei Polytrichadelphus der Fall ist, der Seitensproß unmittelbar unter der Stämmchenspitze hervor, so kann er, weil die Zellen der Muttersproßspitze noch nicht in den Dauerzustand übergegangen sind, diese leicht zur Seite drücken und selbst die Verlängerung der Achse übernehmen. Entstände der Seitensproß in tiefer gelegenen Regionen, so wäre er

dazu nicht imstande. Der Seitensproß muß sich also gleichzeitig mit dem Sporogon entwickeln, was auch der Fall ist.

Wie bereits hervorgehoben wurde, entstehen die wirklichen Laubblätter an den Innovationssprossen erst in der lichterfüllten Sphäre, von der die Bildung des Chlorophylls abhängt. Je weniger Licht in die von den erwachsenen Stämmchen gebildeten Räume eindringen kann, um so niedriger die Organisationsstufe, auf der die Blätter der Innovationssprosse stehen. Es ist nicht anzunehmen, daß die reduzierten Blätter dieser Sprosse unter allen Umständen sich entwickeln, daß sie erst in bestimmter Höhe den Übergang von den Niederblättern zu den Laubblättern vollziehen könnten. Richtet man die Versuche so ein, daß noch jugendliche Innovationssprossen, die unter normalen Verhältnissen erst in bedeutender Höhe zur Bildung von Laubblättern geschritten wären, von den sie umgebenden, erwachsenen, alten Stämmchen des Rasens befreit werden, daß sie also mit den Spitzen aus den gekürzten Sprossen ihrer Umgebung hervorschauen, so schreiten sie sofort zur Bildung von Laubblättern, ein meines Erachtens vollgültiger Beweis dafür, daß das Licht die gestaltändernde Kraft in sich verborgen hielt und daß die Polytrichaceen wie fast alle Laubmoose einen hohen Grad von Plastizität besitzen, auf die schon öfter von anderen hingewiesen wurde, eine Plastizität, von deren genauer Erforschung wir uns noch eine große Reihe wichtiger Ergebnisse versprechen dürfen.

In dem im Grunewald gelegenen Teufelsfenn, an dessen westlichem Rande äußerst üppige Rasen von Polytrichum commune L. weite Flächen überziehen, hatte die Natur selbst physiologische Experimente angestellt, so daß ich nur nötig hatte, das Resultat derselben mir zu eigen zu machen. Zwischen den hohen Stämmchen dieser Art fanden sich in verschiedener Höhe vielfach kleinere Moorbrocken — wie diese dorthin gekommen, vermag ich nicht zu sagen, wahrscheinlich waren sie durch austreibende höhere Pflanzen emporgehoben worden und zwischen den Stämmchen hängen geblieben, — aus denen kräftige Seitensprosse von bedeutender Länge, die meines Wissens bei Polytrichum commune L. nicht vorkommen, hervorragten. Die Moorteilchen hatten sich in den Blattwinkeln festgesetzt und die ruhenden Astanlagen zum Austreiben veranlaßt. Diese hatten ein geeignetes Substrat gefunden, in dem sie austreiben und zu einem kräftigen Sproß auswachsen konnten. Hier hatten also, wie wohl kaum zu bezweifeln sein dürfte, die Moorstückchen die ruhenden Astanlagen zur Weiterentwicklung veranlaßt, also einen Reiz auf sie ausgeübt. Oft waren diese Sprosse mitten durch den umfangreichen Moorbrocken hindurchgewachsen. Ob hier nur ein Ausnahmefall vorliegt oder ob Polytrichum commune L. solche Innovationssprosse, die sich später vielleicht vom Muttersproß loslösen, öfters produziert, muß ich dahingestellt sein lassen.

Bei den vollständig im Dunkeln des stark verfilzten Polsters von Polytrichum gracile Dicks. heranwachsenden Innovationssprossen, die an ihrer Oberfläche reichlich mit dichtem, weißlichen Rhizoidenfilz überzogen sind, ist von den reduzierten Niederblättern äußerlich kaum etwas wahrzunehmen. Der gänzliche Lichtmangel verhindert hier eine stärker differenzierte Ausbildung der Niederblätter, wie sie bei anderen Polytrichaceen, deren Vorkommen an andere Örtlichkeiten gebunden ist, zu beobachten sind. Wir sind bei jeder Polytrichaceenart, wenn wir die Verhältnisse, unter denen sie gedeihen, berücksichtigen, in der Lage, zu entscheiden, auf welcher Entwicklungsstufe die Niederblätter stehen. Wie früher bereits bemerkt wurde, fehlt diesen Niederblättern das für die Laubblätter zahlreicher

Polytrichaceen charakteristische Schwellgewebe, weil sie in der, man kann sagen, immerfeuchten Atmosphäre nicht in die Lage kommen, zum Schutze gegen übermäßige Transspiration eine Trockenstellung einnehmen zu müssen.

Auf die schon öfter erwähnten ruhenden Astanlagen bei Polytrichaceen hat wohl zuerst Correns[1]) aufmerksam gemacht. Er sagt darüber: „Polytrichum commune besitzt, wie P. formosum, ruhende Astanlagen von ganz eigenartiger Ausbildung (Polytrichum-Typus): es sind wirkliche, oft etwas verzweigte, freilich kurz bleibende Äste mit reduzierten Blättern, die unter den das Stämmchen bedeckenden Blattscheiden versteckt stehen. Sie sind mit einer guten Lupe leicht zu finden.

a. — 19 — 30 — 41 — 56 — 68 — 82 — 94 — 106 — 118 — 130.
b. — 13 — 28 — 40 — 52 — 64 — 77 — 89 — 101.
c. — 3 — 15 — 27 — 39 — 53 — 67 — 83 — 87 — 109 — 133
— 145 — 158 — 172 — 187.

Es ist ganz auffällig, daß hier am häufigsten das zwölfte Blatt (3×4!) eine Astanlage bildet. Zu Ende der einen und zu Beginn der neuen Vegetationsperiode ist der Abstand größer und wird die Stellung unregelmäßig. Deshalb enden alle Sprosse (am 1. April gesammelt) unregelmäßig und fangen a) und b) auch so an, während an dem längsten Stück c), bei dem also weiter unten mit dem Zählen begonnen werden konnte, zu unterst je das zwölfte Blatt eine Astanlage trägt und die Unregelmäßigkeiten erst weiter oben, in einer auch in der Beblätterung abweichenden Zone, von Blatt 39 an beginnen“.

Ich kann die Richtigkeiten dieser Angaben bestätigen. Die Frage nach der Bedeutung dieser seltsamen Organe ist aber nicht leicht zu beantworten. Fast alle Polytrichaceen bringen wohl derartige Astanlagen hervor, die sicher bei der Erzeugung von Innovationssprossen eine wichtige Rolle spielen, auch mögen Astbildungen, die z. B., wenn auch meist in bescheidenem Maße, bei vielen Polytrichum- und Pogonatum-Arten vorkommen, auf das Austreiben solcher ruhenden Astanlagen zurückzuführen sein. Den oben mitgeteilten Fall, der bewies, daß unter bestimmten Verhältnissen auch die Astanlagen von Polytrichum commune L. austreiben können, möchte ich aber doch zu den Ausnahmefällen rechnen. Was stellen nun diese Organe bei Polytrichum commune L., formosum Hedw. u. a. dar? Ihr zartes Stengelgewebe, ihre sehr stark reduzierten Blätter sind wohl fähig, Wasser zu speichern, sie aber für Wasserreservoire anzusprechen, ist doch etwas gewagt. Ihre versteckte Lage innerhalb der Blattscheiden läßt sie aber wieder als wasserhaltende Werkzeuge erscheinen, doch ist anderseits ihre Größe so gering, daß für den umfangreichen Organismus eines Stämmchens ein besonderer Nutzen für es sich nicht ergeben kann. Es muß dahingestellt bleiben, ob man in ihnen die kümmerlichen Überreste einer früheren reicheren Astbildung bei den Polytrichaceen zu erblicken hat oder ob es Organe sind, die sich in fortschreitender Entwicklung befinden.

Es war zu erwarten, daß diese ruhenden Astanlagen sich zur Weiterentwicklung bequemen würden, sobald die Stämmchen, der Scheitelzelle beraubt, ihr Spitzenwachstum einzustellen gezwungen werden. Zahlreiche Stämmchen von Polytrichum commune L., die

[1]) Correns, Über Scheitelwachstum, Blattstellung und Astanlagen des Laubmoosstämmchens. Festschrift für Schwendener. 1899, S. 405. Correns, Untersuchungen über die Vermehrung der Laubmoose durch Brutorgane und Stecklinge. Jena, 1899, S. 389.



Fig. 1.

ich in einer mit Feuchtigkeit gesättigten Atmosphäre kultivierte, wurden in gleicher Höhe durchschnitten. Nach einiger Zeit traten aus den Achseln mehrere zarte Sprosse hervor, deren basaler Teil sich durch den Besitz sehr reichlicher Rhizoiden auszeichnete. Die Primärblätter, jedoch nur die unteren, trugen auf der Rückenfläche Rhizoiden, aber nur in geringer Anzahl, während solche an den oberen Blättern nicht nachzuweisen waren. Es durfte nun nicht ohne weiteres angenommen werden, daß die neuen Sprosse die ausgewachsenen, ruhenden Astanlagen darstellten, denn die Möglichkeit, daß durch den operativen Eingriff die Bildung neuer Organe in die Wege geleitet werden würde, war auch vorhanden. Es stellte sich aber heraus, daß es sich in der Tat um die von Correns beschriebenen Axillarsprosse handelte, denn in der Regel war der junge Trieb um je zwölf Blätter von der tiefer stehenden ungeweckten Astanlage entfernt. Es mußte auffallen, daß die Stämmchen meist nur die



Fig. 2.

höchststehenden ruhenden Astanlagen zur Weiterentwicklung brachten. Die übrigen blieben stets ungeweckt. Es ist außerdem von Interesse, daß die auswachsenden Sprosse, denen doch reichlich Feuchtigkeit zur Verfügung stand, zu sehr reichlicher Rhizoidenbildung schritten, die eine flockige, weiße Masse bildeten und oft sehr bedeutende Länge besassen.

Die jungen, noch ruhenden Astanlagen sind in der Tat oft verzweigt, wie aus Fig. 1, die einen Querschnitt durch die Hauptachse b und die beiden Nebenachsen a vorführt, zu

ersehen ist. An der Astnatur ist also nicht zu zweifeln. Die Rhizoiden sind, wie man an Längs- und Querschnitten feststellen kann, mit sehr stark verdickten Membranen ausgestattet, so daß das Lumen sehr klein ist.

Den Raumverhältnissen zwischen Blattscheide und Stämmchen entsprechend ist die Hauptachse der ruhenden Astanlage stark zusammengedrückt (Fig. 1 b), und auch die kurzen Seitenäste richten sich in ihrer Lage nach dem zur Verfügung stehenden Raum. Ein aus dickwandigen Zellen, dem Querschnitt in seiner Gestalt entsprechender, gut ausgebildeter Zentralstrang ist vorhanden, er unterscheidet sich aber von dem des Stämmchens durch den fast vollständigen Mangel der sogenannten Hydroiden. (Fig. 2 a zeigt deren nur zwei.) Wenn wir berücksichtigen, daß die ruhenden Astanlagen unter normalen Verhältnissen nicht austreiben, so erscheinen derartige typische Wasserleitungszellen auch ganz überflüssig. Dem Zentralzylinder ist hier, wie es scheint, ausschließlich die Aufgabe der mechanischen Festigung des Sprosses zugewiesen. Weiter fehlt im Gegensatz zur Achse des Stämmchens der aus zartwandigen und farblosen Zellen — die Membranen des zentralen Gewebes sind bräunlich — bestehende, mehrschichtige Hohlzylinder, den man als zum Zentralzylinder gehörig betrachtet, auch ist das Grundgewebe ganz anders als bei der Stämmchenachse ausgebildet. Dieses ist nicht einheitlich, sondern zerfällt in sechs miteinander abwechselnde Gewebepartieen (Fig. 2), von denen je drei mit stärkeren Membranen versehen sind (Fig. 2 b) und die Verbindung zwischen dem Zentralstrang und den drei umfangreichen Gruppen (Fig. 2 c) peripherisch gelegener steréider Zellen herstellen. Diese sind weiter nichts als die in das Stämmchengewebe übergehenden mechanischen langgestreckten Zellen der reduzierten Blätter. Die Peripherie selbst ist nicht, wie bei der Stämmchenachse, besonders mechanisch gefestigt. Die drei Blattspuren, durch die erwähnten Brücken mit dem Zentralstrang verbunden, reichen zur mechanischen Festigung des Sprosses, besonders aber, wenn dieser austreiben sollte, vollständig aus. Noch einfacher liegen die Verhältnisse bei den kurzen Ästen, die an der Achse der ruhenden Astanlage entspringen. Die drei Blattspuren (Fig. 3) sind überall deutlich zu erkennen. Von einer Differenzierung des Gewebes kann aber hier überhaupt nicht mehr gesprochen werden.

Etwas höher hinauf ändert sich zunächst der Querschnitt der Hauptachse der ruhenden Astanlage. Er nähert sich mehr und mehr der Kreisgestalt (Fig. 4). Immer noch überwiegt räumlich der Zentralstrang sehr stark, es kommen aber jetzt die drei zu ihm hinführenden, mit kräftigen Membranen versehenen Gewebemassen in Wegfall. Wir finden ein einheitliches, zartwandiges Grundgewebe, das von den drei Blattspursträngen unterbrochen wird. Stark verdickte Rindenzellen fehlen, nur die Außenwand ist etwas verdickt.

Die Astanlagen verschiedener Polytrichumarten verhalten sich unter sonst gleichartigen äußeren Bedingungen durchaus verschieden, wie eine längere Reihe von Versuchen auswies.

Ich legte eine größere Anzahl gleich langer Stämmchen von Polytrichum commune L. und gracile Dicks. — je sechs von beiden Arten — parallel auf eine kreisrunde Kartonscheibe und nähte sie an mehreren Stellen fest, und zwar so, daß alle Teile der Kartonscheibe dicht anlagen. Diese Scheiben ließ ich auf gleichgroßen Korkplatten auf Wasser schwimmen. In den Gefäßen, die nicht luftdicht verschlossen waren, herrschte genügende Luftfeuchtigkeit. Auch waren die Kartonscheiben durch ihre Berührung mit dem Wasser stets mit solchem getränkt, so daß ein Eintrocknen ausgeschlossen war. Das Wasser wurde täglich erneuert.

Die Stämmchen von Polytrichum commune L. wurden durch die horizontale Lage nicht veranlaßt, die ruhenden Astanlagen zu entwickeln. Dagegen setzte die Sproßspitze ihr Wachstum fort, indem sie sich scharf unter einem rechten Winkel gegen die Horizontale erhob. Ganz anders verhielten sich die Versuchsobjekte von Polytrichum gracile Dicks. Hier stellte die Sproßspitze ihr Wachstum ein, dagegen brachen an zahlreichen Stellen eines jeden Stämmchens zarte Triebe hervor, die nichts anderes als die geweckten ruhenden

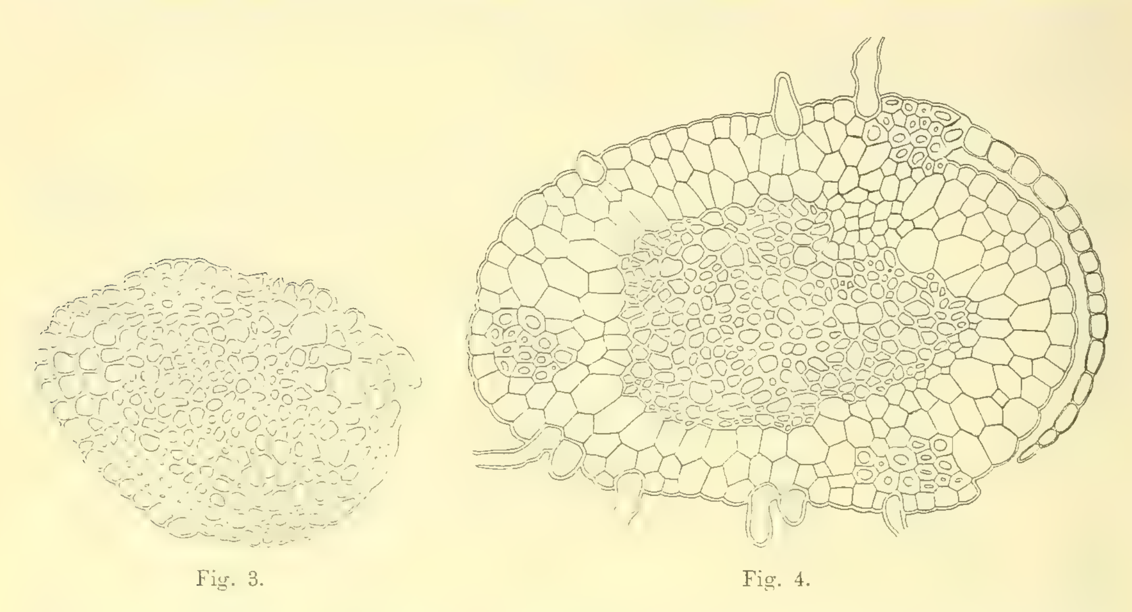


Fig. 3. Fig. 4.

Astanlagen darstellten, wie eine genauere Untersuchung ergab. Es genügt mir, die Tatsachen mitgeteilt zu haben. Auf theoretische Erörterungen lasse ich mich nicht ein, weil ich überzeugt bin, daß nichts dabei herauskommt.

Sehr bemerkenswerte Resultate lieferte eine große Anzahl von Versuchen,[1]) die ich mit Stämmchen von Polytrichum commune L., gracile L., formosum Hedw., Dawsonia superba Grev., Lyellia crispa Hook., Polytrichadelphus semiangulatus Mitt., Dicranum undulatum Hedw. und Climacium dendroides W. et M. anstellte. Über die Art und Weise der Versuchsanstellung kann ich mich hier nicht auslassen, ich will nur mitteilen, daß die Versuchsanstellung eine sehr mannigfaltige war, durchaus abhängig von der Frage, die beantwortet werden sollte.

Es ergab sich, daß die Stämmchen der genannten Arten bei Verlust der Feuchtigkeit Torsionen ausführten, und zwar oft sehr ausgiebige. So drehten vier 7 cm lange Stämmchen von Polytrichum formosum Hedw. um Winkel von 290°, 350°, 340° und 215°, bei Polytrichum commune L. betrugen die Torsionswinkel ca. 90° (sechs je 5 cm lange Stämmchen). Aber die Stämmchen einer und derselben Art drehen seltsamer Weise nicht, wie man erwarten sollte, in derselben Richtung. Von 26 Stämmchen von Polytrichum commune L. drehten 22 Exemplare nach links, vier nach rechts, von 18 Stämmchen von Polytrichum gracile Dicks. führte die Hälfte Drehungen nach links, die übrigen solche nach rechts aus. Bei Lyellia crispa Hook. drehten von 20 Stämmchen 13 nach links, vier nach rechts, während bei drei

---

[1]) Lorch, Berichte der Deutsch. Bot. Ges. 1908. Heft I.

Stämmchen kein deutlicher Ausschlag erfolgte. Mit Polytrichadelphus semiangulatus Mitt. habe ich zehn Versuche angestellt, sechs Stämmchen drehten nach links, vier nach rechts. Dicranum undulatum Hedw. und Climacium dendroides W. et M., zwei den Polytrichaceen fernstehende Arten, führen ebenfalls bei Wasserverlust Torsionen aus. Von der erstgenannten Art tortierten 13 nach rechts, sieben nach links.

Eine weitere Reihe von Experimenten zeigte, daß die Torsion an entblätterten Stämmchen früher eintritt und daß an beblätterten Sprossen die Torsionserscheinungen sich einstellen, sobald die Blätter in die Trockenstellung übergegangen sind.

Es könnte vermutet werden, daß der Sinn der Torsion und der Grad der Ablenkung, also die Größe des Drehungswinkels von den Blättern beeinflußt würde. Dies ist jedoch nicht der Fall. Jugendliche Stämmchen, die aus dem Rhizom oder aus unteren Stämmchenteilen hervorgehen und noch keine typischen Laubblätter aufweisen, haben ebenfalls die Fähigkeit, Torsionen auszuführen und zwar drehen sie, wie ich an Polytrichum formosum Hedw. feststellte, oft in entgegengesetztem Sinne, genau wie die fertigen Sprosse.

Längere Stämmchen — denn diese eignen sich zu diesen Experimenten am besten — führen nur in den eintrocknenden Teilen Drehungen aus. Man kann ganz nach Belieben Teile von hinreichend langen Sprossen zur Drehung veranlassen und diese durch Befeuchtung an anderen Teilen verhindern.

An gleich langen Sproßstücken zwischen je zwei Antheridienbechern der Stämmchen von Polytrichum commune L. nimmt die Größe des Drehungswinkels allmählich nach untenhin ab. Es ist dies abhängig von dem Alter des Gewebes. Der jüngste Abschnitt besitzt mehr Torsionskraft als der nächst tiefer gelegene.

Der Dichtigkeitsgrad der Beblätterung ist bei Individuen derselben Art oft sehr verschieden. Er übt auf die Torsion einen Einfluß derart aus, daß dichter beblätterte Sprossen um kleinere Winkel drehen, als solche mit lockerer Beblätterung.

Wie es scheint, ist bisher ganz übersehen worden, daß es bei vielen Polytrichaceen Stämmchen mit links- und mit rechtsläufiger Blattspirale gibt. Diese Verschiedenheit in der spiraligen Anordnung übt, wie ich durch zahlreiche Versuche an Polytrichum commune L. feststellte, einen bestimmenden Einfluß auf den Sinn der Torsion aus. Stämmchen mit rechtsläufiger Spirale drehen nach rechts, solche mit linksläufiger in entsprechender Richtung. Immer aber ist der Ausschlag nach links größer als der nach rechts, auch das Tempo der Torsion nach links ist ein schnelleres. Zur Erklärung der Rechts- und Linksläufigkeit der Blattspirale bei Stämmchen derselben Art kann meines Erachtens nur das Verhalten der Scheitelzelle herangezogen werden. Wahrscheinlich scheidet sie ihre Segmente das eine Mal im Sinne des Uhrzeigers, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne ab.

Wunderbar ist, daß in einem und demselben Stämmchen mehrere Torsionsmöglichkeiten vorhanden sein können. Untersuchungen nach dieser Richtung hin lieferten das Ergebnis, daß die verschiedenen Torsionsmöglichkeiten immer an die in einer und derselben Vegetationsperiode erzeugten Sproßteile gebunden sind.

Höchst eigenartig ist auch das Verhalten der Haupt- und Seitensprosse von Dicranum undulatum Turn. In vielen Fällen war der Sinn der Torsion bei beiden derselbe, vielfach war aber auch das Gegenteil der Fall. Eine gesetzmäßige Beziehung der Drehungserscheinungen bei dieser Art ließ sich nicht feststellen.

Die Blätter.

Die Lamellen.

Wenn auch die vegetative Organbildung bei den Laubmoosen im Gegensatz zu der reicheren Gliederung des Vegetationskörpers der Lebermoose eine verhältnismäßig geringere Mannigfaltigkeit aufweist, wenn auch bei ersteren ein und derselbe Typus der Gliederung des Vegetationskörpers, der des beblätterten Stämmchens, im wesentlichen überall wiederkehrt,[1]) so darf doch nicht übersehen werden, daß auch in der Reihe der Laubmoose sehr eigenartige Bildungen zur Entwicklung gelangen, von denen bei den Hepaticae bisher nur zwei analoge Fälle — Gottschea Blumei u. a.[2]) und Jungermannia lamellata Hook.[3]) — bekannt geworden sind. Hierher rechne ich u. a. die an den Blättern der Polytrichaceen und einiger Pottiaceen auftretenden Lamellen und die verzweigten Fäden an der Blattoberfläche mehrerer Barbula-Arten. Zahlreiche Forscher, unter ihnen vor allem L. C. Treviranus,[4]) C. Müller-Hal.[5]) und P. G. Lorentz[6]) haben sich für diese charakteristischen Emergenzen der Laubmoosblätter interessiert und ihre Beobachtungen in ziemlich ausführlichen Veröffentlichungen niedergelegt. Trotzdem muß unsere Kenntnis, besonders was die biologische Deutung der Lamellen anbelangt, als der Vervollständigung und Verbesserung durchaus bedürftig bezeichnet werden. Auch in Bezug auf Entwicklungsgeschichte und Morphologie der Lamellen herrscht noch vielfach Unklarheit. Wenn ich nun den Versuch mache, einige der vorhandenen Lücken auszufüllen und die biologische Bedeutung der Lamellen in das rechte Licht zu setzen, so bin ich mir der Schwierigkeit der Aufgabe, eine in jeder Beziehung befriedigende Erklärung zu geben, wohl bewußt, weshalb ich bitte, meine Darlegungen einer wohlwollenden Prüfung und nachsichtigen Beurteilung zu unterwerfen. Bei vielen Untersuchungen biologischer Art können nur dann befriedigende Resultate erzielt werden, wenn außer dem zu behandelnden Gegenstande selbst auch alle ferner liegenden Momente herbeigezogen werden, die geeignet erscheinen, den gegebenen Darlegungen einen möglichst hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu verleihen.

J. Hedwig war wohl der erste,[7]) der Lamellen an einer Polytrichumart, und zwar an Polytrichum nanum Schreb., beobachtete. Ihm war die bedeutende Dicke der Blattrippe bei dieser Art aufgefallen, auch war ihm nicht entgangen, daß die Rippe an der Oberseite — Querschnitt — nach der Spitze hin Erhabenheiten und zahnartige Vorsprünge besitzt, was er an den Abbildungen zum Ausdruck bringt.[8]) Eine ähnliche Beobachtung machte

---

[1]) K. Göbel, Organographie der Pflanzen. Teil II. Heft I. Bryophyten. S. 235.

[2]) Göbel, Archegoniatenstudien. Beiträge zur Kenntnis australischer und neuseeländischer Bryophyten. Flora, Bd. 96, Heft 1, S. 111.

[3]) Hooker, Musci exotici. Bd. I. Tab. XLIX.

[4]) L. C. Treviranus. Über den Bau einiger Laubmoosblätter. Linnaea, 1841, S. 303—309. Mit 1 Tafel.

[5]) C. Müller-Hal. Über die Lamellen der Laubmoosblätter. Linnaea, 1844, S. 99—111. Mit 1 Tafel.

[6]) P. G. Lorentz. Moosstudien. S. 20—25. Tafel 4. Leipzig, 1864, und Grundlinien zu einer vergleichenden Anatomie der Laubmoose. Pringsheims Jahrbücher für wissenschaftliche Bot. Leipzig, 1867 bis 1868, S. 363—466.

[7]) In der „Historia muscorum" des Joh. Jac. Dillenius, Oxford, 1741, findet sich keine, die Lamellen betreffende Notiz.

[8]) Hedwig. Beschreibung und Abbildung der Laubmoose. I. 38. Tom. XIII, S. 6—8. II.

er an Oligotrichum hercynicum Ehrh.[1]) Wahlenberg[2]) bestätigt die Beobachtung Hedwigs und sagt in Bezug auf diese Art und Psilopilum arcticum Brid., daß die untere armschichtige Partie der Blätter nach der Spitze hin eine wellenförmige Ausbildung erfahre und einen fleischigen Rücken bilde, was bei anderen Moosen bisher nicht beobachtet worden sei. Robert Brown[3]) und später C. Müller[4]) sprachen die Vermutung aus, daß wahrscheinlich an der Oberseite der Blätter aller Polytrichaceen wie bei Dawsonia und Lyellia sich Lamellen nachweisen lassen würden, und daß diese bei mehreren Arten nicht nur die Nerven selbst, wie die Muscologia Britannica annimmt, sondern auch einen größeren Teil der Blattfläche — also der laminaren Partie — einnehmen. Schwägrichen[5]) wies bei mehreren Polytrichumarten, wie P. elatum, adpressum, piliferum u. a., Lamellen an der Blattoberseite nach und deutete sie als Faltungen der Blattrippe. Eine weitere Bereicherung unserer Kenntnis bezüglich der Lamellen verdanken wir Treviranus, der außer einigen exotischen Arten alle deutschen Formen untersuchte und überall Lamellen vorfand. In seiner Arbeit "Über den Bau einiger Laubmoose" widmet er diesem Gegenstand mehrere Seiten. Er verbreitet sich ziemlich ausführlich über die gegenseitige Lage, Anordnung, Zahl und Anatomie der Lamellen sowie deren Verhältnis zur Blattrippe. Hedwig hatte früher an der Oberfläche der Blätter von Pottia cavifolia Ehrh. (Gymnostomum ovatum Hedw.) eine zusammenhängende Masse von körniger Beschaffenheit beobachtet, die bei den Verfassern der Bryologia Germanica, in der wunderbarer Weise die Lamellen von Pottia subsessilis Br. Eur. richtig dargestellt sind, sich zu einer Art Auftreibung der Blattrippe, zu einer Art Kapsel entwickelt, deren Innenraum mit freien Körnern ausgefüllt war. Treviranus zeigte aber an Querschnitten durch die Blätter von Pottia cavifolia Ehrh., daß man es hier mit längslaufenden Lamellen, in ähnlicher Art und ähnlichem zelligen Bau wie bei Polytrichum und Lyellia zu tun habe.

Obwohl zu der Zeit, als Treviranus und C. Müller ihre Beobachtungen über die Lamellen veröffentlichten, biologische Fragen nur höchst selten das Interesse der Forscher in Anspruch nahmen, so forderten diese höchst eigentümlichen Zellflächen und Zellfäden, wie man sie bei zahlreichen Polytrichaceen, bzw. einigen Barbula-Arten angetroffen hatte, gebieterisch zu einer biologischen Deutung heraus. Beide Forscher haben sich denn auch dieser Aufforderung nicht entziehen können, und es ist erfreulich zu sehen, wie schon damals, wenn auch nur vereinzelt, das Bedürfnis sich geltend machte, jenen Bildungen ihre Stellung als Werkzeuge im Dienste des Gesamtorganismus anzuweisen.

Treviranus wagt sich an eine biologische Deutung der Lamellen nicht heran, er sagt darüber:[6]) „Es ist demnach schwer zu sagen, was für ein Bedürfnis der Natur ein so vereinzeltes Vorkommen des beschriebenen Baues veranlassen möge. Als eine anfangende Entwicklung — es ist zuvor die Rede von den dorsalen Lamellen bei Campylopus-Arten — der bei den zusammengesetzteren Organismen so eigentümlichen Struktur der oberen Blattfläche zu denken, dürfte zu gewagt sein; dienen also jene Lamellen etwa, die Feuch-

---

[1]) A. a. O. 44.

[2]) Wahlenberg, Flora Lapponica 429. T. XXII.

[3]) Robert Brown in Linnean Transactions, XII, 566.

[4]) C. Müller, Über die Lamellen des Laubmoosblattes. Linnaea, 1844, S. 100.

[5]) Schwägrichen. Supplem. II, Vol. II 4—7, tab. 151—153.

tigkeit zu erhalten und ihre Einsaugung von außen zu verstärken, gleich den gegliederten Fäden, von denen sich das nämliche vermuten läßt? Auch diese entspringen zuweilen, gleich jenen Lamellen, höchst regelmäßig aus dem Blattnerven, wie bei Barbula membranifolia Schultz, wo Bischoff dergleichen sehr treu geschildert hat; denn wie sehr diese aus der ganzen Blattfläche zu entspringen scheinen, geschieht es doch einzig und allein aus dem Nerven".[1]) Einige Jahre später hat C. Müller[2]) die Frage: „Was bezweckt die Natur mit der Lamellenbildung?" folgendermaßen beantwortet: „Alles zusammengefaßt, würde dann endlich das Resultat sich ergeben, daß die Lamellen nur eine wuchernde Bildung der Laubmoosblätter sind, durch welche, wie gesagt, der überflüssige Nahrungssaft zu neuem Membranstoff verarbeitet wird." Der im Überfluß vorhandene Nahrungssaft soll also nach der Theorie Müllers, wenn er in den übrigen schon bedeutend verdickten Teilen, wie Achse und Blattrippe, nicht mehr assimiliert werden kann, in der Verlegenheit keinen anderen Ausweg haben, als eine einfache luxuriöse Bildung seiner Endzellen — der Rippe nämlich — hervorzurufen, „die sich verlängern und zu Lamellen werden." Das Abfallen der Lamellen — in Wirklichkeit sind es Fäden — an den Blättern älterer Exemplare von Barbula membranifolia Schultz und chloronotos Bruch. soll seinen Grund darin haben, daß diese „nicht mehr mit ihrer verdickten Struktur geeignet sind, viel Flüssigkeit aufzusaugen", dessen natürliche Folge das Aufhören der Lamellenbildung sei. Die Natur geht aber, wie hinlänglich bekannt, mit dem ihr zur Verfügung stehenden Material sehr sparsam um und erzielt damit einen möglichst großen Effekt, sie vergeudet also den „überschüssigen Nahrungssaft" nicht in so ungeheuerlicher Weise, wie Müller annimmt, denn es ist wohl nicht zu viel gesagt, daß bei sehr vielen Polytrichaceen die Lamellen mindestens ein Drittel des Gesamtmaterials eines Stämmchens ausmachen.

Einer Klärung bedarf auch die Frage, was man bei den Blättern der Polytrichaceen als Rippe und was als Lamina aufzufassen hat. Nach Hooker und C. Müller trägt nur die Rippe Lamellen; Treviranus, Robert Brown und Schleiden dagegen behaupten, daß auch die Lamina – nach Treviranus z. B. Polytrichum contortum — Lamellen besitzt. Limpricht[3]) und P. G. Lorentz[4]) unterscheiden an den Blättern der Polytrichumarten eine Intermediärzone, die sich zwischen den einschichtigen Teil der Blattlamina und die Sklerenchymplatten einschiebt. Auf Grund eingehender Untersuchungen an einem sehr reichlichen Beobachtungsmaterial kann ich mich nur der Auffassung Hookers und C. Müllers anschließen.

Wie bei fast allen Laubmoosen kann man auch bei den Polytrichaceenblättern nur zwei Teile, Rippe und Lamina unterscheiden. Diese kann ein-, zwei- und mehrschichtig sein. Die Lamellen gehören stets der Rippe an, wie auch durch die Entwicklungsgeschichte des Blattes bewiesen wird. Ich unterscheide zwei Typen der Blattbildung, den von Polytrichum piliferum Schreb. und den von Polytrichum Humboldtianum Hmpe.

Reicht die dorsale Sklerenchymplatte bis zur einschichtigen Lamina, wie es bei erstgenannter Art der Fall ist, so kann von einer intermediären Zone nicht die Rede sein; Rippe und Lamina sind in diesem Falle sehr scharf getrennt. Schiebt sich jedoch zwischen

---

[1]) Linnaea, 1841, S. 308.

[2]) Linnaea. 1844. S. 111.

[3]) In Dr. L. Rabenhorsts Kryptogamen-Flora. Bd. IV, Abt. II, S. 612.

[4]) P. G. Lorentz. Studien über Bau- und Entwicklungsgeschichte der Laubmoose. S. 23.

die dorsale Platte und die Lamina, die, wie schon oben erwähnt, nicht einschichtig zu sein braucht, eine längere (Polytrichum Humboldtianum Hmpe.) oder kürzere (Polytrichum commune L.) Zwischenzone ein, so kann man Zweifel darüber hegen, ob man diese Zone zur Rippe oder zur Lamina rechnen soll. Die Entwicklungsgeschichte und die vergleichende Anatomie lehren, daß diese Schichten als Teile der Rippe aufzufassen sind, die intermediäre Zone als ein besonderer Teil des Blattes kommt also in Wegfall.

Betrachtet man Querschnitte durch die Blätter von Polytrichum Himalayanum Wils. und Trichopilum simense B. et S. unter dem Mikroskop, so hat man den Eindruck, als ob die Endzellen der Lamellen und die dorsalen Epidermiszellen eine einheitliche, d. h. zusammenhängende Zellenreihe bildeten. Man kommt unwillkürlich auf den Gedanken, daß die Lamellen durch Zerfallen eines früher zusammenhängenden Gewebes an der Blattoberseite entstanden sein möchten. Die Entwicklungsgeschichte belehrt uns indessen eines Besseren, doch wirkt der Eindruck so überzeugend, daß man sich nicht ohne weiteres von dem Gedanken freimachen kann, die Polytrichaceen könnten in der angegebenen Weise ihre Lamellen erhalten haben.

Es ist längst bekannt, daß viele Polytrichaceen außer den Lamellen an der Oberseite des Blattes noch solche an der Rückenseite, wenn auch in teilweise beschränkterem Maße, hervorbringen. Sie erinnern in dieser Beziehung durchaus an die analogen Bildungen der Blätter vieler Campylopus-Arten, insbesondere Campylopus polytrichoides De Not., Oligotrichum javanicum Dozy et Molkb. und Pogonatum semilamellatum M. erreichen, was die Zahl der Lamellen betrifft, den höchsten Grad der Organisation. Bei erstgenannter Art kommt noch hinzu, daß die Lamellen der Oberseite selbst wieder kurze Auszweigungen entwickeln. (Fig. 5 α u. β.) Im Gegensatz zu dieser Art muß die Lamellenbildung an der Unterseite bei Pogonatum semilamellatum M. (Fig. 6) als die reichere bezeichnet werden. Ansätze zur Lamellenbildung an der Rückenseite der Blätter, vor allem der Rippe, können bei vielen Polytrichaceen nachgewiesen werden.

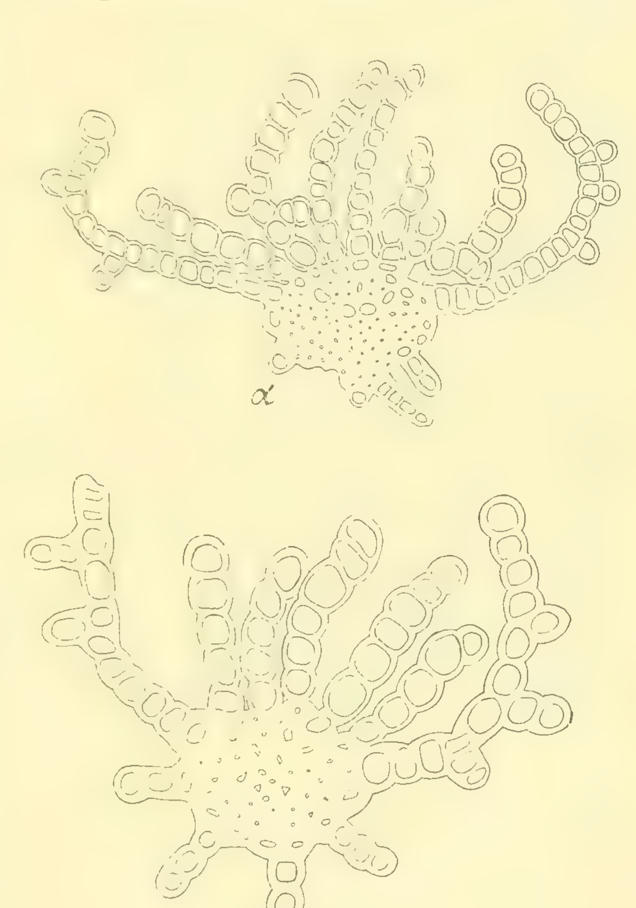


Fig. 5.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich



Fig. 6.



Fig. 7.

noch auf die eigentümliche Zahnbildung an der Unterseite der Blätter von Catharinaea-Arten aufmerksam machen. Unter den einheimischen Arten ist besonders Catharinaea Hausknechti Jur. et Milde hervorzuheben. Die Unterseite der Blätter dieser Art besitzt Zähnchen in schiefen Reihen. (Fig. 7 *α*.) Eine solche Reihe habe ich in Fig. 7 *β* abgebildet. Diese Zähnchen halte ich für lamellöse Organe, für Überbleibsel einer früheren reicheren Lamellenentwicklung. Die Catharinaea-Arten befinden sich meines Erachtens, was ihre Lamellen anbelangt, in einer rückschreitenden Entwicklung. Auch der untere Lappen des doppelschichtigen Randes z. B. bei Catharinaea tenella Röhl. ist meiner Meinung nach als Rest einer früheren Lamelle aufzufassen.

Den Schluß dieses Abschnittes möge die Aufzählung derjenigen Polytrichaceen bilden, deren Blätter Lamellen nicht hervorbringen. Es sind Pogonatum macrophyllum D. et M., Racelopus pilifer D. et M.,[1]) Oligotrichum minutum C. M.[2]) und Pogonatum marginatum Mitt.[3])

---

[1]) Nach Engler-Prantl, Die Natürl. Pflanzenfamilien. Liefg. 23.
[2]) Ibid. Liefg. 222, pag. 675.
[3]) Ibid. Liefg. 222, pag. 690.

Entwicklung des Blattes bzw. der Lamellen der Polytrichaceen.

Soweit ich die über diesen Gegenstand veröffentlichte Literatur zu übersehen imstande bin, finden sich die ersten Angaben über das Blatt und die Lamellen der Polytrichaceen in der schon oben zitierten Abhandlung von Karl Müller „Über die Lamellen des Laubmoosblattes“.[1] Nach diesem Forscher vollzieht sich die selbständige Lostrennung der Blätter von der Stengelsubstanz nie gleichmäßig am ganzen Blatte, „vielmehr löst sich an der Mittelfläche desselben, wo sich der Nerv bildet, eine ganze Reihe von Zellen mit ab, welche aus der Blattsubstanz hervorragen“. Wir wissen heute, daß die Entwicklung des Polytrichumblattes einen ganz anderen als den von Müller geschilderten Verlauf nimmt, und was dieser über die Evolution der Lamellen von Polytrichum und die Zellfäden von Barbula membranifolia Schultz mitteilt, ist zum Teil so unvollständig, verworren und unzutreffend zugleich, daß es nicht der Mühe lohnt, hier näher darauf einzugehen. Müllers Bedeutung lag eben nicht in der Fähigkeit, morphologische und entwicklungsgeschichtliche Fragen zu behandeln, seine Stärke bekundete er vor allem auf dem Gebiete der Systematik, worin er zweifelsohne Hervorragendes geleistet hat.

Zwanzig Jahre später hat P. G. Lorentz[2]) in seiner Publikation „Studien über Bau und Entwicklungsgeschichte der Laubmoose“ die Entwicklung des Polytrichumblattes in einer für jene Zeit mustergültigen Form dargelegt. Mechanische Hilfsmittel vielerlei Art, die uns heute die Arbeit wesentlich erleichtern, standen Lorentz nicht zur Verfügung, um so mehr muß man sich über die verhältnismäßig große Selbständigkeit der entwicklungsgeschichtlichen Angaben wundern. Auch heute vermag oft die geschickteste Hand nur selten mit dem Rasiermesser einen wirklich brauchbaren Querschnitt durch die Endknospe des Polytrichumstämmchens herzustellen, in den meisten Fällen legen sich die jüngsten Blattanlagen zur Seite, so daß auch der gewissenhafteste Beobachter leicht das Opfer einer Täuschung werden kann. Durch die schiefe Lage der jüngsten Blattanlagen nämlich, besonders wenn der Schnitt nicht außerordentlich dünn ist, entstehen im Gesichtsfeld doppelte Konturen, die einer und derselben Wand angehören. Man glaubt dann oft, einen weiteren Entwicklungszustand vor sich zu haben, weil sich die Zahl der Konturen verdoppelt hat.

Manche Übelstände lassen sich jedoch bei Benutzung des Mikrotoms beseitigen; es können damit so dünne Querschnittslamellen hergestellt werden, daß eine Neigung derselben zur Seite und die Entstehung doppelter Konturen zur Unmöglichkeit wird, besonders wenn durch Unterlegen von Deckglassplittern der Druck des Deckglases nicht zur Geltung gelangen kann. Aber auch das Mikrotom versagt und führt uns auf Irrwege, wenn nicht auf die Lage der in der Stämmchenspitze vereinigten Blätter gebührend Rücksicht genommen wird. Es will mir scheinen, als ob dieser Punkt von vielen, z. B. auch von Lorentz, nicht genügend beachtet worden wäre. Fig. 8 stellt einen Längsschnitt durch die Stämmchenspitze einer Polytrichumart dar. (t Scheitelzelle.) Die jüngsten Blätter (a, b, c) bilden einen niedrigen, ziemlich stumpfen Kegel, seine Höhe wächst, er wird um so spitzer, je mehr wir uns den äußeren (d, e, f, g) bzw. älteren Blättern zuwenden. Wenn wir unmittelbar

---

[1]) Linnaea, 1844, S. 104, Mit 1 Tafel.

[2]) P. G. Lorentz. Moosstudien, 1864, I, S. 22—25.

über der Scheitelzelle t einen Querschnitt — senkrecht zur Achse des Stämmchens — durch die Sproßspitze herstellen, so lehrt ein Blick auf Fig. 8, daß in diesem Falle Bilder entstehen müssen, die kaum zu deuten sind.

Die jüngsten Blattanlagen werden zunächst, wie auch Lorentz richtig angibt, durch Aufführung antikliner Membranen in eine größere oder geringere Anzahl von Zellen zerlegt. Darauf kommt es zur Entstehung von Membranen, welche die Bildung der Blattrippe einleiten. In meiner Inaugural-Dissertation „Beiträge zur Anatomie und Biologie der Laubmoose“ (München, 1894), hatte ich bei Gelegenheit der Schilderung der Entwicklungsgeschichte des Blattes von Leucobryum vulgare Hmpe. und Octoblepharum albidum und Arthrocormus Schimperi auf die Tatsache hingewiesen, daß die Aufführung der Membranen zu beiden Seiten der Mediane des Blattes beider Arten streng von den Gesetzen der Symmetrie beherrscht wird. Ich hoffte nun, Ähnliches auch für die Blätter von Polytrichum nachweisen zu können, mußte mich aber von dem geraden Gegenteil überzeugen. Es ergab sich die Unmöglichkeit, Rippe und Lamina auf ganz bestimmte Zellen der jüngsten Blattanlagen zurückzuführen, was auch Lorentz hervorhebt. Schon in der Blattanlage und in allen Teilen einer solchen macht sich nämlich die Asymmetrie in der Entstehung von Membranen bemerkbar. Wie Fig. 9 zeigt, werden im obersten Teil eines jungen Polytrichumblattes zunächst nach erfolgter Fächerung durch antikline Membranen (a) mehrere perikline Wände (b) gebildet; wir sehen aber außerdem, daß noch eine antikline Wand (c) hinzugekommen ist, woraus hervorgeht, daß auch noch nachträglich antikline Membranen eingefügt werden können. Lorentz[1]) dagegen vermutet, daß „alle die Zellen, aus denen später die (der Zahl nach in den verschiedenen Blättern wechselnden) charakterisierten Abteilungen gebildet werden sollen, auf diese Weise vorher angelegt werden, ehe in einer der so gebildeten Zellen eine Weiterentwicklung eintritt“. Die Lage der Wände, wie sie aus Fig. 10 ersichtlich ist, — es handelt sich um einen etwas tiefer geführten Schnitt desselben jugendlichen Blattes — läßt sehr gut erkennen, daß die rechte Hälfte mehr gefördert ist als die linke. In Fig. 11, die über die Verhältnisse eines Querschnitts durch den basalen Teil eines jungen anderen Blattes orientiert, macht sich eine auffällige Förderung der linken Blatthälfte geltend. Bei Fig. 10 sind im rechten Blattflügel, mit Fig. 9 verglichen, nicht weniger als vier Membranen hinzugekommen, denen nur eine einzige (a) im linkel Flügel gegenübersteht. In der linken Blatthälfte von Fig. 11, die als die geförderte anzusehen ist, befinden sich von dem mittleren Zellenzug (5 Zellen) ab gerechnet, 21 Zellen, im linken dagegen eine Zelle weniger. Diese

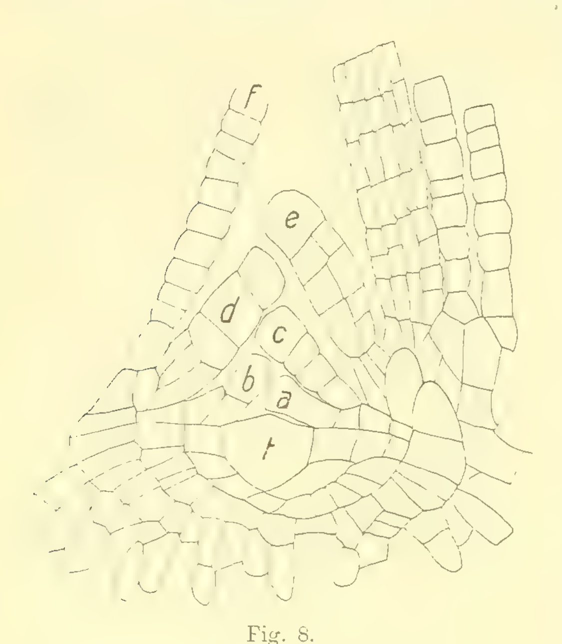


Fig. 8.

[1]) Studien über Bau und Entwicklungsgeschichte der Laubmoose. S. 22, Taf. 4, Fig. 3.

Asymmetrie ist auch stets in fertigen Blättern leicht festzustellen. Studiert man die Entwicklungsgeschichte der Sklerenchymplatten, so kann man schon bei den jüngsten Stadien derselben die asymmetrische Anordnung der Membranen nachweisen. Fig. 12 führt uns die ersten Entwicklungsstadien der ventralen Sklerenchymplatte von Polytrichum piliferum Schreb. vor Augen. Wir sehen, daß zunächst durch perikline Wände die ventralen, schon im jüngsten Entwicklungszustand des Blattes vorhandenen Zellen (1 + 2 + 3 + 4), über

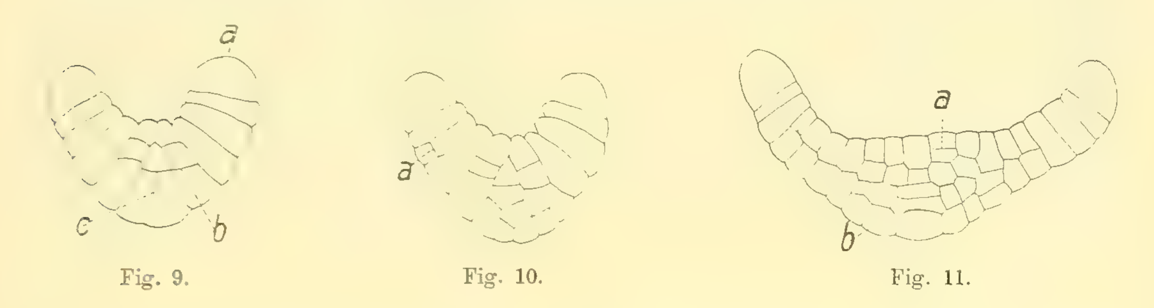


Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

denen die jugendlichen Lamellen d stehen, geteilt werden; die Zelle 1 + 2 + 3 + 4 zerfällt durch die periklinen Membranen a—b (Fig. 13) in die Zellen 1 und 2 + 3 + 4. Alsdann kommt es wieder zur Bildung antikliner Wände (c) in den beiden nach der Rückenseite des Blattes hin gelegenen Zellen 2 + 3 + 4. Bis hierher ist die Symmetrie nach jeder Richtung hin gewahrt. Im weiteren Verlauf der Entwicklung jedoch macht sich die asymmetrische Membranbildung bemerkbar, denn die periklinen Wände e entstehen nicht in den

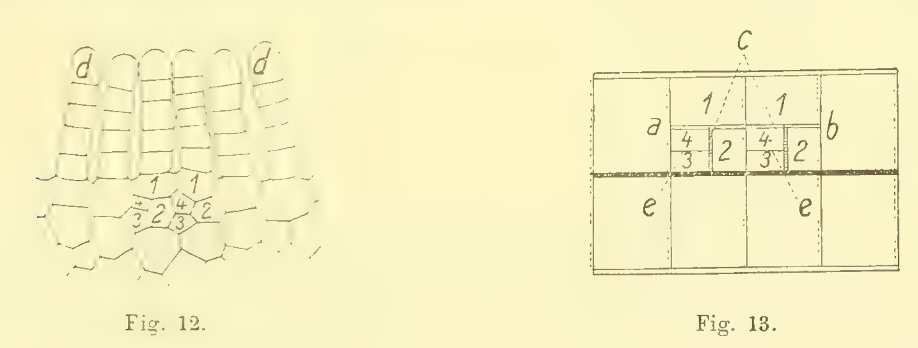


Fig. 12. Fig. 13.

beiderseits der Mediane liegenden Zellen 2 und 3 + 4, vielmehr findet in der von der Symmetrielinie nach links gelegenen Zelle 2 die Aufführung der periklinen Wand e nicht statt, sondern in der an die Zelle 2 nach links anstoßenden Zelle 3 + 4, wodurch die seither bestehende Symmetrie aufgehoben wird.

In Fig. 13 habe ich der Deutlichkeit halber den Verlauf der Entwicklung schematisch dargestellt. die gleichwertigen Membranen sind durch gleichartige Linien kenntlich gemacht.

Es ist nun überraschend, zu sehen, wie das junge Blatt, obwohl es andauernd im Verlauf seiner Entwicklung von den Gesetzen der Symmetrie in der Ausbildung neuer Membranen abweicht, trotzdem zähe an der symmetrischen Aufführung neuer Wände festzuhalten sucht.

Wie schon oben erwähnt wurde, wird ein jedes Segment der Scheitelzelle, das bei den Laubmoosen stets zu einem Blatte heranwächst, zunächst durch antikline Wände gefächert. (Fig. 9, 10, 11.) Darauf kommt es mit Ausschluß der äußersten Zellen, die zur einschichtigen Lamina werden, zur Entstehung perikliner Membranen (Fig. 11 u. 14.) Diesen Zug perikliner Wände habe ich in Fig. 14 mit den Buchstaben a—a bezeichnet. Wenn wir nun über die Symmetrieverhältnisse Aufschluß erhalten wollen, so müssen wir einen bestimmten Zellenkomplex, der in der Mediane des Blattes liegt, zum Ausgangspunkt unserer Betrachtungen machen. In Fig. 14, die ein schematisches Abbild von Fig. 11 darstellt, gibt der Pfeil die Mediane des Blattes an. Von diesem Zellenkomplex ab gerechnet sind durch die primären periklinen Wände (a) nach rechts fünf, nach links sechs Zellen abgeschnitten worden, so daß im rechten Blattflügel vier, im linken dagegen drei Zellen unzerlegt bleiben. Diese durch den Membranzug a—a geteilten Elemente werden zur Rippe, die später die beiden Sklerenchymplatten und eventuell auch die sogenannte intermediäre Zone

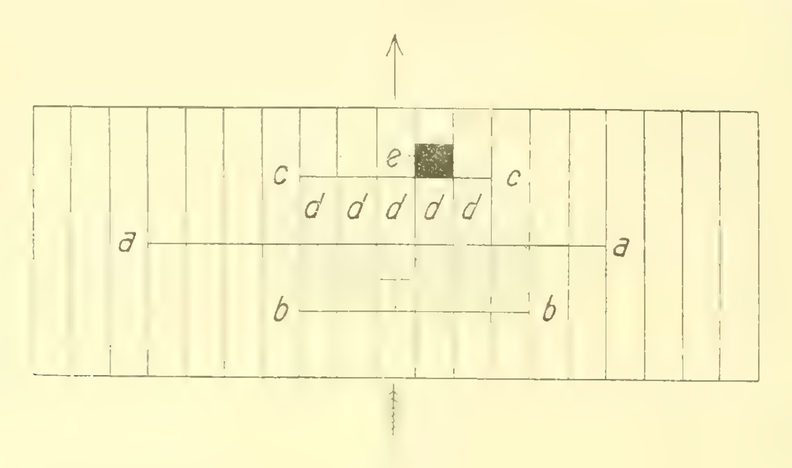


Fig. 14.

(Polytrichum commune L., Humboldtianum Hampe, Lyellia crispa Hook. u. a.) umfaßt. Wir sehen, daß schon auf einer sehr frühen Entwicklungsstufe des Blattes die Symmetrie in der Anordnung der Membranen gestört ist. In der weiteren Entwicklung des Blattes eilt nun die umfangreichere dorsale Sklerenchymplatte in der Ausbildung der ventralen voraus. Die Entstehung beider Platten ist an die Aufführung neuer perikliner Wände gebunden. Diese zerlegen einen Teil der zuvor durch den Membranzug a—a geteilten primären Zellen noch ein Mal, so daß wir beiderseits der Mediane mehrere vierteilige Zellkomplexe zählen können. Auffällig ist nun, daß der perikline Membranzug b—b, von der Mediane aus betrachtet, rechts eine Zelle mehr teilt als links, dagegen gehorcht der Membranzug c—c wieder den Geboten der Symmetrie. Der Membranzug b—b springt also nach rechts um denselben Betrag mehr vor als a—a nach links, und hierdurch wird gleichsam die frühere Asymmetrie wieder zur Symmetrie erhoben. Mit der Aufführung der periklinen Wandzüge b—b und c—c nimmt auch die Bildung der Sklerenchymplatten ihren Anfang, wenn auch damit nicht behauptet werden soll, daß alle dadurch entstandenen Zellen zur Sklerenchymplatte selbst werden. In Fig. 11 bezeichnet die perikline Wand a den Anfang der ventralen Platte,

die betreffende Membran liegt asymmetrisch in der rechten Blatthälfte. (In Fig. 14 ist e die erste Zelle der ventralen Platte.) Die antikline Membran b in Fig. 11, die eine der fünf in der Symmetrielinie des Blattes liegenden Zellen teilt, setzt sich nicht, wie es die Symmetrie verlangen würde, in der Mediane an die beiden periklinen Wände an, sie zerlegt vielmehr die betr. Zellen in zwei sehr ungleich große Teilzellen. Fig. 15α führt den Querschnitt durch ein in der Entwicklung etwas weiter fortgeschrittenes Blatt von Polytrichum piliferum Schreb. vor. Die ventrale Sklerenchymplatte, aus den Teilungen der Epidermiszellen entstanden, hebt sich scharf von dem übrigen Gewebe ab; auch sieht man sofort, daß das Blatt bzl. der Sklerenchymplatte eine Förderung nach der linken Seite hin erfahren hat. Das Mehr an Zellen auf diesem Blattflügel beträgt vier. (Punktierte Zellen.) Was die Lage der Membranen des ventralen Bündels anbelangt, so kann nicht bestritten werden, daß im Großen und Ganzen eine symmetrische Aufführung der Wände Regel ist, doch sind auch hier wieder deutlich Störungen wahrzunehmen. Einige wenige korrespondierende Membranen habe ich durch übereinstimmende Zahlen (1 1, 2 2, 3 3) gekennzeichnet. Die schematische Fig. 15β enthält alle durch die Symmetrie geforderten Wände. Von diesen sind a, b und c in Fig. 15α nicht vorhanden. Die ventrale Sklerenchymplatte entsteht also nicht in der Weise, daß die Epidermiszellen, über denen die Lamellen stehen, voneinander unabhängig durch Membranen zerlegt werden, vielmehr sind alle in ungefähr gleicher Entfernung von der Mediane vor sich gehenden Membranbildungen, die zu einer und derselben Epidermiszelle gehören, abhängig von unbekannten Einflüssen, deren Wirkung aber deutlich in Erscheinung tritt.

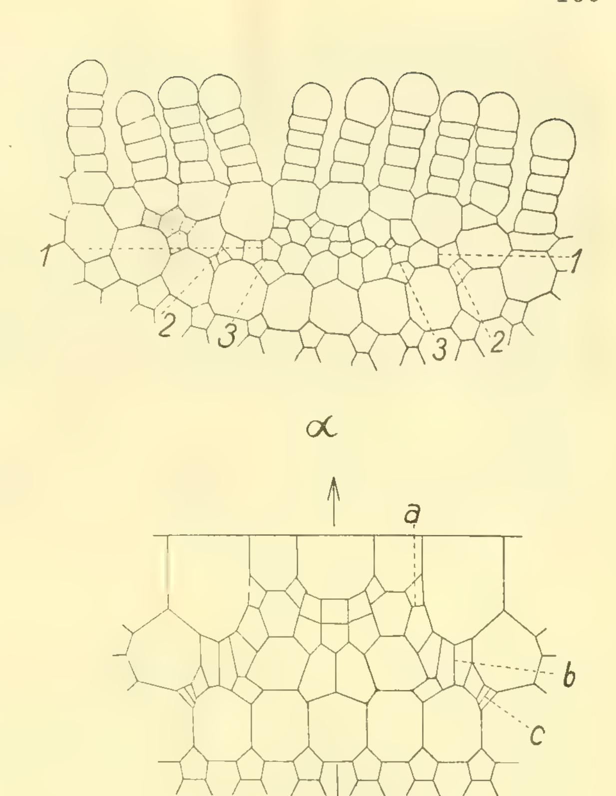


Fig. 15.

Auf dem Querschnitt der Blätter fast aller Polytrichaceen treten drei Zellenzüge — bei Dawsonia superba Grev. und Pogonatum macrophyllum D. et M. u. e. a. sind es einige mehr — durch ihr größeres Lumen aus dem übrigen Gewebe scharf hervor. Der mittlere Zug, an den sich seitlich die Epidermiszellen der ventralen Blattseite anschließen, umfaßt die sogenannten „Deuter“.[1]) Im jugendlichen Blatt werden diese „Deuter“ schon sehr früh

[1]) P. G. Lorentz, Grundlinien zu einer vergleichenden Anatomie der Laubmoose. Pringsheims Jahrb. 1867—1868, S. 374—378.

durch perikline Membranen abgeschnitten, im ausgewachsenen Blatt ist es aber nicht mehr möglich, die sogenannte „Zentralzelle“ (Fig. 16), die auf Querschnitten durch junge Blätter durch ihre Gestalt von den übrigen „Deutern“ etwas abweicht und durch die man sich die Mediane des Blattes gelegt denken muß, als solche zu erkennen. Auf Querschnitten durch die Blätter beschreiben die „Deuter“ einen nach der Bauchseite des Blattes offenen Bogen, eine Zelle nähert sich also dem Rücken des Blattes am meisten, doch wäre es vollständig verfehlt, in dieser Zelle nun die sogenannte „Zentralzelle“ erblicken zu wollen. Wenn es sich im jugendlichen Blatte um eine ungerade Zahl von „Deutern“ handelt, fällt es meist nicht schwer, die „Zentralzelle“ zu finden. (Siehe Fig. 10 u. 12). Auf anderen Querschnitten indessen, wo eine gerade Zahl von „Deutern“ sich ermitteln läßt, kann diese „Zentralzelle“ nur durch Kombination nachgewiesen werden. Es ist aber, um die Entwicklung des Polytrichumblattes genau verfolgen zu können, durchaus notwendig, diese „Zentralzelle“ aufzusuchen, da man nur mit ihrer Hülfe den Nachweis führen kann, daß die asymmetrische Aufführung der Membranen Regel ist und daß ein Übergewicht auf einer Blattseite durch ein eben solches auf der anderen ausgeglichen wird.

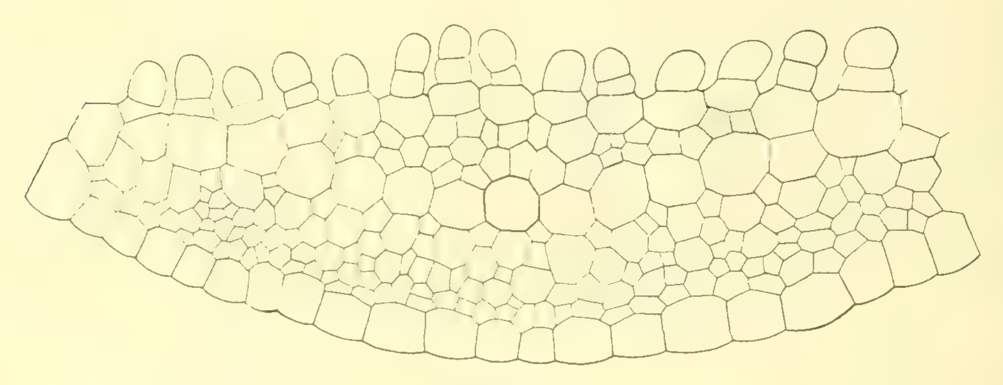


Fig. 16.

Lorentz behauptet, daß sich die „Zentralzelle“ durch eine (Taf. IV, Fig. 4) oder mehrere Wände teilen kann. „Dies scheint“, so schreibt er, „zuweilen individuell zu sein; bei einer Pflanze fand ich alle „Zentralzellen“ geteilt“. Demgegenüber bemerke ich, daß ich niemals eine Teilung der „Zentralzelle“ konstatieren konnte. Möglicherweise hat Lorentz die periklinen Wände, die zur Entstehung des ventralen Sklerenchymbündels Veranlassung geben, als weitere Teilungen der „Zentralzelle“ angesehen. Die Entwicklungsgeschichte lehrt aber, daß (siehe Fig. 12 u. Fig. 14) die ventrale Platte ihre Entstehung der Aufführung perikliner Wände verdankt, die in den über den „Deutern“ nach der Bauchseite des Blattes hin gelegenen Epidermiszellen entstehen.

Bei allen bisher genauer untersuchten Laubmoosen hat man an der Stämmchenspitze das Vorhandensein einer meist dreiseitig-pyramidalen Scheitelzelle festgestellt. Eine Ausnahme machen Fissidens, Phyllogonium und Distichium. (Ob für Distichium wirklich der Nachweis einer sogenannten zweischneidigen Scheitelzelle erbracht ist, vermag ich nicht zu entscheiden.) Aus jedem Segment der dreiseitig-pyramidalen Scheitelzelle geht ein Blatt

hervor, das mit einer zweischneidigen Scheitelzelle wächst. (Ausnahme Buxbaumia).[1]) Hoffmeister hat zuerst nachgewiesen, daß die Divergenz der Blätter, wenn sie nicht ein Drittel ist, durch das „Vorgreifen der Segmentwand in anodischer Richtung" bedingt wird. Von der Richtigkeit der Hoffmeister'schen Beobachtung habe ich mich an zahllosen Querschnitten durch die Stämmchenspitze vieler Polytrichaceenarten überzeugen können. Bei zahlreichen Arten aus dieser Familie sind die Blätter nach $^3/_8$ gestellt,[2]) obwohl sie, wenn die Segmente der Scheitelzelle streng parallel zu den Wänden derselben aufgeführt würden und sonstige Verschiebungen, die mit der Bildung des Stämmchens ohne Zweifel zusammenhängen, nicht einträten, die Divergenz $^1/_3$ zeigen müßten. Jenem Vorgreifen der Segmentwände in anodischer Richtung schreibe ich es zu, wenn sich in der Entwicklung der Blätter andauernd Abweichungen gesetzmäßiger Art von der symmetrischen Anlage neuer Membranen zeigen.



Fig. 17. Fig. 18.

In seltenen Fällen verrät auch die Ausbildung der Lamellen des fertigen Blattes mehrerer Polytrichumarten, daß sich bei der Blattentwicklung Einflüsse geltend machen, von denen wir annehmen müssen, daß sie mit den Symmetrieverhältnissen des Blattes in innigster Beziehung stehen. Ich denke an die auffällige Gestaltung der Endzellen der Lamellen von Polytrichum subremotifolium Hampe, die durchaus den Gesetzen der Symmetrie entspricht. Die Endzellen der beiderseits der Mediane des Blattes stehenden Lamellen besitzen eigenartige schnabelförmige Fortsätze, die in der rechten Blatthälfte nach rechts, in der linken nach links gerichtet sind. Nur die Endzelle der in der Mittellinie des Blattes angehefteten Lamelle ist symmetrisch gebaut. (Fig. 17 u. 18.) Leise Anklänge an diese bei der genannten Art so scharf hervortretende Symmetrie finden wir auch noch bei anderen Polytrichaceen. C. Müller hat eine ähnliche Ausbildung der Lamellenendzellen bei Pogonatum Olygodus Kunze beobachtet. Seine Arbeit „Über die Lamellen des Laubmoosblattes" bringt auf Taf. IV Fig. 17 ein Bild des Blattquerschnittes jener Art. Falsch an dieser Figur ist jedenfalls, daß die schnabelförmigen Fortsätze fast aller Endzellen nach derselben Seite, und zwar nach rechts gewendet sind; ich nehme an, daß dieser Querschnitt nicht dem Pogonatum Olygodus Kunze angehört, denn die Blätter von Exemplaren aus dem Berliner Herbar, die Müller selbst bestimmt hat, haben eine ganz andere Ausbildung der Lamellen.

Zahlreiche Polytrichaceenarten vom Typus unserer Polytrichum piliferum Schreb. wie Polytrichum nano-globulus C. Müll., pallidicaule C. Müll., Antillarum Rich., macrorhaphis C. Müll., aristiflorum Mich., brachypyxis C. Müll., aristatum Schpr., rhacomitrium C. Müll. und viele andere Arten haben die bei sehr zahlreichen Formen noch erhaltene Bewegungsfähigkeit des laminaren Teils ihrer Blätter fast vollständig eingebüßt. Im trockenen wie

---

[1]) C. Göbel, Organographie. II. Teil., I. Heft, S. 352 u. 353.

[2]) P. G. Lorentz, Studien über Bau und Entwicklungsgeschichte der Laubmoose. S. 20.

im turgeszenten Zustand sind die meist sehr gut ausgebildeten einschichtigen Blattsäume der genannten Arten nach oben umgeschlagen, bei manchen Spezies, wie Polytrichum macrorhaphis C. Müll., brachypyxis C. Müll. und aristiflorum Mich. greifen die Ränder im oberen Teil des Blattes ziemlich weit übereinander, in der Regel klafft aber zwischen beiden Rändern ein schmaler Spalt, der sich längs der Mitte des Blattes hinzieht. Besitzen nun die Blätter schon im jugendlichen Zustand diese Ausbildung oder verlieren die Laminarteile erst später ihre Bewegungsfähigkeit? Die Untersuchung ergab, daß die Blätter schon sehr früh mit den nach oben umgeschlagenen Rändern ausgestattet sind, zu einer Zeit schon, wo die Endzellen der Lamellen z. B. bei Polytrichum piliferum Schreb. noch nicht die eigentümlichen hyalinen, flaschenförmigen apikalen Wandverdickungen aufweisen. (Fig. 19. c = Zentralzelle. Über dieser nach der Bauchseite des Blattes hin vier punktierte Zellen, aus den ventralen Epidermiszellen entstanden, als Anfang des bauchständigen Sklerenchymbündels).

Alle Polytrichaceen können, wenn die Zahl der Lamellenendzellen zum Einteilungsprinzip erhoben wird, in zwei Kategorien untergebracht werden: Die erste umfaßt die weitaus größte Anzahl von Arten, es gehören zu ihr alle Formen, deren Lamellen in eine einzige Endzelle auslaufen, in die zweite Kategorie, die verhältnismäßig wenige Spezies umfaßt, — Polytrichum flexuosum C. Müll., Humboldtianum Hampe, purpurascens Hampe, rufisetum Wils., Pogonatum microstomum Br. Eur. u. a. — stelle ich diejenigen Arten, bei denen die Lamellen einen höheren Grad der Organisation durch Verdoppelung ihrer Endzellen erreichen. Wie es scheint, besteht zwischen der Höhe und der sonstigen Ausbildung der Lamellen eine überall zu beobachtende Korrelation. Bei Polytrichum Humboldtianum Hampe (Fig. 20), dessen Lamellen in ihrem einschichtigen Teil meist aus nur zwei Zellen bestehen, erlangen, soweit meine Beobachtungen reichen, die Endzellen der Lamellen den höchsten Grad der Ausbildung insofern, als hier oft die beiden letzten Zellen eine Verdoppelung erfahren. Auch die Lamellen der übrigen Arten gehören zu den niedrigsten, die ich bei Polytrichaceen vorfand. Die wassersaugende und wasserhaltende Kraft der Lamellen nimmt ohne Zweifel in demselben Maße ab, wie die Zahl der sie zusammensetzenden Zellen sich vermindert; es ist also wohl leicht denkbar, daß die stärkere Ausbildung der Endzellen einen Ausgleich herbeizuführen imstande ist. Bei Polytrichum rufisetum Wils. besteht der einschichtige Teil der Lamellen meist aus zwei, seltener drei Zellen, in den Seitenpartieen ist oft nur eine Fußzelle vorhanden, bei Polytrichum flexuosum C. Müll. (Fig. 21 a u. b) finden wir im mittleren Teil des Blattes in der Regel drei, nach den Seiten hin zwei, nach den Rändern meist nur eine Zelle, ähnliche Verhältnisse gelten für Pogonatum microstomum Br. Eur. (Fig. 22.)

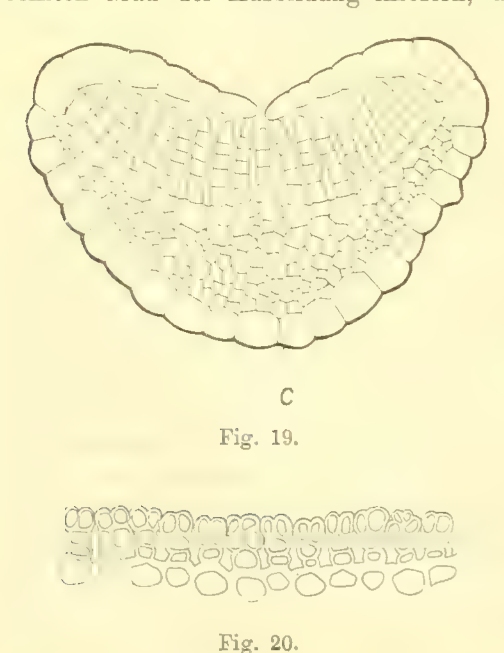


Fig. 19.

Fig. 20.

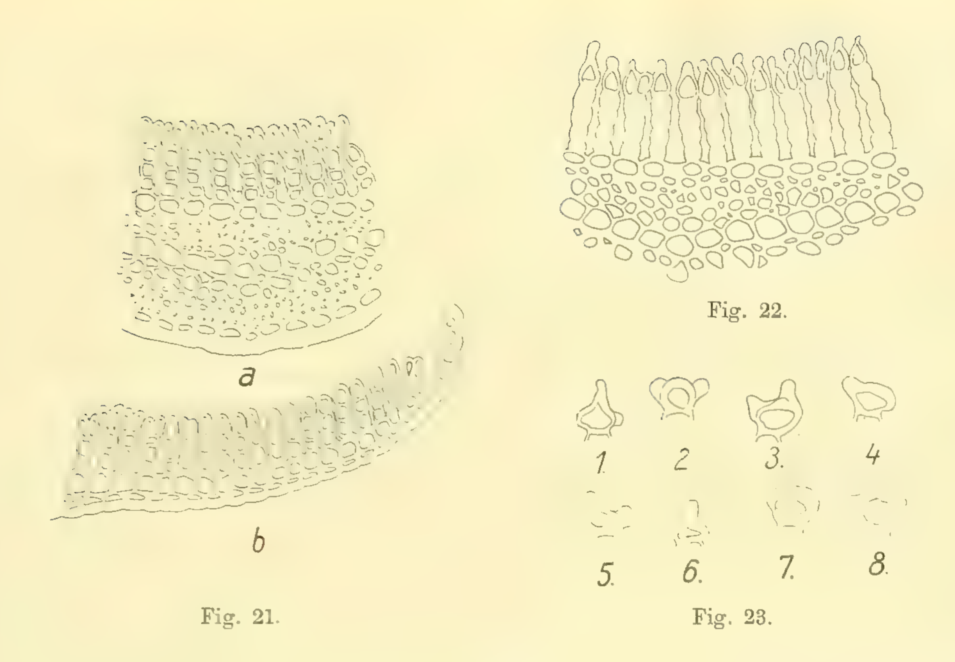


Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23.

Mit der Verdoppelung der Endzellen, wodurch eine sehr bedeutende Verdickung des Lamellenrandes hervorgebracht wird, steht aber noch eine andere, für das Leben, bzw. die Wasserversorgung der fraglichen Arten sehr wertvolle Einrichtung im Zusammenhang. Die verdoppelten Endzellen springen, wie auf Querschnitten sehr deutlich zu erkennen ist, um ein Bedeutendes nach den Seiten vor; die Folge davon ist, daß die Zellflächen ziemlich weit auseinander rücken, und dieser Umstand bewirkt wieder, daß in den relativ großen Zwischenräumen nicht unerhebliche Mengen Wasser festgehalten werden können. Die genannten Arten besitzen im Verhältnis zur Höhe der Lamellen tatsächlich die größten Hohlräume: was ihnen also durch ihre sonstige geringere Größe an der Fähigkeit abgeht, größere Wassermengen zu speichern, das ersetzen sie in vortrefflicher Weise durch die Ausbildung großer interlamellöser Hohlräume. (Fig. 20 u. 22.)

Es darf ohne Übertreibung behauptet werden, daß bei den meisten Polytrichaceen die Größe der Hohlräume zwischen den Lamellen abhängig ist von der Beschaffenheit der Lamellenendzellen. Je mehr sich diese durch ihre Größe, besonders aber ihre Breite von den übrigen Zellen der Lamellen unterscheiden, desto größer sind die Entfernungen zwischen je zwei Lamellen und die von diesen geschaffenen Hohlräume.

Was den feineren Bau der Endzellen betrifft, so herrscht bei den zahlreichen Formen eine Mannigfaltigkeit, wie man sie sich kaum größer vorstellen kann. Der einfachste Fall liegt vor, wenn die Endzellen, wie es für Catharinaea undulata und sehr zahlreiche andere Polytrichaceen zutrifft, mit den übrigen Lamellenzellen übereinstimmen. Dem kompliziertesten Bau begegnen wir bei Polytrichum nano-globulus C. Müll., dessen Endzellen außer der bei xerophilen Arten vorhandenen flaschenförmigen hyalinen Anfügung noch seitliche Emergenzen an letzterer hervorbringen. (Fig. 23 1—8.) Beide Extreme können als Anfangs- und Endpunkte einer Linie aufgefaßt werden, auf der zahlreiche Zwischenglieder den Übergang vom einfachsten zum verwickeltesten Stadium vermitteln. Eine solche

Reihe hier aufzustellen und in ihren einzelnen Gliedern bildlich vorzuführen, gestattet der zur Verfügung stehende Raum nicht.

Es dürfte sich aber trotzdem empfehlen, diesem Gegenstand noch eine kurze Besprechung zu widmen.

Bei den Catharinaea-Arten, die ich untersuchte, sind alle Membranen der Lamellen, auch die der Endzellen, von gleicher Dicke. (Fig. 33 1.) Die Arten dieser Gattung dürfen wir zu den ausgesprochen hygrophilen rechnen, die einheimischen Spezies kommen ausschließlich an feuchten und in der Regel schattigen Plätzen vor, dementsprechend ist auch die Zahl der wenig hohen Lamellen gering. (3—8.) Bei den meisten Polytrichaceen aber, so darf behauptet werden, sind die Wände der Lamellenendzellen ihrer Aufgabe entsprechend mehr oder weniger verdickt. Der Unterschied zwischen Endzellen und den übrigen Elementen der Lamellen tritt z. B. bei Polytrichum brachypelma C. Müll. (Fig. 33 2) sehr gut hervor. Eine weitere Komplikation besteht darin, daß die verdickten Wände der Endzellen eine nochmalige Anfügung in Gestalt hyaliner Massen erhalten. So bei Polytrichum alpinum Dill. (Fig. 33 8), einer durchaus xerophilen Art; der obere Teil der Endzellenwand ist ungemein stark verdickt, außerdem aber noch durch sehr zahlreiche Körnchen hyaliner Art verstärkt. Auf mehr glatte hyaline Massen stoßen wir bei den zum Typus des Polytrichum piliferum Schreb. gehörigen Formen. (Fig. 24 links.) Diese hyalinen Anfügungen und stark verdickten Membranen sind deutliche Anzeichen von Xerophilie; es gestattet also die Anatomie der Lamellen einen Rückschluß auf die Beschaffenheit der Örtlichkeiten, an denen die zugehörigen Arten vorkommen. Göbel bildet in Heft 1, Flora 1906, Seite 17, die Lamellen von der mir unbekannten Dawsonia longiseta ab und bemerkt, daß sie trockenere Stellen als Dawsonia superba bewohnt. In der Tat stimmt jene Art in der Ausbildung der Lamellen, besonders deren Endzellen fast ganz mit jenen Formen überein, deren Xerophylie außer Zweifel steht, die ich zum Typus des Polytrichum piliferum Schreb. rechne.

Auf einen Punkt möchte ich noch besonders aufmerksam machen. Man beobachtet, daß die Endzellen der Lamellen bei zahlreichen Polytrichaceen im Laufe ihrer Entwicklung von oben her eine Einknickung bzw. Einbuchtung erfahren, wodurch eine an der oberen Kante der Lamelle verlaufende Rinne hervorgebracht wird. Unser häufiges Polytrichum commune L. (Fig. 339) besitzt solche Endzellen. Andere Arten mit derartiger Ausbildung der Endzellen sind Polytrichum subpilosum P. B., Buchanani Broth., Preussii Broth. und longissimum C. Müll. Von sehr wechselnder Gestalt sind diese Einknickungen bei Polytrichum robustum C. Müll., wie die sechs Endzellen Fig. 33, 13 beweisen. Eine solche Furche muß sich in eine große Zahl kleiner, niedriger, wannenartiger Behälter auflösen, wenn die Querwände der Lamellenendzellen nach oben ebenso hoch wie ihre Seitenwände vorspringen. Eine derartige Einrichtung fand ich bei dem fraglichen Polytrichum Olygodus Kunze.

Was wird durch diese Einrichtung erreicht? Erstens ausnahmslos eine Verbreiterung der Endzelle selbst, beide Seitenwände werden voneinander entfernt und wirken räumlich genau so wie die Doppelendzellen. Zweitens dient diese Furche zur Aufnahme von Wasser, das von hier aus langsam in die Zellen eindringen kann: Drittens ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß sie für sich oder mit Wasser erfüllt wie eine Linse wirken, durch die das Licht nach allen Richtungen zerstreut wird, so daß es auch zu den tiefer liegenden Teilen der Lamellen gelangt; ich bin von dieser Wirkungsweise fest überzeugt

Was hier bezüglich der Endzellen ganz allgemein gesagt wurde, gilt im besonderen auch von den Arten mit den komplizierteren Doppelendzellen der Lamellen; es muß jedoch hinzugefügt werden, daß sich bei diesen eine solche an Zwischengliedern reiche Reihe, da die Lamellen von nur wenigen Polytrichaceen doppelte Endzellen besitzen, nicht aufstellen läßt. Polytrichum Humboldtianum und Pogonatum microstomum Br. Eur. könnten als Anfangs- bzw. Endglied der Reihe gelten.

Wie ich schon früher hervorhob, sprach Treviranus die — übrigens richtige — Vermutung aus, es möchte sich bei den Lamellen der Polytrichaceen um Vorrichtungen handeln, die dazu dienen, Feuchtigkeit aufzusaugen und festzuhalten, wogegen C. Müller eine Art Ablagerungsstätte, eine Art Schutthaufen für überflüssigen Nahrungssaft darin erblickte. Später deutete man die eigenartigen Zellplatten als Verstärkung des Assimilationssystems; Göbel[1]) wies jedoch darauf hin, daß ihre Aufgabe wohl darin bestehe, Wasser kapillar festzuhalten, da ohne letzteres die Assimilation nicht vor sich gehen könne. Es steht für mich fest, daß die Lamellen in erster Linie der Wasseraufnahme und Wasserspeicherung dienen und daß das assimilatorische Moment erst an zweiter Stelle in Betracht kommt. Die beste Stütze für die Richtigkeit der Auffassung von Treviranus, Göbel und mir finde ich in den festen Beziehungen, die sich zwischen dem anatomischen Aufbau der Blätter einerseits und dem Standorte der in Frage kommenden Arten anderseits nachweisen lassen. Wir dürfen erwarten, daß z. B. Formen, deren Vorkommen an sonnige, trockene Stellen gebunden ist, in dem Aufbau der Blätter und besonders der Lamellen sich wesentlich von denjenigen Arten unterscheiden, die an feuchten und schattigen Stellen wachsen. Die anatomischen Untersuchungen täuschen unsere Erwartungen nicht, wir vermögen die zu schildernden Einrichtungen nur als funktionelle Anpassungen aufzufassen.

„Wir können es einer Pflanze direkt ansehen, ob sie in der Natur trockene oder feuchte Standorte bewohnt, aber nicht, ob sie der Flora eines kalten oder warmen Klimas angehört", sagt Schimper[2]) mit Recht, und dies gilt auch für die Polytrichaceen mit der Einschränkung, daß ein oberflächliches äußeres Anschauen bei diesen weniger hochstehenden Pflanzen nicht ausreicht, sondern stets durch die Erforschung der inneren Verhältnisse ersetzt werden muß.

Schimper unterscheidet zwei große ökologische Klassen, die Hygrophyten und Xerophyten, und schiebt als minder scharf umgrenzte Gruppe zwischen beide die sogenannten Tropophyten ein, „deren Existenzbedingungen je nach der Jahreszeit diejenigen von Hygrophyten und Xerophyten sind."[3]) Zu den Tropophyten rechnet er die große Mehrzahl der Pflanzen unserer Flora. „Die Struktur der perennirenden Teile ist bei ihnen xerophil, die der nur während der nassen Jahreszeiten vorhandenen hygrophil." Diese dritte ökologische Klasse kommt für unsere Betrachtung sicher nicht in Frage, da die Polytrichaceen in ihren vegetativen Organen stets dasselbe Bild gewähren. Ich will nun versuchen, nachzuweisen, daß bei zahlreichen Polytrichaceen die Kenntnis der Struktur der Blätter uns in den Stand setzt, zu entscheiden, ob wir es mit einer hygrophilen oder xerophilen Art zu tun haben.

---

[1]) Flora, 1893, p. 430.

[2]) Schimper, Pflanzengeographie auf physiologischer Grundlage, p. 40.

[3]) Schimper, Pflanzengeographie, p. 5.

Zu den Polytrichaceen mit überraschend deutlich erkennbarer xerophiler Struktur rechne ich die Formen vom Typus unseres einheimischen Polytrichum piliferum Schreb., die ich bereits auf Seite 471 genannt habe.

Bei allen diesen Arten sind die verhältnismäßig sehr breiten einschichtigen Säume des Spreitenteils nach oben umgeschlagen, so daß die Rippe mit den aufstehenden Lamellen bis auf einen meist sehr schmalen Spalt von ihnen bedeckt wird, bei manchen Arten wie Polytrichum aristiflorum Mitt. und brachypyxis C. Müll. greifen die Blattsäume im oberen Teil des Blattes übereinander. Eine Analogie bieten einige Arten der Gattung Barbula, wie B. aloides B. et S., ambigua B. et S. und rigida Schultz. Es leuchtet ein, daß durch die beschriebene Einrichtung, obwohl keine Volumänderung eintritt, eine sehr bedeutende Verkleinerung der Oberfläche hervorgebracht wird, eine Folge hiervon ist zweifellos die Herabsetzung der Transpirationsgröße. Es kehrt hier eine bei den höheren Pflanzen längst als Schutzmittel gegen zu starke Transpiration bekannte Einrichtung, die des Rollblattes, wieder. Zudem sind die Wände der laminaren Blattteile dieser xerophilen Arten stark verdickt, besonders gilt dies von der dorsalen Seite.

Von den von mir untersuchten, sehr zahlreichen Polytrichaceen unterscheiden sich die genannten Arten vor allem durch die überaus kräftige Ausbildung der dorsalen Sklerenchymplatte, die das Blatt in seiner ganzen Breite durchzieht und auch den größten Teil der nichtlamellösen Spreitenpartie einnimmt. Vergleicht man einen Blattquerschnitt eines Polytrichum vom Typus des Polytrichum piliferum Schreb. mit einem solchen der drei Barbula-Arten, so glaubt man auf den ersten Blick, auch bei letzteren Querschnitte von Polytrichumblättern vor sich zu haben. Die in Betracht kommenden Polytrichum- und Barbula-Arten gehören zu den Xerophyten, die starke Entwicklung der sklerenchymatischen Elemente liefert den deutlichsten Beweis.

Für höhere Pflanzen ist experimentell nachgewiesen worden, daß, falls man bei verminderter Wasserzufuhr die Transpiration beschleunigt, in der Regel die chlorophyllführenden Palissadenzellen der Blätter eine Vergrößerung in der Richtung ihrer Längsachse erfahren. Ich glaube nun nicht zu weit zu gehen, wenn ich die Lamellen der Arten vom Polytrichum piliferum-Typus als ein Analogon zu den Palissadenzellen der Blätter höherer Pflanzen auffasse; abgesehen von der Aufgabe der Wasserspeicherung stehen die Lamellen im Dienste der Assimilation. Dieser Aufgabe können aber die Lamellen der in Betracht kommenden Polytrichaceenarten um so leichter gerecht werden, als sie die größten sind, die wir bei den Polytrichaceen antreffen. Die xerophile Struktur gibt sich also auch in der Organisation der Lamellen zu erkennen.

Noch in einigen anderen Punkten stimmen die Arten vom Typus des Polytrichum piliferum Schreb. überein. Die Endzellen der Lamellen der von mir untersuchten Arten haben nämlich alle dieselbe flaschenförmige hyaline Membranverdickung, die bei hygrophilen Formen niemals vorkommt; zwischen Blattbau im allgemeinen und der Ausgestaltung der Lamellenendzellen besteht also eine feste Beziehung. Breitet man ein Blatt von Polytrichum piliferum Schreb. z. B. ohne Druck des Deckglases auf dem Objektträger aus, so leuchten bei richtiger Anwendung des Spiegels die flaschenförmigen hyalinen Verdickungen als Punktreihen durch. Weiter verdient die eigentümliche Gestalt (Fig. 25), die Färbung der Membranen, sowie der geringe Gehalt an festen Bestandteilen im Innern der Zellen des laminaren Saumes hervorgehoben zu werden. Bei letztgenannter

Art sind die Zellen des Blattsaumes, die man mit einem Doppelfenster, das sich aus zahlreichen kleinen Scheiben zusammensetzt, vergleichen kann, wasserhell; betrachtet man ein turgeszentes Blatt von der Oberseite, so schimmert das grüne Lamellengewebe durch, sodass das Auge die über diesem liegenden Säume gar nicht sieht. Leicht nimmt das Licht seinen Weg durch die Säume in das Innere zu den Lamellen; nur wenige Körper — ob dieselben Licht überhaupt absorbieren, muß unentschieden bleiben — innerhalb der Saumzellen und die Membranen, die auch hell sind, könnten dem durchgehenden Licht sich hindernd in den Weg stellen, was aber kaum anzunehmen ist. Bei Verlust des Wassers verengt sich der Spalt zwischen den Säumen, indem die verdickten hyalinen und gewellten Ränder — das habituell sehr ähnliche Polytrichum nano-globulus C. Müll. stimmt darin mit P. piliferum überein — der laminaren Platten einander nähern; im lufttrockenen Zustand greifen Wellenberge und Wellentäler der Ränder z. T. lückenlos ineinander und stellen einen vorzüglichen Verschluß des Hohlraums an der Blattoberseite her, eine Einrichtung, die zweifellos eine übermäßige Verdunstung des vorhandenen Wassers zu verhindern imstande ist.

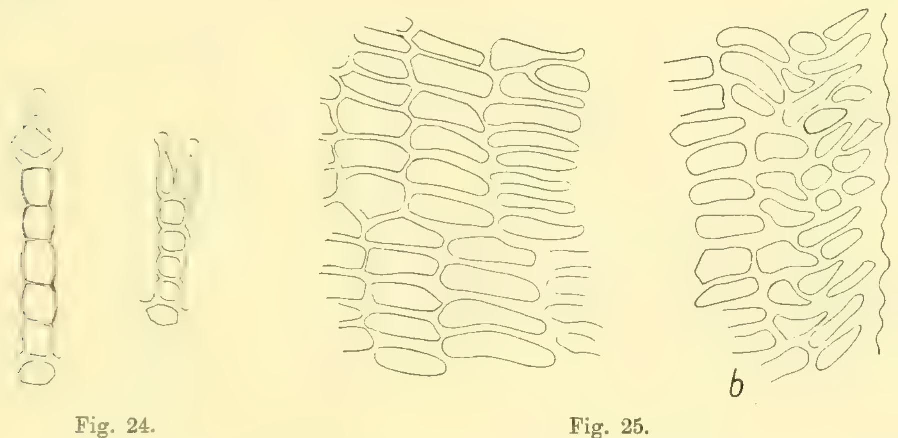


Fig. 24. Fig. 25.

Die Färbung der Membranen der laminaren Blattteile darf nicht als ein nebensächliches Moment angesehen werden. Bei Polytrichum brachypyxis C. Müll. erscheint das Gewebe im durchfallenden Licht hellbraun, ebenso bei Polytrichum rhacomitrium C. Müll. und P. nano-globulus C. Müll., bei P. pallidicaule C. Müll. hellgelb.

An Querschnitten durch die Blätter der genannten Arten fällt im Gegensatz zu zahllosen Polytrichaceen die ungewöhnlich dichte Stellung der Lamellen auf, größere Lücken zwischen diesen fehlen, nur vereinzelt begegnet man schmalen, spaltenförmigen Hohlräumen. Bei xerophilen Arten sollte man aber das gerade Gegenteil erwarten. Berücksichtigt man aber, daß diese Spezies die dicksten Blätter und höchsten Lamellen besitzen und daß sie über eine ganze Reihe vorzüglicher Einrichtungen zur Wasserspeicherung und Herabsetzung der Transpiration verfügen, so erweist sich die lockere Stellung der Lamellen als vollständig überflüssig.

Es ist kein Zufall, daß gerade unter diesen xerophilen Formen vom Typus des Polytrichum piliferum Schreb. sich einige befinden, deren Blätter eine wohlausgebildete hyaline Spitze, ein sogenanntes Glashaar, besitzen; solche Arten sind die letztgenannte und das in

bedeutender Höhe am Kilimandscharo vorkommende Polytrichum nano-globulus C. Müll. Derartige Glashaare finden wir bei Bryophyten, die an trockenen, sonnigen Plätzen vorkommen.[1] Wir dürfen annehmen, daß diese beiden Arten im Kampfe ums Dasein infolge äußerer Einwirkungen in den Besitz eines solchen Glashaares gelangt sind. Kultiviert man Polytrichum piliferum Schreb. in feuchter Luft, wie ich es getan, so kommen die Glashaare in Wegfall.

Die symbiotische Natur des Flechtenthallus ist längst erkannt und dürfte heute kaum noch einen ernsthaften Gegner finden. Bestimmte Algenarten, vor allem solche aus den Abteilungen der Schizophyceen und Chlorophyceen sind mit den Hyphen gewisser Asko- und Basidiomyceten zu einer Lebensgemeinschaft verbunden und setzen das Flechtenlager zusammen. Aber auch mit höheren Pflanzen gehen mehrere niedere Algenarten ein, wenn auch weniger inniges symbiotisches Verhältnis ein; das bekannteste Beispiel ist das der Anabaena Azollae, die man stets zwischen Ober- und Unterlappen der Blätter von Azolla caroliniana antrifft. Es ist nun nicht einzusehen, warum nicht auch in anderen Gruppen des Pflanzenreichs, z. B. bei den Bryophyten symbiotische Verhältnisse vorkommen sollen. In den Zwischenräumen der Lamellen sehr zahlreicher Polytrichaceen fand ich stets Algen, von denen die meisten wohl den Familien der Nostocaceen und Palmellaceen zuzuweisen sein dürften. Was mich aber in der Überzeugung bestärkt, daß es sich in vielen Fällen nicht um ein zufälliges Eindringen der in Frage stehenden Algen in die Hohlräume zwischen den Lamellen, sondern um eine wirkliche Symbiose handelt, ist die sicher von mir festgestellte Tatsache, daß die Lamellenhohlräume und die Oberseite der Blätter bei bestimmten Arten auch von ganz bestimmten Algenspezies bevölkert werden. Es handelt sich, soweit meine Beobachtungen reichen, stets um Algen, die eine Schleimhülle entwickeln. Dieser kommt bekanntlich in hohem Grade die Fähigkeit zu, Wasser zu speichern, das sie aber nur langsam wieder abgiebt. Welcher Vorteil für die kompliziert gebauten Blätter der Polytrichaceen sich aus dieser losen Verbindung ergibt, liegt klar auf der Hand. Bei Pogonatum microstomum Br. Eur. beobachtete ich an den Spitzen zahlreicher Blätter desselben Stämmchens größere, mit bloßem Auge deutlich wahrnehmbare, klumpenförmige Anhäufungen der Fäden einer Cyanophycee, die, innig miteinander verbunden, in eine große, durch Schleimmassen gebildete Gallerte eingebettet waren. (Fig. 26). Noch auffälliger ist die Erscheinung bei Polytrichum mahense Besch., dessen Blätter, von der Seite betrachtet, wie mit Fransen eingefaßt erscheinen. In diesem Falle handelt es sich um eine außerordentlich zarte Oscillarie, deren Fäden in ungeheuerer Anzahl die Lamellenzwischenräume und die Oberseite der Blätter bewohnen. (Fig. 27. Siehe auch das bei stärkerer Vergrößerung gezeichnete Stück eines Blattes der letztgenannten Art. Fig. 28.) Bei Pogonatum Junghuhnianum Dozy et Molkboer und e. a. bildeten die Algenfäden an der Oberfläche der Lamellen mit ihren Schleimhüllen ebenfalls eine zusammenhängende Decke, die man für sich mit der Nadel abheben konnte. (Fig. 29.)

Über die bei Verlust des Wassers eintretenden Schrumpfungs- und Bewegungserscheinungen der Blätter mehrerer Polytrichaceen, wie Dawsonia superba Grev. und Polytrichum piliferum Schreb. habe ich im Band 96 Heft 3 der Zeitschrift „Flora“ ausführliche

[1] C. Göbel, Organographie. Teil II, Heft I, Bryophyten, p. 368 und Lorch, Beiträge zur Anatomie und Biologie der Laubmoose. Flora, 1894, p. 39.

und, wie ich glaube, auch ausreichend erklärende Mitteilungen veröffentlicht. Bei Dawsonia superba Grev. wird das Blatt meist von drei, selten von vier Sklerenchymplatten durchzogen. An Ausdehnung nehmen diese Platten von der Rücken- nach der Bauchseite allmählich ab. Beobachtet man einen Blattquerschnitt unter dem Mikroskop in dem Augenblick, wenn er sein Wasser verliert, so kann man mit Leichtigkeit feststellen, daß diese sklerenchymatischen Stränge infolge ihrer starken Zusammenziehung einen Zug nach den Flügeln des Querschnittes und nach der ventralen Linie desselben ausüben. Alle Stränge kontrahieren sich nach der Symmetrielinie des Schnittes, und es hat den Anschein, als ob ein System von Gummibändern, deren Enden in der Mediane befestigt sind, mit ihren freien Enden die übrigen Teile des Querschnittes nach dem mittleren Teile desselben hinzögen. Die Lumina der weiteren Zellen der Sklerenchymplatten werden, sobald die Kontraktion der letzteren vor sich geht, gestaltlich bedeutend verändert. Aber auch die übrigen weitlumigen Elemente nehmen an der Gestaltveränderung teil und erfahren eine Streckung in der Richtung, in der die Kraft wirkt. Die transversalen Bewegungen des Blattes von Dawsonia superba Grev. sind also lediglich auf das Verhalten der Sklerenchymplatten zurückzuführen.

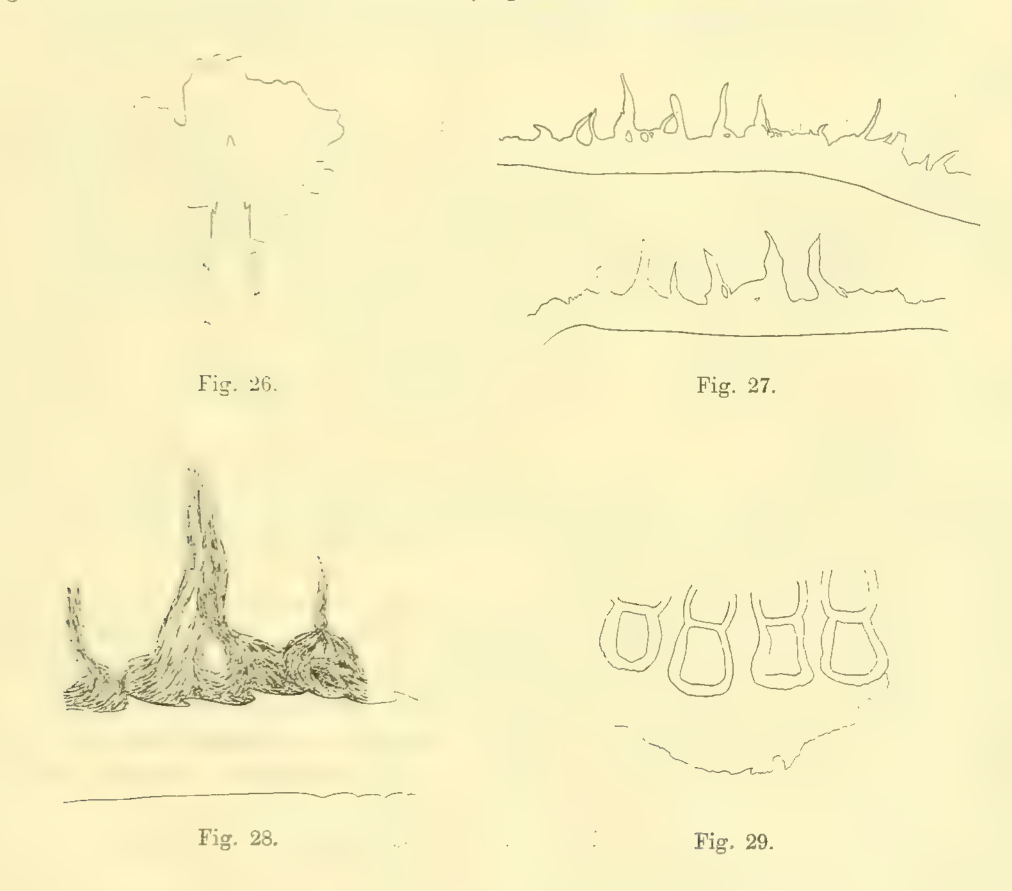


Fig. 26. Fig. 27.

Fig. 28. Fig. 29.

Bei Polytrichum piliferum Schreb. und vielen exotischen Arten, wie P. aristiflorum Mitt., brachypyxis C. Müll., rhacomitrium C. Müll., pallidicaule C. Müll., nano-globulus C. Müll. und vielen anderen, überdecken die breiten Laminarsäume im turgeszenten Zustand

die Lamellenschicht bis auf einen kleinen Spalt. Diesbezügliche Experimente zeigten, daß die bei Polytrichum juniperinum Willd. und strictum Banks. noch zu beobachtende Bewegungsfähigkeit der einschichtigen Blattflächen ganz oder besser gesagt fast ganz in Wegfall kommt.

Bei einer sehr großen Anzahl Polytrichaceen fand ich in der dorsalen Sklerenchymplatte auf Blattquerschnitten eine in der Mediane liegende mechanisch schwächere Stelle, um welche sich beide Blattflügel etwas nach der ventralen Seite des Blattes drehen können.

Da, wo die ventrale Sklerenchymplatte an die stets stärkere dorsale herantritt, kann man sehr oft eine Verstärkung des dorsalen Sklerenchymstranges beobachten. Diese Verstärkungen stellen die Angriffspunkte der Kräfte dar, die in der ventralen Platte ihren Sitz haben und die z. B. bei Polytrichum piliferum Schreb. bei Verlust des Wassers bewirken, daß die Blätter um die mechanisch schwächere Stelle in der dorsalen Platte sich drehen, wodurch die einschichtigen Laminarteile veranlaßt werden, eine schwache Bewegung nach der Oberfläche der Lamellen auszuführen, die einschichtigen Laminarteile besitzen außerdem noch eine Eigenbewegung.

Die longitudinalen, höchst auffälligen Bewegungen vieler Polytrichaceen sind auf die Tätigkeit eines am Übergang von Scheide zu Spreite liegenden Schwellgewebes zurückzuführen.[1])

Firtsch führt die longitudinalen Bewegungen der Blätter von Polytrichum juniperinum auf das verschiedenartige Schrumpfungsvermögen der beiden die Rippe durchziehenden Sklerenchymplatten zurück. Es müßten sich dann aber auch alle Polytrichaceen, deren Blätter mit zwei Sklerenchymsträngen versehen sind, genau wie Polytrichum juniperinum verhalten, was aber nur bei solchen Arten der Fall ist, die ein Schwellgewebe besitzen. Ist ein solches nicht vorhanden, so treten bei Wasserverlust Schrumpfungen ein, die mit den bei Polytrichum juniperinum u. a. zu beobachtenden Bewegungen nichts Gemeinsames haben. Mehrere Dawsonien verfügen in ihren Blättern sogar über drei bis vier Sklerenchymplatten, man müßte also annehmen, daß alle diese Stränge sich bei Eintrocknung verschieden verhalten.

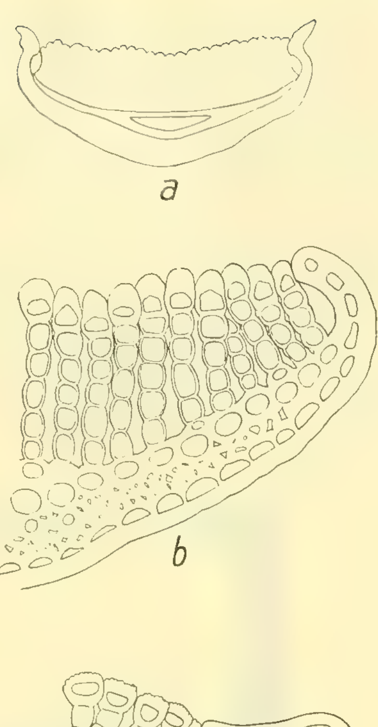
Ich möchte aber nicht unterlassen, noch auf einen Punkt aufmerksam zu machen, den ich der angezogenen Arbeit zu besprechen unterließ, weil er besser in dieser Publikation dargelegt zu werden verdient, zumal die zu schildernde Einrichtung mit der Funktion der Lamellen in engem Zusammenhang steht.

Legt man ziemlich dicke Querschnitte durch die Blätter von Polytrichum alpinum Dill., perichaetiale Mort., Pogonatum capillare Mich. u. a. ohne Druck des Deckglases auf den Objektträger, so läßt sich leicht unter dem Mikroskop beobachten, daß die Blätter, sobald das Wasser verdampft, von beiden Seiten her sich gleichmäßig zusammenziehen, ohne eine bemerkenswerte Gestaltveränderung zu erfahren. Was aber auf Querschnitten durch die Blätter der genannten Arten besonders auffällt, ist die eigentümliche Stellung und der

---

[1]) Lorch W., Einige Bewegungs- und Schrumpfungserscheinungen an den Achsen und Blättern mehrerer Laubmoose als Folge des Verlustes von Wasser. Flora, Band 97, Heft 1, S. 76—95. — Firtsch G., Über einige mechanische Einrichtungen im anatomischen Bau von Polytrichum juniperinum. Ber. d. D. bot. Ges., 1883, Band I. — Stolz F., Zur Biologie der Laubmoose. Nach dem Tode des Verfassers veröffentlicht von K. Giesenhagen in Flora, 1902, Heft 2, S. 305—315. — Bastil, Recherches anatomiques et physiologiques sur la tige et la feuille des Mousses in Revue générale de Botanique. T. III, 1891.

anatomische Aufbau des laminaren Teils. Bei Polytrichum alpinum Dill. z. B. sind die Blattsäume steil aufgerichtet, bei Polytrichum perichaetiale Mort sind sie bogenförmig nach oben und innen gekrümmt, bei Pogonatum capillare Mich. besteht der schmale Saum aus mehreren Zellen mit sehr stark verdickten Membranen. (Fig. 30 a, b, c.) Diese Einfassung zieht sich längs des ganzen Blattes hin, ausgenommen davon ist der scheidenförmige basale Teil, wo eine derartige Einrichtung, da hier die Lamellen fehlen, vollständig überflüssig ist. Die äußersten Lamellen stoßen unmittelbar an den Blattsaum an, dieser folgt mit seinen Aus- und Einbuchtungen genau den entsprechenden Ein- und Ausbuchtungen der Randlamellen, wie leicht an Blättern, die ohne Druck unter das Deckglas gelegt werden, festzustellen ist. Bei Pogonatum capillare Mich. springt eine Zelle so nach innen vor (Fig. 30 c), daß sie genau an die Endzelle der Randlamellen anstößt. Welche Aufgabe hat nun diese Einrichtung zu erfüllen?



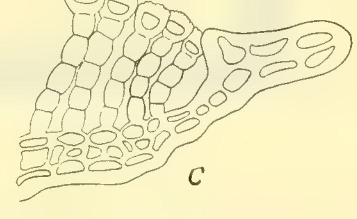


Fig. 30.

Man benützt in Bibliotheken, um das Umfallen und lückenlose Aufstellen von Büchern zu ermöglichen, rechtwinklig gebogene Blechstücke. Wird ein Buch aus der Reihe herausgenommen, so müssen, damit die gewünschte Ordnung wieder eintritt, beide Blechstücke etwas einander genähert werden. Bei Pogonatum capillare Mich. u. a. wirken nun die eigenartig geformten Randteile der Blätter genau so wie jene Metallwinkel. Zieht sich das Blatt infolge Wasserverlustes etwas zusammen, so findet eine Annäherung der Blattränder statt. Es werden durch die nach innen vorspringenden Zellen des Blattrandes die Kopfzellen der Lamellen einander näher gebracht, so daß der früher bestehende Zustand der gegenseitigen Lage der Lamellen wieder eintritt, andernfalls würde bei Wasserverlust die Oberseite der Lamellen Lücken erhalten, durch die das Wasser in tropfbar flüssiger Form austreten und dann leicht verdampfen könnte, was durch jene Einrichtung verhindert wird, der wir noch bei zahlreichen anderen Polytrichaceen, u. a. Trichopilum simense B. et S. und Polytrichum timmioides C. Müll. begegnen. Wie bei einem empfindlichen Aneroidbarometer die geringsten Schwankungen des Luftdrucks die Stellung des Zeigers beeinflussen, so hängt bei der geschilderten Einrichtung der Polytrichaceenblätter die Entfernung der Punkte a a (siehe schematische Fig. 31) von dem größeren oder geringeren Wassergehalt der Membranen der mechanisch wirkenden Zellen ab, aus denen sich die dorsale Sklerenchymplatte zusammensetzt.

Kultiviert man Rasen von Polytrichum commune L., unserer stattlichsten einheimischen Art, in einem mit Wasserdampf gesättigten Raume (beispielsweise in einem durch eingeschliffenen Glasstöpsel luftdicht verschließbaren zylindrischen Gefäße) derart, daß nur die

unteren Teile des Rasens in Wasser eintauchen, so läßt sich, besonders wenn die Temperatur der eingeschlossenen Luft als „kühl" bezeichnet werden kann, an der Oberseite eines jeden nicht untergetauchten Blattes unmittelbar vor der Spitze ein winziges Wassertröpfchen beobachten, dagegen gelingt es nicht, selbst bei Benützung einer starken Lupe, Ausscheidungen von Wasser in Form von Tropfen an der Lamellenoberfläche nachzuweisen. Die Zwischenräume zwischen den einzelnen Lamellen sind bei genannter Art ziemlich groß und unter den soeben näher bezeichneten günstigen Umständen mit Wasser gefüllt. Da die eigentümlich geformten Endzellen der Lamellen mit ihren seitlichen Emergenzen im Zustande der Turgeszenz dicht aneinanderstoßen, so kann nur an der Spitze des Blattes, wo die Lamellenhohlräume sich öffnen, Wasser in Tropfenform austreten. Dieser Versuch beweist, daß in der Tat die Endzellen der Lamellen einen Verschluß der Lamellenhohlräume herstellen und ein allzu rasches Verdunsten des in ihnen kapillar festgehaltenen Wassers zu verhindern imstande sind.

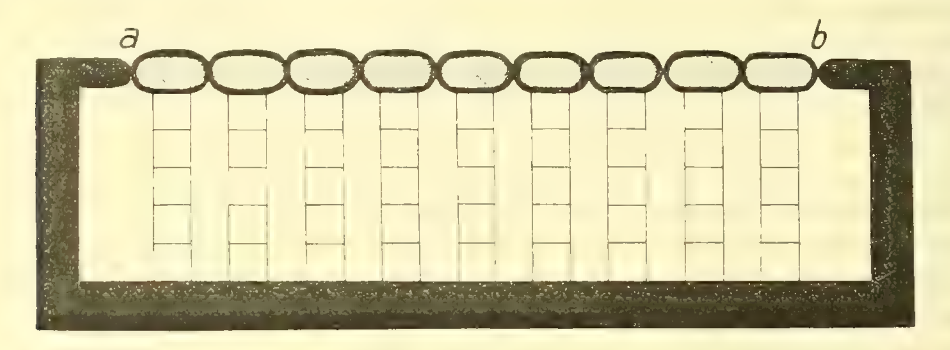


Fig. 31.

Rasen von Polytrichum commune L. gedeihen in feuchter Luft sehr gut, man ist also in der Lage, die Einwirkung der in reichlicher Menge zur Verfügung stehenden Feuchtigkeit auf die Ausbildung der Blätter und insbesondere der Lamellen kennenzulernen. Die in der mit Wasserdampf gesättigten Atmosphäre hervorgebrachten Sprosse sind schmächtig, ihre Blätter klein und ziemlich weit voneinander entfernt. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß die Rippe im Vergleich zum einschichtigen Spreitenteil des Blattes sehr schwach entwickelt ist, außerdem fehlen die Lamellen vollständig. Von dem bei normalen Blättern so deutlich ausgebildeten Schwellgewebe[1]) ist auch nicht die geringste Spur vorhanden. Lamellen und Schwellgewebe, diese charakteristischen Eigentümlichkeiten vieler Polytrichaceenblätter, entstehen bei Polytrichum commune L. nicht, sobald die äußeren Bedingungen sich derart gestalten, daß ihre Ausbildung sich als überflüssig erweist, und das ist bei Kultur in dauernd mit Wasserdampf gesättigter Atmosphäre der Fall. Auch ist von der scharfen Sonderung des normalen Blattes in einen scheidigen Teil und eine Spreite bei den Blättern im Feuchten erwachsener Stämmchen nichts zu bemerken.

Auf die große Formenmannigfaltigkeit und die durch die Symmetrieverhältnisse des Blattes bedingte Ausbildung der Lamellenendzellen habe ich bereits früher hingewiesen.

[1]) Siehe Flora, Band 96, Heft 3.

Auch habe ich in dem Abschnitt, der die Entwicklungsgeschichte des Blattes und der Lamellen behandelt, darauf aufmerksam gemacht, daß die Einfügung der antiklinen Membranen bei verdoppelten Lamellenendzellen und die Membranverdickungen und hyalinen Verstärkungen die letzten Stadien der Lamellenentwicklung ausmachen. Da diese unstreitig wichtigsten Teile der Lamellen den Abschluß der Entwicklung bilden, so drängt sich die Frage auf, ob nicht die besondere Gestaltung der Lamellenendzellen überhaupt als Folge äußerer Reize aufzufassen ist. Ich neige zu der Ansicht, daß sie funktionelle Anpassungen darstellen, die von äußeren Faktoren hervorgebracht werden. Einen Nachweis dafür zu erbringen, ist, soweit ich sehen kann, nicht möglich, denn, wie das Beispiel von Polytrichum commune L. beweist, verschwinden die Lamellen bei Kultur in dauernd feuchter Atmosphäre, damit ist also die Untersuchung der Lamellen zur Unmöglichkeit geworden. Es ist auch nicht anzunehmen, daß die Kultur anderer Arten zu wesentlich anderen Ergebnissen führen wird. Als Stütze für meine Ansicht teile ich folgende, von mir bei zahlreichen Polytrichaceen beobachtete Tatsache mit, indem ich gleich im voraus bemerke, daß die von außen einwirkenden Reize verschiedenartig sein können. Außer der Feuchtigkeit kommt wohl auch das Licht als formbildender Reiz in Betracht.

Werfen wir einen Blick auf Fig. 32, in der die rechts von der Symmetrielinie gelegenen Lamellenendzellen des Blattes von Polytrichum juniperinum Willd. abgebildet sind, so fällt sofort auf, daß die bei den mittleren Endzellen vorhandene bedeutende Verdickung des oberen Teils nach den Seiten hin allmählich abnimmt, so daß bei den Randzellen von irgend einer Membranverdickung nicht mehr die Rede sein kann. Wie Polytrichum juniperinum Willd. verhalten sich viele andere Arten der Polytrichaceen. Ich bin überzeugt, daß, nachdem das Blatt seine Entwicklung im großen ganzen abgeschlossen hat, die definitive Gestaltung der Lamellenendzellen bedingt wird von einem von außen einwirkenden Reize, und zwar bei letztgenannter Art von einem Lichtreiz. Wie verschiedenartig Lichtreize überhaupt wachsende Stämmchen und deren Blätter beeinflussen, habe ich durch eine ausgedehnte Versuchsreihe ermittelt.



Fig. 32.

Eine große Spiegelglasplatte wurde an ihren Rändern mit einer Pappleiste eingefaßt, so daß das Ganze die Gestalt einer niedrigen Wanne annahm. Darauf wurde der entstandene niedrige Hohlraum mit weißem Sand ausgefüllt. In diesen versenkte ich gleichgroße, mit Wasser gefüllte Bechergläser, die dann mit Rasen von Polytrichum commune L. und Dicranum maius Turn. beschickt wurden. Über jedes Becherglas stülpte ich einen lichtdichten Pappzylinder, der seitlich in der Höhe der Rasen einen schmalen Spalt oder an der Basis oben ein kleines kreisrundes Loch besaß. Das Eindringen von Licht von unten her wurde dadurch verhindert, daß die Pappzylinder ebenfalls in den Sand eintauchten. Alle möglichen Kombinationen, was Anbringung von Spalten und Löchern anbelangt, habe ich zur Anwendung gebracht.

Die nach Anstellung der Versuche gewachsenen Stämmchenteile beider Arten unterschieden sich in einem Punkt sehr wesentlich. Während bei Polytrichum commune L.

die Stämmchen selbst sehr deutlich sich dem lichtspendenden Spalt zuwandten, war dies bei Dicranum maius Turn. nicht der Fall, hier folgten nur die Blätter dem bestimmenden Reiz, während bei Polytrichum commune L. Stämmchen und Blätter den äußeren Einwirkungen entsprechend reagierten. Polytrichum commune - Stämmchen, die durch zwei diametral gegenüberliegende Spalten Licht empfingen, neigten zur Hälfte nach der einen, zur Hälfte nach der anderen Seite. Die Blätter selbst stellten sich so, daß man von einer Art Zweizeiligkeit sprechen konnte. Am überraschendsten aber war das Ergebnis eines der vielen Experimente mit Dicranum maius Turn. Stämmchen dieser Art, die durch ein kleines Loch von oben Licht erhielten, entwickelten nach allen Seiten Blätter, so daß von der in der Natur vorhandenen, außerordentlich gut entwickelten Einheitswendigkeit der Blätter nichts mehr zu sehen war. Ich glaube hierdurch den experimentellen Nachweis erbracht zu haben, daß die einseitswendige Anordnung der Blätter bei vielen Laubmoosen, u. a. auch bei Dicranum maius Turn., auf Lichtreize zurückzuführen ist.

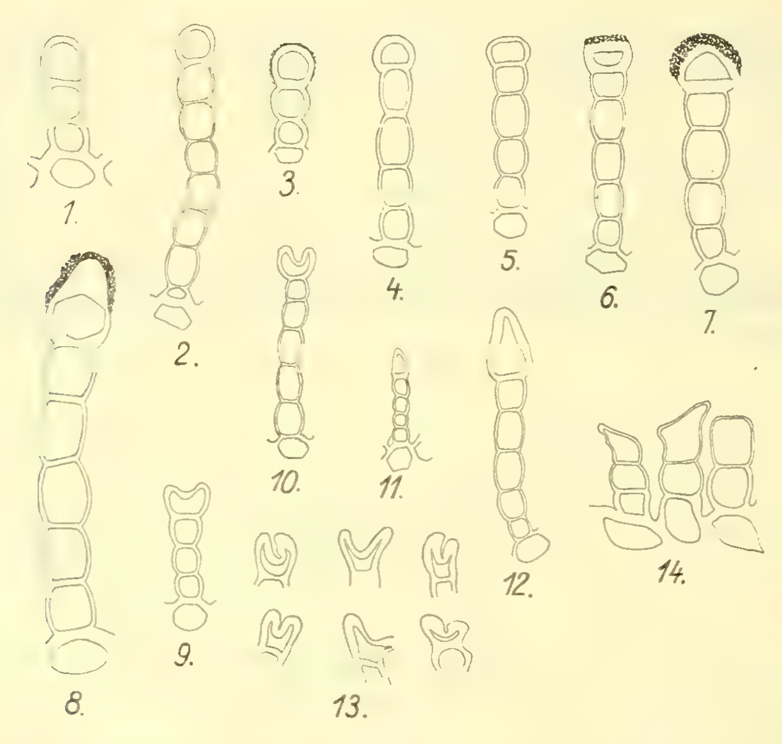


Fig. 33.

„Die mechanische Funktion der Zellen, sagt Göbel (Flora 1906, S. 13), scheint mir bei den Moosen allzusehr in den Vordergrund gestellt worden zu sein. Käme sie wirklich ausschließlich in Betracht, so wären viele Moose geradezu verschwenderisch damit ausgestattet, jedenfalls nicht nach dem Prinzipe, daß mit dem geringsten Materialaufwand die größte notwendige Festigkeit erzielt werden sollte. Abgesehen von der Bedeutung der Membranverdickungen als Schutz gegen Transpiration, Tierfraß etc. kommen gewiß noch andere Faktoren in Betracht, die derzeit unbekannt sind, da unsere Kenntnis der

Stoffwechselerscheinungen und des inneren Aufbaues der Moose noch eine zweifelhafte ist.“ Ich stimme Göbel bei und erblicke in der bei zahllosen Formen der Bryophyten vorkommenden Membranverdickung in erster Linie eine Einrichtung zum Festhalten des Wassers, das bekanntlich meist von der Oberfläche der Blätter, des Stämmchens und anderer Organe zugeführt wird. Es nimmt nicht nur der Zellinhalt Wasser auf, dieses durchdringt auch die Membranen und wird in ihnen, wie es nach manchen Beobachtungen sehr wahrscheinlich ist, viel kräftiger festgehalten als von dem Inhalt selbst. Besonders stark verdickte Wände besitzen die xerophilen Arten, es wäre aber durchaus verkehrt, aus dem anatomischen Befund kurzerhand auf Xerophilie bzw. Hygrophilie einer Art schließen zu wollen. Dies geschieht leider sehr oft; ich möchte an dem folgenden Beispiel nachweisen, daß z. B. eine Art mit ausgesprochen xerophilem Blattbau trotzdem zu den hygrophilen Formen gerechnet werden muß. Pogonatum macrophyllum D. et M., eine der größten Polytrichaceen, die in dem malayischen Archipel, einem der niederschlagreichsten Teile der Erde, ihre Heimat hat, ist dadurch merkwürdig, daß ihre Blätter keine Lamellen aufweisen. C. Müller-Hal. sagt ganz richtig: folia — omnia lamellis brevissimis instructa, itaque veluti elamellosa. (Siehe Fig. 34.) Blattquerschnitte geben aber noch einen anderen interessanten Aufschluß. Es erhöht sich nämlich bei dieser Art die Zahl der Sklerenchymplatten auf drei, außerdem sind alle Zellen mit sehr stark verdickten Membranen ausgestattet. Wer nun aus diesem anatomischen Befunde den Schluß herleitet, es handle sich bei Pogonatum macrophyllum D. et M. um eine xerophile Art, befindet sich im Irrtum. Gerade das Gegenteil ist der Fall. Die starken Wände des Blattgewebes, die größere Zahl der Sklerenchymstränge haben hier nicht die Aufgabe der mechanischen Festigung zu erfüllen, sie dienen zur Speicherung des Wassers, das durch Lamellen, denen sonst diese Aufgabe zufällt, nicht festgehalten werden kann. Es liegt hier eine Korrelation vor, wie sie kaum besser in die Erscheinung treten kann. Der anatomische Bau des Stämmchens trägt kein xerophiles Gepräge. Ein Schwellgewebe ist nicht vorhanden, welcher Umstand ebenfalls für die Hygrophilie dieser Art spricht. Bei Eintrocknung verhalten sich die Blätter wie die zahlreichen Vertreter immerfeuchter tropischer Gebiete, hierher gehören vor allem die von C. Müller unter Catharinella vereinigten Arten.



Fig. 34.

Versuche mit Blättern von Polytrichum commune L.

Löst man ganze Blätter dieser Art vom Stämmchen los, legt sie auf einen Objektträger und läßt sie eintrocknen, so vollzieht sich unter anfänglich schwacher Krümmung des Spreitenteils die Aufbiegung des letzteren in die Trockenstellung. Bei weiterer Eintrocknung beschreibt der Spreitenteil einen starken Bogen, dessen Öffnung an der Blattoberseite liegt. Scheide und Spreite stellen schließlich eine Kreislinie dar, die einem Winkel von ca. 270° angehört. An der Aufwärtskrümmung und Biegung nimmt die Scheide keinen Anteil. Eigentümlich sind die Vorgänge, die sich fernerhin an dem eintrocknenden Blatt beobachten lassen. Die Blattspitze krümmt sich nämlich wieder nach oben zurück, auch die übrigen Teile der Spreite ändern ihre Linienführung, schließlich zeigt das Blatt die Form eines S.

In der Natur findet niemals eine derartige starke Krümmung (ca. $^3/_4$ einer Kreislinie) der Blattspreite statt. Das Stämmchen und die Blätter selbst verhindern, daß ein Blatt sich über einen gewissen Betrag hinaus nach oben umbiegt. Da also den Blättern die Fähigkeit innewohnt, stärkere Krümmungen auszuführen, so ist die notwendige Folge, daß sie sich mit bedeutender Kraft nach oben aneinander legen bzw. zwischen einander drängen müssen, was vom biologischen Standpunkt aus nur als vorteilhaft angesehen werden kann.

Es mußte nun nachgewiesen werden, daß ein einzelnes Blatt am Stämmchen sich ebenso verhält wie ein davon losgelöstes. Ich schnitt die Stämmchen, die zuvor in Kork eingespannt waren, quer durch und zwar immer über einer Blattscheide, beseitigte die tiefer stehenden Blätter und überließ das Spitzenblatt der Eintrocknung. Der nun zu beobachtende Vorgang war derselbe wie bei losgelösten Blättern. Das freistehende Blatt zeigte zum Schluß die ~förmige Gestalt, die Spreite stand quer zur Achse des Stämmchens.

Nach dem Gesagten sind also bei der Aufbiegung des Blattes von Polytrichum commune L. drei Bewegungsphasen zu unterscheiden: Zunächst die Drehung der Spreite um das obere Ende der Scheide, hervorgerufen durch das Verhalten des Schwellgewebes, alsdann die Ausführung der starken bogenförmigen Krümmung seitens der Spreite und schließlich die Umwandlung dieser einheitlichen Krümmung in eine Linie von ~förmiger Gestalt. Die Versuche beweisen, daß das Wasser in verschiedenen Teilen des Blattes nicht gleichzeitig verdunstet, anderntalls müßte mit der einheitlichen Krümmung der Spreite die Bewegung ihr Ende erreichen. Ich bemühte mich nun, die Ursache für die Krümmung der Spreite ausfindig zu machen. Man konnte vermuten, daß die zahlreichen Lamellen an der Blattoberseite besonders durch stärkere Kontraktion der eigentümlichen Endzellen die Bewegung veranlaßten. Kratzt man vorsichtig mit einem spitzen und scharfen Messer, ohne daß das Blatt sonst verletzt wird, die Lamellen weg, so tritt trotzdem die Bewegung in die Trockenstellung ein, hiernach haben die Lamellen anscheinend keinen Anteil an der Hervorbringung der Bewegung. Recht charakteristisch verhalten sich die Lamellen, die man in Wasser unter das Deckglas bringt, beim Zutritt von Glyzerin. Sie krümmen sich außerordentlich stark nach der Kante, an der die Endzellen der Lamellen liegen, vorausgesetzt, daß sie nicht am Objektträger oder Deckglas adhärieren. Sie nehmen aber ihre ursprüngliche Gestalt wieder an, sobald man Wasser zuführt und den Einfluß des Glyzerins beschränkt oder aufhebt. In der Natur kommt aber eine Behandlung mit Glyzerin nicht

in Frage, dieser Versuch enthält also keine Erklärung. Wasser und Alkohol oder absoluter Alkohol allein bringen an den Lamellen keine Gestaltänderung hervor. Ohne Zweifel sind aber die Lamellen doch an der Blattspreitenkrümmung beteiligt. Abgekratzte und sofort unter das Deckglas gebrachte Lamellenstücke erhalten, falls sie nicht, wie es oft der Fall ist, am Objektträger adhärieren, eine Ausbauchung an der oberen Kante, die von den Endzellen gebildet wird, diese ziehen sich also zusammen, und zwar sehr stark, und wenn man bedenkt, wie hräftig die Zugwirkung der zahlreichen Lamellen bei einem Blatte (50—70) sein muß, so können wir uns nicht der Einsicht verschließen, daß sie bei dem Zustandekommen der Beugung großen Anteil haben müssen. Zarte Einschnitte am Rücken des sonst unverletzten Blattes vermochten die Krümmung desselben ebenfalls nicht zu beseitigen, dasselbe Ergebnis erzielte ich, wenn von der Oberseite her derartige Eingriffe vorgenommen wurden. Die Krümmung trat auch ein, wenn die Zellflächen beiderseits der Rippe weggeschnitten oder wenn diese von den Seiten her mit einer feinen Schere in mehrere Abschnitte zerlegt wurden.

Nicht geringe Schwierigkeiten bereitet die Ausführung von Flächenschnitten, durch welche die dorsale Sklerenchymplatte in Wegfall gebracht werden soll. Die besten Resultate erzielte ich noch, wenn ich das Blatt mit der Spitze in den Spalt eines federnden Korkes einspannte und mit dem Rasiermesser über den Rücken des Blattes langsam hinfuhr; durch die Berührung mit dem Messer legte sich das Blatt dicht an den Kork an, die Führung des Messers wurde dadurch leichter und sicherer, so daß es mir öfter gelang, am Rücken des Blattes einen zusammenhängenden Gewebekomplex wegzuschneiden. Die in dieser Weise ihres dorsalen Bündels beraubten Blätter führten die charakteristische Krümmung des Spreitenteils nicht aus, ich ziehe hieraus den Schluß, daß das Übergewicht des dorsalen Sklerenchymbündels bei unverletzten Blättern die Biegung der Spreite veranlaßt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Wirkung des Schwellgewebes durch Verletzung der Spreite nicht im geringsten beeinträchtigt wird.

Nach den Untersuchungen, welche ich an den Blättern von Catharinaea Hausknechtii Jur. et Milde angestellt habe,[1]) steht es fest, daß die verschiedenen Gewebemassen des Blattes sich bei Verlust des Wassers durchaus verschieden verhalten, und was von der genannten Art gilt, darf ganz allgemein von den an Laubmoosblättern zu beobachtenden Schrumpfungserscheinungen gesagt werden. Nach welcher Richtung hin die Bewegungen des Blattes sich vollziehen, darüber gibt die bei Polytrichum und vielen anderen Bryophyten scharf ausgeprägte Dorsiventralität Aufschluß, denn immer tritt die Krümmung an der anatomisch stärker differenzierten Seite auf, da naturgemäß hier auch der größte Feuchtigkeitsverlust zu verzeichnen ist. Aber ganz abgesehen davon ist bei den Blättern vieler Bryophyten eine Bewegung nach der entgegengesetzten Richtung vollkommen ausgeschlossen, weil das Blatt schon im turgeszenten Zustand in seinen einzelnen Teilen eine Lage einnimmt, die gar keine andere Bewegung als die nach der ventralen Seite hin zuläßt. Selbst unter der Voraussetzung, daß bei Tortula ruralis L. z. B. an beiden Blattflächen die Austrocknung einen ganz gleichmäßigen Verlauf nähme, vermöchte sich das Blatt doch nur nach der ventralen Seite hin zu krümmen, weil es an dieser eine im turgeszenten Zustand

---

[1]) Lorch. Einige Bewegungs- und Schrumpfungserscheinungen an den Achsen und Blättern mehrerer Laubmoose als Folge des Verlustes von Wasser. Flora, Band 91, Heft 1, S. 82—84.

vorhandene Aushöhlung besitzt, die nicht an die dorsale Seite des Blattes verlegt werden kann, weil die kräftigen Blattränder und das meist aus zwei Lagen bestehende Stereïdenbündel der Rippe hindernd in den Weg treten.

Bewegungserscheinungen an den Blättern der einheimischen Catharinaea-Arten, hervorgerufen durch den Verlust der Feuchtigkeit.

Bei allen diesen Arten nehmen die Blätter bei Verlust des Wassers zunächst eine, wenn auch unbedeutende Aufbiegung nach oben vor. Gleichzeitig erfahren die zuvor flach ausgebreiteten Randpartien eine Aufrichtung, so daß an der Blattoberseite eine Rinne entsteht. Bei zunehmendem Wasserverlust krümmen sich die Blätter bogenförmig an ihrer Oberseite. Am stärksten ist die Aufrichtung der Blattränder im apikalen Teile, wo sie sich bald berühren. Alsdann rollt sich die Spitze schneckenförmig ein. Am längsten turgeszent bleiben die unteren Blatteile. Im allgemeinen beginnt die Eintrocknung an der Spitze und schreitet allmählich nach der Basis hin fort.

Unsere einheimischen Catharinaea-Arten besitzen kein Schwellgewebe, auch sind Spreite und Scheide als gesonderte Blattabschnitte nicht vorhanden. Mit Ausnahme der basalen Zellen sind alle übrigen durchaus gleichartig, meist rundlich-sechsseitig und in den Winkeln etwas verdickt. Eine gewisse Ähnlichkeit der Laminarzellen mit denen des typischen Schwellgewebes läßt sich nicht bestreiten, und wenn wir berücksichtigen, daß gerade durch ihr Verhalten die Gestalt des Blattes im trockenen wie im turgeszenten Zustand bestimmt wird, so dürfen wir sie als ein Schwellgewebe im weiteren Sinne ansprechen, zumal die Laminarsäume zweifellos echter Polytrichum-Arten sich aus denselben Zellen zusammensetzen.

Die Catharinaea-Arten bevorzugen stets feuchte Stellen als Wohnorte. Am üppigsten gedeihen sie auf dem Boden lichter Laubwälder, an immerfeuchten Erdlehnen, unter Hecken und Gebüsch, wo die Gefahr der Austrocknung selten an sie herantritt. Nicht weil sie in ihrem Vorkommen an derartige und ähnliche Lokalitäten gebunden sind, gehören sie zu den hygrophilen Polytrichaceen, sondern weil die Struktur ihrer Blätter z. B. uns die Hygrophilie offenbart.

Es ist nicht angängig, die Eintrocknungserscheinungen bei den Catharinaea-Arten mit den bei vielen anderen hygrophilen Formen vorkommenden zu vergleichen. Zweifellos ist die Aufbiegung des Randes, besonders im oberen Blatteil eine Einrichtung besonderer Art, der die Aufgabe zufällt, die auf die ventrale Seite des oberen Blattabschnittes beschränkten Lamellen vor dem Verlust des Wassers zu schützen. Ein Vergleich mit den Schutzeinrichtungen des Blattes von Polytrichum commune L. anstellen zu wollen, hat keinen Wert, weil ein solcher unmöglich ist. Wir können Polytrichum commune L. an die Spitze einer Reihe stellen, deren Schluß die Catharinaea-Arten als die Vertreter der einfachsten Schutzeinrichtungen gegen Transpiration darstellen. Beide Extreme sind durch Übergänge mannigfachster Art verknüpft.

Die scharfe Gliederung eines Polytrichaceenblattes — viele Polytrichum-, Pogonatum-, alle Dawsonia- und Polytrichadelphus-Arten — in Scheide und Spreite deutet stets darauf hin, daß ein typisches Schwellgewebe vorhanden ist, lockere, d. h. an der Achse abstehende Scheiden zeigen dagegen immer den gänzlichen oder fast vollständigen Mangel

eines derartigen Gewebes an. Umschließt die Scheide das Stämmchen nicht fest, so vollzieht sich der Übergang zur Spreite meist in der Form eines Bogens. Derartigen Verhältnissen begegnen wir z. B. bei Polytrichum usambaricum Broth., latidens C. M., dissitifolium Broth., Holstii Broth., flexibilifolium C. M., Catharinella rubenti-viridis C. M. u. v. a. Alle diese Formen schlagen eine Brücke zwischen den beiden Extremen Polytrichum commune L. und Catharinaea undulata W. et M. Bei den genannten Arten, deren Zahl ich noch um das Zehnfache vergrößern könnte, handelt es sich fast ausschließlich um Bewohner der niederschlagreichsten Teile der Erde, bei denen sich solch vollkommene Einrichtungen, wie sie Polytrichum commune L. besitzt, als überflüssig erweisen. Charakteristisch für sie ist die Art, wie die Blätter die Verdunstung des Wassers zu verhindern suchen. Bei Polytrichum usambaricum Broth. z. B. dessen Spreite, von einem ganz schmalen Saum abgerechnet, dicht mit Lamellen bedeckt ist, wird bei Einbuße des Wassers durch Aufbiegung der seitlich der Rippe gelegenen Spreitenflächen ein einheitlicher, zylindrischer Hohlraum hergestellt, in dem die Lamellen von allen Seiten her fest umschlossen sind. Wie Polytrichum usambaricum Broth. verhält sich auch das lamellenlose Pogonatum macrophyllum D. et M. Die Aufführung der Rinne beginnt stets an der Blattspitze und schreitet ganz allmählich bis dahin fort, wo die Biegung zur Scheide sich vollzieht. Diese ist wegen ihrer festen Verbindung mit dem Stämmchen daran verhindert, ihre Ränder nach oben umzulegen. Es entsteht also an dem Übergang der Spreite zur Scheide eine Öffnung, aus der die Lamellen noch in größerer Anzahl hervortreten. Fällt Wasser auf die Blätter, so gelangt es hier zuerst zu den Lamellen, die es sehr schnell in ihren kapillaren Zwischenräumen nach der Spitze hin transportieren können.

Die Polytrichaceen der tropischen Regenwälder und anderer niederschlagreicher Erdgegenden fallen durch ihre tiefdunkelgrüne Farbe, durch den Reichtum der Zellen an Chlorophyllkörnern, sofort auf. Charakteristisch für die meisten ist außerdem die starke Kräuselung im Zustande der Trockenheit. Tiefes Grün, lockere Lage der Scheide am Stämmchen, Aufbiegung der Blattränder zum Zweck der Herstellung einer Rinne oder eines zylindrischen Hohlraumes an der Blattoberseite, Mangel des Schwellgewebes, Kräuselung der Blätter im Zustande der Trockenheit sind im allgemeinen untrügliche Kennzeichen der Hygrophilie.

Das Blatt der meisten Polytrichaceen wird von zwei Sklerenchymplatten durchzogen, einer meist stärkeren, dorsalen und einer schwächeren, ventralen, nur bei einigen Dawsonia-Arten und bei Pogonatum macrophyllum D. et M. wird diese Zahl überschritten. Gegen die Blattspitze hin vereinigen sich diese Bündel festerer Gewebeelemente zu einem einzigen Strang, der für sich allein den Spitzenteil des Blattes einnimmt. Nach dem Grunde hin, bei den Formen, deren Blätter deutlich Scheide und Spreite unterscheiden lassen, dagegen schon beim Übergang beider Abschnitte, verringert sich die Ausdehnung des fast immer stärkeren, dorsalen Bündels, so daß schließlich von einem Überwiegen desselben dem ventralen gegenüber nicht mehr gesprochen werden kann. Mit der Feststellung dieser Tatsache ist aber nur wenig gewonnen. Ich habe gezeigt, daß das dorsale Bündel die von dem Schwellgewebe unabhängige Krümmung der Blattspreite, z. B. bei Polytrichum commune L., veranlaßt. Der scheidenartige Teil des Blattes dieser Art führt aber niemals eine Bewegung aus, die eintreten müßte — wenn auch sehr schwach —, wenn die Stärkeverhältnisse der Sklerenchymplatten hier dieselben wären wie im Spreitenteil.

Die Scheide, welche als halber Hohlzylinder das Stämmchen umfaßt, hat wesentlich andere Aufgaben wie die Spreite zu lösen. Ihre breiten Säume führen viel weniger Chlorophyll als die entsprechenden Abschnitte der Spreite, für die Assimilation kommen sie sicher nur wenig in Betracht. Sie vermag Wasser festzuhalten, auch wird solches sicher, da alle Scheiden einen einzigen Hohlzylinder bilden, zwischen diesem und dem Stämmchen aufwärts geleitet.

Kräftige Polytrichum commune-Rasen kultivierte ich in feuchtigkeitsgesättigter Atmosphäre. Die Rasen standen in Bechergläsern, die nur zur Hälfte mit Wasser gefüllt waren. Die Stämmchen wuchsen in die Länge, die Zuwachsstücke waren aber verhältnismäßig schmächtig. Darauf brachte ich die Rasen in Bechergläser mit Sachs'scher Nährlösung, doch so, daß die Flüssigkeit nur die untersten Teile des Rasens bespülte. Nach einiger Zeit hatten sich die schmächtigeren Stämmchenpartien um viel kräftigere Stücke verlängert. Beide Versuche wiederholte ich an demselben Rasen mehrere Male und erzielte mit der Zeit ca. 15 cm lange Zuwachsstücke, bei denen schmächtigere und üppigere Sproßteile fünfmal miteinander abwechselten. Ein Transport von unten findet also sicher statt, und wenn es auch nicht mit Bestimmtheit behauptet werden kann, so doch mit einiger Wahrscheinlichkeit, besonders zwischen Stämmchen und dem durch die Blattscheiden gebildeten Hohlzylinder.

Bei allen Polytrichaceen, die wie so viele Catharinaea-, (Catharinella)-, (Oligotrichum)- und Psilopilum-Arten eine scharfe Trennung von Scheide und Spreite nicht erkennen lassen, bei denen mehr ein bogenförmiger Übergang zwischen beiden stattfindet, enthalten auch die Zellen der unteren Blattpartien viel Blattgrün. Sie kommen kaum für den durch kapillare Kräfte bewirkten Wassertransport, wohl aber für die Assimilation in Betracht. Die bei Verlust des Wassers eintretenden Krümmungen des Blattes nach der Oberseite hin und die vielfach damit verbundenen Aufbiegungen des Randes sind ohne Zweifel bedingt durch das Verhalten der Laminarteile,[1]) nicht aber der Sklerenchymplatten, die, weil sie ziemlich gleich stark sind, nicht so wirken können, wie zwei an Umfang erheblich verschiedene Stränge. Wenn nun, wie es bei Arten der Sektio Catharinella C. M. der Fall ist, die Blätter außer der Aufbiegung noch eine spiralige Drehung erfahren, so liegt dies unzweifelhaft daran, daß die Blattseiten ungleichartig entwickelt sind, denn bei genauerer Untersuchung zahlreicher Blattquerschnitte stellte es sich heraus, daß die rechte und linke Blatthälfte stets etwas ungleich ausgebildet sind, insbesondere gilt dies von den sklerenchymatischen Elementen, an denen diese Tatsache sich am leichtesten feststellen ließ.

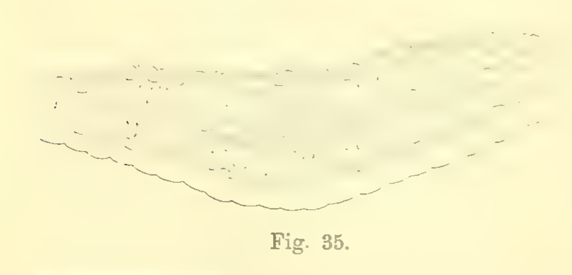


Fig. 35.

Bei der Mehrzahl der Polytrichaceen darf die ventrale Sklerenchymplatte als eine durchaus ungegliederte Partie sklerenchymatischer Zellen angesehen werden. Dawsonia Beccarii Geh. et Schlieph. macht eine Ausnahme, die Bauchplatte ist hier nämlich sehr deutlich durch großlumige, zartwandige Zellen in zwei Bündel zerlegt (Fig. 35).

[1]) Lorch. Einige Bewegungs- und Schrumpfungserscheinungen an den Achsen und Blättern mehrerer Laubmoose als Folge des Verlustes von Wasser. Flora, Band 97, S. 82—84.

Noch weiter geht der Vorgang der Zerlegung in mehrere kleinere und größere Bündel bei Polytrichadelphus Lyalli Mitt. Auf einem Blattquerschnitt zählte ich deren nicht weniger als 15 (Fig. 36 a), von diesen war das centrale am kräftigsten entwickelt (Fig. 36 b). Ob die trennenden großlumigen Elemente (Fig. 36 c) als Durchlaßzellen zu gelten haben oder ob sie bei transversalen Bewegungen der Blätter durch Verkleinerung ihres Lumens ausgleichend wirken, muß ich dahingestellt sein lassen.

Ganz allgemein läßt sich an den lamellenführenden Blättern konstatieren, daß die Lamellen nach der Blattbasis hin eine allmähliche Verkürzung erfahren, die immer mit einer Veränderung bzw. Vereinfachung der Endzellenorganisation verknüpft ist. (Siehe die Figur in Goebel, Archegoniatenstudien. Flora, Band 96, Heft 1, S. 17.) Aber auch zwischen den Endzellen der Lamellen aus der Blattmitte und den mehr nach der Spitze hin gelegenen bestehen oft bedeutende Abweichungen. Als Beispiel diene Dawsonia Victoriae C. M. Fig. 37 a führt einen Querschnitt durch den oberen Blatteil vor. Die Anfügungen der Lamellenendzellen sind sehr groß und deutlich flaschenförmig, in der Mitte dagegen nehmen die hyalinen Anfügungen an Stärke ab (Fig. 37 b), wodurch die Endzellen eine andere Gestalt erhalten. Im Gegensatz zu Angehörigen anderer Pflanzengruppen gelten die Laubmoose mit Recht als sehr plastische Organismen, die auf äußere Reize hin, vor allem solche des Lichtes, in auffälligster Weise reagieren. Ich hoffe noch, den durch physiologische Versuche gestützten

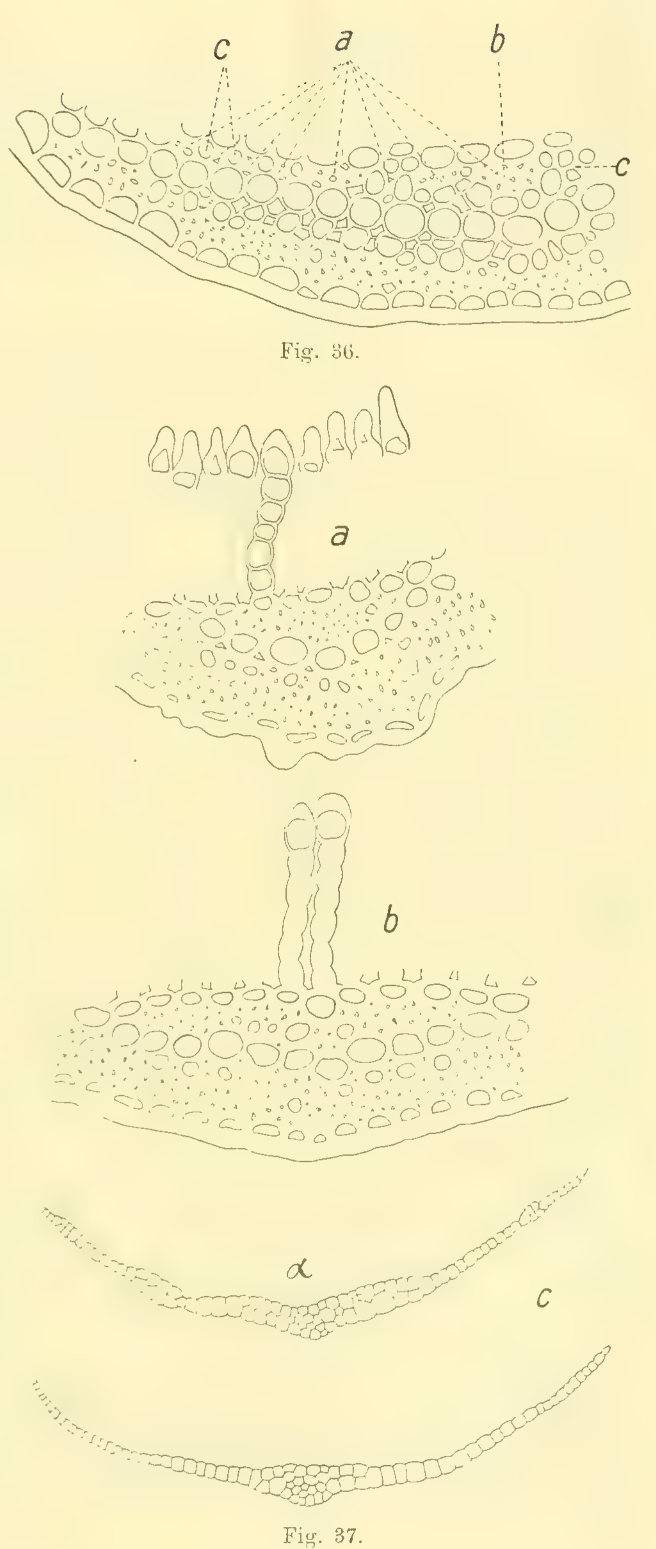


Fig. 36.

Fig. 37.

Nachweis erbringen zu können, daß die hyalinen Anfügungen nur im Lichte entstehen. Wenn, wie wir bei Dawsonia Victoriae C. M. sehen, diese Anfügungen nach der Basis der Lamellen hin mehr und mehr abnehmen und schließlich ganz verschwinden, so führe ich dies darauf zurück, daß an solchen Stellen, wohin nur wenig Licht gelangt — und dies ist die Basis des Blattes —, die Ausbildung der hyalinen Verdickungen unterbleibt, wogegen in den stärker belichteten, mittleren und oberen Lamellenschichten das Licht einen fördernden Einfluß in Bezug auf jene Anfügungen ausübt.

II. Die Geschlechtsorgane.

Antheridien.

Die „Blüten" [1]) der Polytrichaceen sind zweihäusig, selten einhäusig oder polygamisch. Die Antheridien, besonders der diöcischen Formen, stehen immer in größerer Anzahl beisammen, vermischt mit eigentümlichen Paraphysen und abweichend geformten Perigonialblättern, die in ihrer Gesamtheit die Gestalt eines Bechers oder einer Scheibe nachahmen. Für die Arten von Dawsonia gilt dasselbe, außerdem bleibt auch bei ihnen die Scheitelzelle erhalten, und diese Tatsache für sich allein genügt, um klar zu erkennen, daß die systematische Sonderstellung der Dawsoniaceen nicht zu rechtfertigen ist, daß sie also mit den Polytrichaceen zu einer Familie vereinigt werden müssen.

Was nun die Gestalt der Perigonialblätter der männlichen Blütenstände anbelangt, so ist zunächst hervorzuheben, daß sich an ihnen eine allmähliche Größenabnahme von außen nach innen (von unten nach oben) nachweisen läßt. Mit der Größenabnahme ist aber immer eine bedeutende Gestaltänderung verknüpft, auch verdient der Umstand, daß die Perigonialblätter, mit den Laubblättern verglichen, in sehr niedrigen Spiralen — dadurch kommt die Bechergestalt zustande — stehen, Beachtung. Bei den Polytrichum-, Dawsonia-, Polytrichadelphus- u. s. w. Arten ähneln die untersten Perigonialblätter in ihrer Gestalt noch sehr den Laubblättern, die wirklichen Perigonialblätter erinnern aber in nichts mehr recht an die letzteren, sie sind meist verkehrt-eiförmig und nur zu einem geringen Teil mit einer kleinen Anzahl von Lamellen ausgestattet. Perigonialblätter von dieser wechselnden Gestalt sind vorzüglich geeignet, einen allseitig gut schließenden „tiefen" Teller zu bilden, in dem ein tüchtiger Wassertropfen aufgenommen werden kann. Gerade der obere, sehr verbreiterte Blatteil der äußeren Perigonialblätter schließt allseitig den Teller von der Innenfläche und bringt in ausgezeichneter Weise einen lückenlosen Rand hervor. Wollte man sich diesen Teller aus den Laubblättern gebildet vorstellen, so wäre dazu, um den gleichen dichten Verschluß nach außen zu bewirken, eine sehr große Anzahl von Blättern erforderlich. Die Bildung des einheitlichen, lückenlosen Randes, wie ihn die gestaltlich so stark abweichenden äußeren Perigonialblätter herzustellen vermögen, könnten

---

[1]) Entwicklungsgeschichtliche und vergleichend-morphologische Angaben in Hofmeister, Über die Zellenfolge im Achsenscheitel der Laubmoose. Bot. Ztg., 1870. — Leitgeb, Die Antheridienstände der Laubmoose. Flora, 1882. — Goebel, Über die Antheridienstände von Polytrichum. Flora, 1882. — H. Satter, Zur Kenntnis der Antheridienstände einiger Laubmoose (Phascum cuspidatum, Archidium) Berichte der Deutsch. Bot. Ges., 1884. — F. Vaupel, Beiträge zur Kenntnis einiger Bryophyten. Flora 1903. Heft 3.

aber die Laubblätter nicht zustande bringen. Es zeigt dies Beispiel, daß die Natur mit geringem Aufwand an Material den denkbar größten Effekt erzielt und daß die Gestalt der Organe ohne ihre Funktion nicht verstanden werden kann.

Bringt man auf die männlichen Blütenbecher von Polytrichum piliferum Schreb. einen Tropfen Wasser, so bleibt dieser darin sehr lange Zeit erhalten, besonders wenn das Stämmchen in einer feuchtigkeitsgesättigten Atmosphäre kultiviert wird, der Verschluß durch die Perigonialblätter ist also ein sehr dichter. Hierfür sorgt eine besondere Einrichtung.

Auf Kosten der Rippe erfahren nämlich die Laminarteile des Blattes eine bedeutende Verbreiterung, vor allem im oberen Abschnitt. Diese Seitenflächen sind außerordentlich zart, sie vermögen sich aus diesem Grunde umso fester aneinander zu schmiegen, sodaß Wasser, welches in den Becher gelangt, nicht nach außen entweichen kann. Daß die Dichtigkeit des Verschlusses umso vollkommener sein muß, je zarter und demzufolge biegsamer die Laminarteile der Blätter sind, leuchtet ohne weiteres ein. In ähnlicher Weise adhärieren sehr dünne, durch eine Wasserschicht getrennte Glas- oder Glimmerlamellen, die man biegen kann, ohne daß sich ihr Zusammenhang löst. Eine seitliche Verschiebung ist ohne bemerkenswerten Aufwand an Kraft möglich, will man sie dagegen in einer zur Plattenfläche senkrechten Richtung auseinanderziehen, so begegnet dies denkbar größtem Widerstande. Die gewöhnlichen starren Laubblätter, die außerdem, wenn sie eintrocknen, noch eine besondere Bewegung ausführen, sind nicht imstande, einen derartig dichten Verschluß herzustellen, weil ihre Laminarteile zu starr sind und nicht bei Berührung mit entsprechenden Teilen anderer Blätter adhärieren würden. Von Interesse ist ja auch die Tatsache, daß den Blättern der Becher die Fähigkeit, besondere Bewegungen zur Herabsetzung der Transpiration auszuführen, gänzlich abgeht.

In der Knospenlage stehen die Blätter des Bechers aufrecht, sie schließen einen annähernd zylindrischen Hohlraum ein. Erst durch das Auseinanderweichen der Blätter wird die Schüsselgestalt des Bechers hervorgebracht. Es wird jetzt biologisch verständlich, warum vor allen übrigen Blättern des Bechers gerade die äußeren mit solch breiten Seitenflächen ausgestattet sind und warum gerade die breitesten Laminarteile den oberen Blattpartieen angehören. Bei Entfaltung der Blätter an der Peripherie müssen breite Flächen vorhanden sein, da diese am meisten sich voneinander entfernen. Die zarten Laminarteile, sich dicht deckend, verschieben sich seitlich und stellen mit den breiten, oberen Partieen einen lückenlosen Rand her, aus dem nur die Rippen als prächtig gefärbte Spitzen hervorragen.

Es drängt sich nun die Frage nach der biologischen Bedeutung dieser Antheridienbecher auf. Ihre Gestalt zeigt, daß es nicht gewagt ist, sie als Wasserbehälter aufzufassen. Bei der Antheridienentleerung spielt das im Becher aufgefangene Wasser ohne Zweifel eine wichtige Rolle. Nachdem die Perigonialblätter den Becher oder die vertiefte Scheibe gebildet haben, verharren sie dauernd in der von der Gestalt des Bechers geforderten Lage. Den Perigonialblättern fehlt, wie ich a. a. O. nachwies, das Schwellgewebe, sie können also nicht, wie die Laubblätter, longitudinale Bewegungen ausführen. Wie kommt es aber, daß sie sich nach außen bewegen, wenn das Gewebe, welches bei den Laubblättern durch sein eigentümliches Verhalten die Bewegungen bewirkt, bei den Perigonialblättern fehlt? Ich halte es für ausgeschlossen, daß diese Blätter selbständige Bewegungen ausführen

können, nehme im Gegenteil an, daß sie sich bei der Bewegung in radialem Sinne rein passiv verhalten und durch Kräfte, die in den inneren Teilen des Bechers ihren Sitz haben, auseinandergetrieben werden. Ich kann mir nicht denken, daß das Auseinanderweichen der Perigonialblätter etwa als Analogon zu der Art und Weise, wie sich die Blütenhüllblätter höherer Pflanzen öffnen, aufzufassen ist. Nach meinen Beobachtungen ist die Öffnung des Bechers auf die Volumenzunahme zurückzuführen, welche die zahlreichen Antheridien und massenhaft erzeugten Paraphysen im Laufe ihrer Entwicklung erfahren. Die Organisation der Antheridien und der gerade bei den Polytrichaceen hochdifferenzierte Bau der Paraphysen erscheinen uns in einem ganz anderen biologischen Lichte, wenn wir das Werden eines solchen Antheridienstandes zur Grundlage unserer Betrachtung machen und von den Verhältnissen, wie sie dessen fertiger Zustand darbietet, vollständig absehen. Auch bin ich keinen Augenblick im Zweifel darüber gewesen, daß hier die Beziehungen von Funktion und Form der Organe in ausgezeichnetster Weise zum Ausdruck gelangen. Es soll aber nicht bestritten werden, daß die den Paraphysen von anderen Forschern zugeschriebenen Funktionen ebenfalls von Bedeutung sind.

Auf den hohen Grad der Organisation der Paraphysen bei den Polytrichaceen ist bereits hingewiesen worden. Sie bilden bei zahlreichen Vertretern dieser Familie in ihrem oberen Teile Zellflächen, „welche nicht selten eine zweischneidige Scheitelzelle besitzen".[1]) In den männlichen Blüten von Dawsonia finden wir Übergänge zu den aus einem Zellfaden bestehenden Paraphysen der übrigen Moose, ich glaube aber, daß die Dawsonia-Arten, was ihre Paraphysen anbelangt, als die höchstorganisierten angesehen werden müssen. In morphologischer Beziehung halte ich sie mit Goebel für Rhizoiden, wie sie in den Blattachseln anderer Laubmoose anzutreffen sind; allem Anschein nach liegt eine funktionelle Anpassung vor.

Die Antheridien selbst sind von langgestreckter Gestalt und bei manchen Arten werden sie von unverhältnismäßig langen, nach oben sich allmählich verdickenden Stielchen getragen, wodurch eine deutlich keulenförmige Gestalt zustande kommt. Ich erinnere mich nicht, bei Laubmoosen je solche Antheridien gesehen zu haben. Vergegenwärtigen wir uns, daß die Antheridien durch Aufführung zahlloser Längs- und Querwände, also durch Bildung ebenso vieler Spermatozoiden erzeugender Zellen, an Umfang zunehmen, daß außerdem die massenhaft vorhandenen Paraphysen in ihrem oberen Teile sich durch Zellbildung flächenförmig vergrößern, so ist die natürliche Folge, daß sie nach den Seiten hin einen Druck ausüben müssen, der die vorher aufrechten Perigonialblätter in radialer Richtung auseinandertreibt. Im Zentrum des Blütenstandes erhebt sich außerdem der junge Sproß, der den zur Verfügung stehenden Raum noch mehr verkleinert, die unmittelbare Folge davon ist, daß Antheridien und Paraphysen zur Seite gedrängt werden und wiederum gegen die Perigonialblätter drücken. Wie es scheint, wird dadurch in den Perigonialblättern, besonders in den peripherischen, Energie in Form von Federkraft aufgespeichert, der bei der Entleerung der Antheridien eine gewichtige Rolle zufallen dürfte.

Nach der Publikation Vaupels muß die Akrandrie der Polytrichumantheridien als durchaus sicher festgestellt angesehen werden. Correns war der erste, der auf die in

---

[1]) Goebel, Archegoniatenstudien. Flora, Band 96, S. 19.

[2]) F. Vaupel, Beiträge zur Kenntnis einiger Bryophyten. Flora, 1903, S. 346—361.

den Blattachseln mancher Polytrichaceen vorkommenden ruhenden Astanlagen aufmerksam machte. In der Literatur findet sich keine Angabe, aus der hervorginge, daß sie schon früher beobachtet worden wären. Hofmeister und Leitgeb scheinen sie ebenfalls nicht gekannt zu haben. Wie schon mehrfach erwähnt, stehen sie bei Polytrichum commune L. in der Achsel des zwölften Blattes. Die beiden letztgenannten Forscher[1]) haben angenommen, daß „jede Antheridiengruppe" — die Antheridien stehen in zwei bis drei übereinander stehenden Reihen unterhalb je eines Blattes, untermischt mit den Paraphysen — „einen kaum in die Länge entwickelten Seitenzweig darstellt, dessen Scheitelzelle sich zur ersten Antheridie entwickelt". Stellen wir uns vor, die oberen Blätter eines Stämmchens von Polytrichum commune L. rückten, indem sie gleichzeitig die Form der Perigonialblätter annehmen, dicht zusammen, so werden damit auch die in den Blattachseln stehenden, ruhenden Astanlagen einander sehr genähert. Trägt eine solche Anlage, wie es bei Polytrichum commune L. der Fall ist, ein oder zwei winzige Seitenzweige, findet eine starke Reduktion dieser Zweige statt, entwickeln sich aus den Sproßscheitelzellen Antheridien und treten aus den Oberflächenzellen der auf wenige Zellen verkürzten Achsenteile Rhizoiden von der Form der Paraphysen hervor, so erhalten wir einen männlichen Blütenstand. In der Tat würden die Antheridien einen kaum irgend in die Länge entwickelten Seitenzweig darstellen, auch dürfte über die Homologie von Rhizoiden und Paraphysen kaum mehr ein Zweifel obwalten. Aus den Untersuchungen Vaupels ergibt sich, daß die Antheridien sich nicht gleichzeitig entwickeln und hieraus ist zu folgern, daß die Entleerung der Spermatozoidenmassen sich in zeitlichen Intervallen vollziehen muß. Eine solche Massenerzeugung von Spermatozoiden kommt meines Wissens, von Mnium u. e. a. abgesehen, bei anderen Laubmoosen nicht mehr vor. Die hochorganisierten Antheridienbecher der Polytrichaceen stehen offenbar mit der Spermatozoidenentleerung in engster Beziehung, ich erblicke in jenen eine Einrichtung, die eine ganz allmähliche Aussaat der Spermatozoiden ermöglicht, einem Brunnen vergleichbar, der das in seinem Innern kräftig emporsprudelnde Wasser über seinen Rand hinaus in einer dünnen Schicht nach allen Seiten abfließen läßt. Wie bekannt sein dürfte, bilden die männlichen Stämmchen unserer Polytrichum-Arten zusammenhängende Rasen, die von den Trägern der Archegonien, welche ebenfalls herdenweise zusammenstehen, räumlich weit getrennt sind. Ohne Zweifel liegt eine gleichzeitige Entleerung sämtlicher Antheridien nicht im Interesse der betreffenden Art. Ein starker Regenguß im Frühjahr würde die Spermatozoiden gewaltsam fortführen und verhindern, daß sie in den Anziehungsbereich des Archegoniums gelangen.

Das Auseinanderweichen der Blätter eines Antheridienstandes geht sehr langsam vor sich, wovon ich mich in der Natur und an Exemplaren, die ich zu Hause beobachtete, überzeugte. Bei Polytrichum piliferum Schreb. entsteht am apikalen Teil der Knospe eine kreisförmige Öffnung, durch die man in die Tiefe des Hohlraumes hinabsehen kann; hier erblickt man eine grüne Fläche, aus der sich die roten Spitzen der kleinsten Blätter deutlich abheben, alle übrigen Blätter liegen dicht aneinander und bilden die Wand des Hohlzylinders. Die äußeren Perigonialblätter weichen insofern von den typischen Laubblättern ab, als sie sich nicht einzeln aus dem Verbande der Knospe lösen, sondern, sich dicht deckend, die Bewegung nach außen ausführen. Es gleiten also nicht nur die Blätter

---

[1]) Nach Goebel, Organographie, Bryophyten, S. 369.

seitlich aneinander, sondern auch mit der ganzen Fläche in radialer Richtung, hierdurch wird die Dichtigkeit des Ganzen noch bedeutend erhöht. An einem Becher sind also zwei Arten von Blättern zu unterscheiden, eine Schicht äußerer, größerer Blätter, die seine Wand bilden, und eine Gruppe innerer, kleinerer, die mit Antheridien und Paraphysen gemischt den Boden zusammensetzen. An geeigneten Längsschnitten durch die Mitte des Antheridienstandes erkennt man leicht die noch von Antheridien, Paraphysen und kleineren Blättern umgebene Sproßspitze. So lange sich oben am Antheridienstand nur eine kleine Öffnung befindet, kann diese, falls die Knospe eintrocknet, noch geschlossen werden, später ist dies bekanntlich nicht mehr der Fall. Es vergeht geraume Zeit, bis jene Öffnung durch Zusammenneigen der obersten Perigonialblätterabschnitte verschwindet. Ganz im Gegensatz dazu büßen die oberen Laubblätter sehr schnell ihr Wasser ein, in der Trockenstellung drücken sie mit großer Kraft von allen Seiten her gegen die Wand der Perigonialblätter. In diesem Zustand kann man die Knospe mit einem Ei vergleichen, das von zahlreichen Krallen umfaßt wird, die alle an demselben ihre Kraft zur Geltung bringen. Der Verschluß der Öffnung würde natürlich mit größerer Geschwindigkeit vor sich gehen, wenn die von den Antheridien, Paraphysen, den kleinen Perigonialblättern und von den verbreiterten „Blütenboden" festgehaltenen Wassermengen sich nicht sehr langsam in Wasserdampf verwandelten. Auch ist die zwischen den Perigonialblättern wirkende Adhäsionskraft — durch eine Wasserschicht veranlaßt — sehr bedeutend, sie hört erst auf zu wirken, wenn das Wasser auch zwischen ihnen vergast ist; unter dem Drucke der oberen Laubblätter bewegen sie sich alsdann um einen geringen Betrag gleichmäßig nach innen, die Laubblätter liegen auch im lufttrockenen Zustand der Knospe sehr fest an, sie würden sich gleich den Laubblättern anderer Polytrichaceen im unbehinderten Zustand noch sehr weit über die definitive Lage hinausbewegen, wie ich durch Versuche ermittelte. An anderer Stelle habe ich bereits erwähnt, daß nur die größeren Perigonialblätter nach der Spitze hin Lamellen tragen. Hat die Eintrocknung an den exponierten oberen Abschnitten dieser Blätter um die Öffnung herum begonnen, so bleibt diese doch noch sehr lange Zeit erhalten, obwohl man das Gegenteil erwarten sollte. Die Ursache hierfür finde ich in dem Verhalten der Lamellen, weiter in der Fähigkeit der dicken Blattspitze, Wasser längere Zeit festzuhalten und schließlich in der Annahme, daß diese schön rot gefärbten Zellen an und für sich das Wasser sehr schwer abgeben. Unter normalen Verhältnissen bewegt sich eine Säule Wasserdampf im Hohlraum der Knospe aufwärts und gelangt durch die Öffnung ins Freie.[1]) Ein Teil wird aber sicher von den Lamellen, an denen er vorbeistreicht, wieder nutzbar gemacht, d. h. kondensiert, so daß sich die Verhältnisse der Turgeszenz in der Knospenspitze nicht ändern. Erst, wenn nach langer Zeit alles Wasser in Gasform durch die Öffnung entwichen ist, verlieren es auch die Lamellen. Dann neigen sich die obersten Perigonialblätterabschnitte[2]) wie die Zähne bei einer Primulakapsel zusammen, die Öffnung wird geschlossen. In der Natur mag dieser Fall nur sehr selten eintreten, weil die Antheridienentwicklung an die feuchte Jahreszeit gebunden ist.

---

[1]) Einen anderen Weg nimmt der Wasserdampf sicher nicht.

[2]) Dieser mit Lamellen versehene Teil ist morphologisch die Spreite, das größere Stück die Scheide. Es bleibt also der schwach entwickelten Spreite eine gewisse Bewegungsfähigkeit erhalten.

In welchem Zustande der Entwicklung befindet sich der jugendliche Sproß, wenn sich bereits an der Spitze der Knospe eine Öffnung gebildet hat? Wie weit sind die Antheridien und Paraphysen in der Entwicklung fortgeschritten? Die Antheridien haben noch keineswegs ihre Reife erlangt, die flächenförmigen Paraphysenteile — die dreischneidige Scheitelzelle ist sehr gut zu sehen — haben ebenfalls ihre definitive Ausbildung noch nicht erreicht. Der junge Sproß ist noch kurz, seine Länge mag ungefähr die Hälfte der Antheridienlänge ausmachen. In diesem Stadium kann er noch keine Wirkung nach den Seiten hin ausüben, erst wenn er sich mit dem breiteren Teil in die Höhe schiebt — scheinbar natürlich! —, ist er imstande, dies zu tun. Er wächst sehr schnell in die Länge sein Anteil an der Entleerung der Antheridien ist kaum in Zweifel zu ziehen.

Es vergingen mehrere Wochen, bis die Öffnung des Antheridienstandes an den zu Hause kultivierten Exemplaren den Durchmesser von 1 mm oder etwas darüber erreicht hatte. Da der Standort, von welchem das Beobachtungsmaterial herrührte, in nicht allzu großer Entfernung von meiner Wohnung lag, so war es möglich, öfter die männlichen Rasen in der Natur zu beobachten. Ich konnte feststellen, daß der Öffnungsvorgang der Antheridienbecher in der Natur nicht schneller sich vollzog als zu Hause. Bei der Untersuchung der Antheridien fand ich, daß die Öffnungskappe an ihnen bereits scharf durch die Konturen der Zellwände hervortrat, auch hatten die Paraphysen ihr Wachstum abgeschlossen. Reif waren aber die Antheridien noch nicht.

Versucht man, einen kleinen an der Spitze einer Nadel hängenden Wassertropfen durch die ca. 1 mm weite Öffnung des Bechers in dessen Höhlung einzuführen, so ist dies ein vergebliches Bemühen, weil die in den Hohlraum eingeschlossene Luft das Eindringen des Tropfens verhindert. Daraus ergibt sich, daß die Öffnung des Bechers erst einen gewissen Betrag erreichen muß, bis Wasser, beispielsweise Regentropfen, die Luft vertreiben und deren Raum einnehmen können. In dem geschilderten Zustand vermögen die apikalen Teile der Perigonialblätter den Becher noch vollständig zu schließen.

Die Beobachtungen in der Natur beweisen, daß einige Antheridien ihren Inhalt schon zu einer Zeit entleert haben müssen, wenn der bei weitem größte Teil der in einem Becher vereinigten männlichen Geschlechtswerkzeuge sich noch in sehr unreifem Zustande befindet, denn überall begegnet man jugendlichen Sporophyten mit bereits voll entwickelter Seta, obwohl die größte Mehrzahl der Antheridien noch nicht reif ist. Es ergibt sich hieraus, daß die Aussaat der Spermatozoiden sich über einen sehr langen, mehrere Monate umfassenden Zeitraum erstreckt.

Archegonien.

Die Bryophyten sind typische Archegoniaten. Charakteristisch für sie ist der Bau der weiblichen Sexualorgane und der scharf ausgeprägte Generationswechsel. An dem Archegonium sind zwei Teile zu unterscheiden, ein in der Regel langgestreckter Halsteil und ein Bauchteil, der die Eizelle einschließt. Bei den Laubmoosen ist meist noch ein Stiel vorhanden, der insofern für die Entwicklung der embryonalen Generation von Bedeutung ist, als sich der Embryo in ihn einbohrt und so schon im jugendlichen Zustand des Sporophors für dessen Befestigung und Ernährung Sorge trägt. Abweichungen irgendwelcher Art von dem normalen Typus des Archegonienbaues sind mir bei den Polytrichaceen nicht begegnet.

Wie bei allen Laubmoosen, so schließt auch bei den Polytrichaceen die Achse ihr Wachstum mit der Entwicklung eines Archegoniums ab, die Potytrichaceen sind sämtlich akrogyn.

Goebel hat bereits darauf aufmerksam gemacht, daß, wie bei vielen diöcischen Laubmoosen, auch bei den Polytrichaceen, z. B. Dawsonia, die weiblichen Pflanzen die männlichen Exemplare oft an Größe und durch kräftigere Gestaltung der vegetativen Organe übertreffen. Bei mehreren einheimischen Formen, z. B. Polytrichum piliferum Schreb., tritt dieser Größenunterschied ziemlich deutlich hervor, ein Gleiches darf auch von vielen Polytrichadelphus-Arten behauptet werden.

Die Möglichkeit, daß auch manche Polytrichaceen, besonders solche, deren Stämmchen mit üppigem Rhizoidenfilz umgeben und zu sehr dichten und zugleich ausgedehnten Rasen vereinigt sind, sogenannte „Zwergmännchen" hervorbringen könnten, war von vornherein nicht ausgeschlossen, ich habe aber solche trotz eifrigen Suchens nicht auffinden können.

Es gibt eine nicht geringe Anzahl diöcischer Laubmoose, deren männliche Pflanzen bisher nicht bekannt geworden sind. Hierher gehören u. a. zahlreiche einheimische und exotische Campylopus-Arten. Bei der Untersuchung mancher ausländischer Arten dieser Gattung glaube ich im Wurzelfilz der Blätter, des Stämmchens und in den Zwischenräumen zwischen den Haubenbechern (Fig. 62) die seltsamen „Zwergmännchen" beobachtet zu haben, die bei einer nicht geringen Anzahl Dicranum-Arten, bei Leucobryum glaucum L., Fissidens bryoides L. und anomalus, Macromitrium und Schlotheimia, Hypnum aureum und fallax Brid. — bei dieser Art sind solche bisher nicht gefunden worden, wohl aber dem sehr nahestehenden Amblystegium filicinum De Not.[1]) —, Camptothecium lutescens B. et S., Dicnemon calycinum und in gewissem Sinne auch bei Buxbaumia[2]) nachgewiesen worden sind.

Leucobryum vulgare L. und Dicranum scoparium Hedw. bringen außer den „Zwergmännchen" auch männliche Pflanzen von gewöhnlichem Aussehen hervor. Goebel erblickt in dem Vorkommen von „Zwergmännchen" die Folgen ungünstiger Ernährungsbedingungen; an der Richtigkeit dieser Auffassung ist nicht zu zweifeln. Bei Leucobryum vulgare L. beispielsweise fällt ein großer Teil der Sporen auf die außerordentlich dichten, kissenförmigen Rasen und bleibt darin hängen. Nährstoffe stehen nur in geringer Menge zur Verfügung, sie reichen aber hin, um das kümmerliche „Zwergmännchen" aufzubauen und zu ernähren. Schnell schreitet es zur Erzeugung weniger kleiner Blätter und zur Entwicklung der Antheridien. Wesentlich günstiger liegen ohne Zweifel die Verhältnisse bei den auf freie Stellen des Waldbodens niederfallenden Sporen. Nährstoffe in Lösung stehen in hinreichender Menge zur Verfügung, an Licht ist kein Mangel, es entsteht ein kräftiges

---

[1]) Rabenhorst, Kryptogamen-Flora, Band IV, 3, S. 302.

[2]) Diesbezügliche Literatur: Goebel, Archegoniatenstudien, Flora, Band 96, Heft 1, S. 55—56, ders. in Archegoniatenstudien, Flora, Band 76 (Ergänzungsband), S. 92, ders. in Organographie, Bryophyten, S. 370 (Buxbaumia); Fleischer, Die Musci der Flora von Buitenzorg, Band II, S. 402, 427 (Macromitrium-Arten und Schlotheimia); Philibert, Les fleurs mâles du Fissidens bryoides L., in Revue bryologique 1883, S. 65; Gümbel, Der Vorkeim, in Nova acta acad. Leop.-Carol., Vol. XXIV, pars II, S. 627 (Camptothecium lutescens und Hypnum aureum); Roth, Die europäischen Laubmoose, Band 1, S. 276 (Dicranum scoparium); Rabenhorst, Kryptogamen-Flora, Band IV, 1 (Dicranum spurium Hedw. Bergeri Bland., undulatum Ehrh., Bonjeani De Not., neglectum Jur. et Milde, Mühlenbeckii Bryol. Eur. und scoparium Hedw., S. 344—354).

Stämmchen, das, nachdem es eine gewisse Höhe erreicht hat, zur Entwicklung der Antheridien übergeht. Wie ungünstig gestellt sind im Vergleich hierzu die „Zwergmännchen“ bezüglich der Belichtung! In den Wurzelfilz der dichten Polster können nur sehr geringe Lichtmengen vordringen. Man muß sich aber trotzdem wundern, daß an solch wenig günstigen Stellen trotzdem ein „Zwergmännchen“ zustande kommen kann. Untersuchen wir den Rhizoidenfilz von Leucobryum vulgare L., so finden wir darin stets Erdteilchen und Reste organischer Art, aus diesen zieht das „Zwergmännchen“ seine Nährstoffe.

Es ist durchaus kein Zufall, daß z. B. bei den zweihäusigen Arten der Sektion „Dicranum im engeren Sinne“ „Zwergmännchen“ auftreten. Diese kleinen, männlichen Pflänzchen vermögen eben nur an solchen weiblichen Exemplaren ihre Entwicklung durchzumachen, die ihnen für ihr wohl sehr kurzes Dasein einige Existenzbedingungen zu bieten in der Lage sind. Hierzu befähigt sind in erster Linie jene „Dicranum-Arten in engerem Sinne“, weil in einem mächtig entwickelten, dichten, feuchtigkeitsstrotzenden Rhizoidenfilz die Sporenkeimung sich vollziehen und aus den allerdings in bescheidenem Maße zur Verfügung stehenden Nährstoffen im weiteren Verlaufe der Entwicklung das „Zwergmännchen“ seine Organe aufbauen kann. Bei Dicranum maius mit seinen ausgezeichnet sichelförmigen Blättern, seinem mächtigen Filz, seinem lockerrasigen Wuchs haben die herabfallenden Sporen keinen Halt, sie werden vom Regen fortgespült und erzeugen normale, wenn auch schlankere männliche Stämmchen. „Zwergmännchen“ dürfen wir also vor allem bei dichtrasigen, starkfilzigen Bryophyten erwarten, besonders auch bei den in vieler Beziehung interessanten Campylopus-Arten. Bei diesen ist ja die Sporenausstreuung insofern eine höchst eigentümliche, als die Sporogonien, deren Deckel und Haube bei zahlreichen Arten im Grunde des weiblichen „Blütenbechers“ zurückbleiben (Fig. 62), mit ihrer nach unten gekehrten Mündung sich nicht hoch über den letzteren erheben. Die weitaus größte Sporenmenge fällt hier sicher in den Becher und die Blätter hinab, die wie die Stämmchen oft sehr reichlichen Rhizoidenfilz besitzen. Der Nachweis, daß auch die Campylopus-Arten sehr oft „Zwergmännchen“ hervorbringen, wird nicht lange auf sich warten lassen.

Die Unterschiede in der Größe zwischen männlichen und weiblichen Pflanzen derselben Art können, wie das Beispiel der „Zwergmännchen“ zeigt, sehr bedeutend sein, „eine Verschiedenheit, welche sich bei einer Anzahl von Moosen bis zur Bildung von „Zwergmännchen“ steigert“.[1])

Man pflegt die nach der Befruchtung des Archegoniums oben am Stämmchen oder an der Vaginula sich weiter entwickelnden Blätter seit jeher als Perichätialblätter zu bezeichnen. Bei allen mir bekannten Laubmoosen unterscheiden sich diese von den typischen Laubblättern in folgenden Punkten: Die Perichätialblätter weichen gestaltlich nicht unbedeutend — ich erinnere an Dicnemon, Dichelyma und Paludella — von den Laubblättern ab, andernfalls hätte man für sie nicht eine besondere Bezeichnung gewählt. Weiterhin übertreffen sie zum Teil die Laubblätter sehr oft an Länge und unterscheiden sich von diesen ganz auffallend durch ihre mehr aufrechte Stellung. In der Regel vollzieht sich außerdem bei ihnen eine Reduktion des oberen Teils zu Gunsten des meist scheidenartig vergrößerten basalen Abschnitts, der den Grund des Sporophors mantelartig umschließt.

---

[1]) Goebel, Archegoniatenstudien, Band 96, Heft I, S. 58.

Auch ist darauf hinzuweisen, daß ihr feinerer anatomischer Bau oft sehr erheblich von dem der Laubblätter differiert.

Daß die Perichätialblätter Organe besonderer Art sind und daß sie eine besondere Aufgabe zu erfüllen haben, kann nur der bestreiten, der in ihnen weiter nichts als eine eigenartige Form der Laubblätter zu sehen gewöhnt ist. Funktion und Form stehen aber auch bei den Perichätialblättern, wie ich nachzuweisen gedenke, in innigster Beziehung. Sie wachsen mit der embryonalen Generation und gehören zu ihr, wenn auch nur in biologischem Sinne. Man hat in ihnen ein Organsystem zu erblicken, dessen Aufgabe darin besteht, die Entwicklung des Sporogons sicherzustellen. Sie ahmen in auffälliger Weise die Gestalt einer Knospe nach, aus deren Mitte sich die sporenerzeugende Generation erhebt. Mit der Vergangenheit, als welche Protonema und das aus ihm hervorgesproßte beblätterte Stämmchen aufzufassen sind, haben sie gleichsam vollständig gebrochen, ihre Sorge ist der Zukunft gewidmet, der embryonalen Generation. Von ihr werden sie offenbar in ihrer Entwicklung beeinflußt, von ihr müssen Reize ausgehen, die durch die höchst eigentümliche morphologische Ausbildung der Perichätialblätter ausgelöst werden.

Versuchen wir zunächst die Frage nach der Bedeutung der aufrechten Stellung der Perichätialblätter zu beantworten, indem wir in erster Linie die Polytrichaceen ins Auge fassen. Bei unseren einheimischen und zahlreichen exotischen Polytrichum- und Pogonatum-Arten, bei Dawsonia und Polytrichadelphus, überhaupt bei allen Formen, deren Xerophilie nicht angezweifelt werden kann, liegen die Perichätialblätter dem unteren Teil der Seta dicht an, es entsteht dadurch, daß die sehr stark verbreiterten und verlängerten Scheidenteile dieser Blätter einander umfassen, ein Hohlzylinder,[1]) der den unteren Abschnitt des Sporophyten fest umschließt. Im trockenen wie im feuchten Zustand bleibt der Zusammenhang der Perichätialblätterscheiden gewahrt, weil diese unbeweglich sind. Die Adhäsion solch zarter Gewebeflächen, wie sie in den häutigen, hyalinen Scheiden vorliegen, ist vor allem auch bei Benetzung mit Wasser sehr groß. Dadurch wird ein hoher Grad von Stabilität erzielt, diese trägt dazu bei, den Sporophyten zu stützen, ihn in seiner aufrechten Lage zu erhalten. Umklebt man eine biegsame, ihrer ganzen Länge nach aufgerissene Metallröhre, z. B. eine Gardinenstange dicht mit Papier, so wird dadurch die Biegsamkeit ganz bedeutend verringert. Der Vergleich ist ja nicht durchaus zutreffend, immerhin aber ist der Erfolg, wie er durch Wasser bei dem Zylinder der Perichätialblätter gezeitigt wird, ein ähnlicher. Die mit Lamellen ausgestatteten Spreitenteile sind stark reduziert, eine gewisse, wenn auch geringe Beweglichkeit bleibt ihnen aber erhalten, wovon man sich überzeugen kann, wenn man die Laubblätter beseitigt und eintrocknen läßt.

Aus einer entsprechend großen Anzahl von Laubblättern kann ein derartiger Hohlzylinder aus naheliegenden Gründen nicht hergestellt werden. Eine Haupt-Vorbedingung für dessen Zustandekommen ist der Umstand, daß Scheide und Spreite ungefähr gleichgerichtet sind; vorteilhaft ist außerdem, wenn die Blätter von außen nach innen (unten nach oben), wie es auch der Fall ist, an Größe abnehmen und die Insertionsstellen möglichst nahe beieinander liegen. Diese Vorbedingung und Anforderungen finden wir bei den Perichätialblättern vieler Polytrichaceen erfüllt.

---

[1]) Vgl. auch Goebel, Archegoniatenstudien. Flora, Band 96, Heft I, S. 49 (Über Dicnemon calycinum und semicryptum).

Dem Perichätium fällt aber außer der erwähnten Aufgabe meines Erachtens noch eine andere, weit wichtigere zu. Das zarte Gewebe des in der Regel vergrößerten unteren Blattabschnittes gestattet dem Wasser, das durch die nach oben gerichteten Blätter aufgefangen wurde und nach unten abfloß, leicht den Zugang zu den Zellen der sich entwickelnden embryonalen Generation, denn diese besitzt offenbar nicht die Fähigkeit, gleich den vegetativen Teilen des Individuums längere Zeit der Trockenheit ohne Schaden zu überstehen. Von oben kommendes Wasser können nur nach oben gerichtete und für die Fortleitung nach unten entsprechend eingerichtete Blätter auffangen. Die sparrig zurückgekrümmten Blätter von Paludella squarrosa L., Hylocomium squarrosum B. et S., Dicranella squarrosa Stke., die Hypnum-Arten aus der Aduncagruppe sind nicht dazu geeignet. Ihre Perichätialblätter strecken sie aber alle dem Himmel entgegen und so erfüllen sie ihre Aufgabe im Dienste des Sporophors. Das Perichätium ist ein Organ im besten Sinne des Wortes, seiner Funktion entspricht auch die Gestalt der Blätter, die es zusammensetzen.

Es muß dahingestellt bleiben, ob zwischen den häutigen hyalinen Blattscheiden von Polytrichum commune L., formosum Hedw., juniperinum Willd. u. a. Wasser in größerer Menge festgehalten werden kann. Daß es hier aber in flüssiger Form lange erhalten bleibt, dürfte außer Frage stehen. Wenn man aber die anatomischen Verhältnisse von Querschnitten durch die Scheidenteile vieler Arten in Rücksicht zieht, so gewinnt man die Überzeugung, daß auch zwischen den zarten Zellflächen Wasser gespeichert werden kann. Mechanisch wirkende Elemente (Fig. 37 c) sind nicht vorhanden, denn die mechanische Festigkeit wird durch den Zylinder selbst gewährleistet. Alle Membranen sind durchaus gleichartig und sehr zart. Besäßen alle Perichätialblätter im Scheidenteil einen Querschnitt, wie ihn Fig. 37 c unten vorführt, so würden sich bei Benetzung die breiten dünnen Säume dicht aneinander legen. Wesentlich anders liegen aber die Verhältnisse, wenn zwei Blätter von den Querschnittsformen, die durch Fig. 37 c vorgeführt werden, zur Kombination gelangen. Wir sehen, daß bei Fig. 37 c, α die sonst einschichtigen Säume dreimal von zweischichtigen Zelllagen unterbrochen werden. Denke ich mir Querschnitt α an Querschnitt β (Aus Versehen fehlt der Buchstabe β) herangeschoben, sodaß sie sich berühren, so werden durch die vorspringenden Zelllagen des Querschnitts Hohlräume hervorgebracht. Ich möchte nicht unterlassen, auf die annähernd symmetrische Lage der vier Zellen auf Querschnitt α hinzuweisen.

Mit einer ziemlich starken Lupe läßt sich, da die häutigen Säume der Perichätialblätter dem Lichte den Durchgang leicht gestatten, feststellen, daß die Rhizoidenbildung zwischen den einzelnen Blättern eine ziemlich bedeutende ist. Die Rhizoiden, welche oft verzweigt sind und bisweilen auch die an dem Kalyptrafilz so deutlich hervortretenden rankenartigen Krümmungen an ihren Enden zeigen, erscheinen wie die Reiser eines Besens. Sie sind sehr lang und nehmen eine aufrechte Lage ein, bilden also nicht an der Basis eine Ansammlung.

B. Der Sporophyt.

Der Sporophyt der Laubmoose, jenes höchst seltsam gebaute Organ, das allen vergleichend-morphologischen Deutungen sich bisher in mehr als einer Beziehung als unzugänglich erwiesen hat,[1] — die Homologie mit der „fertigen" Farnpflanze ist seit Hofmeisters grundlegenden Untersuchungen über allen Zweifel erhaben — führt bekanntlich zeitlebens ein parasitisches Dasein auf dem beblätterten Stämmchen. Bei den Polytrichaceen erreicht der Sporophyt einen sehr hohen, wenn nicht den höchsten Grad der Organisation, die große Reihe der Laubmoose bietet meines Erachtens kein Analogon dar.

Es ist nicht zu verwundern, daß sich das Interesse der Forscher seit jeher in so reichem Maße an den Polytrichaceen betätigte, da diese durch ihre eigenartige Organisation förmlich zu eingehendstem Studium nach den verschiedensten Richtungen hin aufforderten. So bleibt denn, was den Sporophyten anbelangt, nur noch wenig nachzutragen übrig. Unsere Kenntnis der anatomischen Verhältnisse des Sporophyten darf als durchaus vollständig angesehen werden, auch in Bezug auf die Entwicklungsgeschichte sind die Untersuchungen durch die jüngste Publikation Goebels[2]) zu einem befriedigenden Abschluß gebracht worden. Soweit ich zu sehen vermag, besteht noch eine Unklarheit hinsichtlich der Frage, ob bei den nacktmündigen Psilopilum-Arten ein Mundbesatz angelegt wird oder nicht. Zu den gymnostomen Formen dieser Gattung gehören Psilopilum gymnostomulum C. M.,[3]) pygmaeum C. M., Ulei Broth.[3]) und Bellei Broth. Bei keiner dieser Arten habe ich eine Peristomanlage nachweisen können, unser europäisches Psilopilum glabratum besitzt ein Peristom mit durchaus ungleich ausgebildeten Zähnen, es scheint eine Mittelstellung zwischen den gymnostomen Vertretern und solchen mit gut ausgestattetem Mundbesatz einzunehmen.

Ein reiches Feld der Beobachtung bot die Untersuchung des Sporophyten nach der biologischen Seite hin, vergleichende Seiten- und Umblicke nach anderen systematisch mehr weniger fernstehenden Bryophytenformen ließen sich aber nicht vermeiden.

Die Methode der biologischen Betrachtungsweise ergibt sich von selbst. Wir beginnen am unteren Ende des Fußes und steigen allmählich zur Deckelspitze empor. Dabei drängt sich die Überzeugung auf, daß die Zahl der bisher unbekannt gebliebenen Einzelheiten sich zusehends in der angegebenen Richtung vermindert, wie es auch begreiflich ist, da doch gerade der Sporogonteil die Aufmerksamkeit der Forscher mehr in Anspruch nahm als der basale Abschnitt der embryonalen Generation.

Wie bei allen Laubmoosen wächst auch bei den Polytrichaceen die Eizelle nach der Befruchtung durch Aufführung neuer Wände zu einem Embryo heran, der eine deutliche Polarität des Wachstums zu erkennen gibt. Sein unterer Teil, später als Fuß bezeichnet, ist positiv geotrop[4]) und bohrt sich tief in das zentrale Gewebe des Stämmchens ein, wogegen die obere, später in Seta und Sporogon zerfallende Partie dem Lichte zustrebt. Aus

[1]) Es sei vor allem auf das Peristom und den Deckel hingewiesen.

[2]) Goebel, Archegoniatenstudien. In Flora, Band 96, 1906, Heft I, S. 19—45.

[3]) Besonders genau untersucht wurden Psilopilum gymnostomulum C. M. und Ulei Broth.

[4]) Diesen Terminus im weitesten Sinne gefaßt.

dem Gewebe, das den Fuß umschließt, entsteht die spätere „Vaginula“, die bei weiterem Wachstum des Sporophyten zum größten Teil als Haube in die Höhe gehoben wird. Wir kennen die Kräfte nicht, welche die Polarität des Wachstums des Embryos bedingen, es dürfte auch sehr schwierig sein, ihnen nachzuspüren und genügend Klarheit zu schaffen. Dieser Umstand sollte nun aber nicht die Veranlassung sein, auf die Lösung dieser physiologischen Frage a priori zu verzichten.

Die Gestaltungsverhältnisse des Fußes der von mir untersuchten Polytrichaceen stehen mit dem anatomischen Aufbau der Seta in innigster Beziehung, Seta wie Fuß lassen nämlich eine scharfe Sonderung des Gewebes in einen peripherischen und zentralen Abschnitt deutlich erkennen.

Bei allen Polytrichaceen bildet eine vom übrigen Gewebe sich scharf abhebende peripherische Lage kleinerer, dickwandiger Zellen die äußerste Schicht des Fußes (Fig. 38 I und II a). Diese Zellen sind sämtlich mit ihrer periklinen Außenmembran in zentrifugaler Richtung ausgebaucht, wodurch eine größere Oberfläche erzielt wird (Fig. 38 I und II b). Beim Übergang zur Seta tritt diese Konvexität der Außenwände immer mehr zurück. Auf diese Schicht folgen weiter nach innen Zellen von prosenchymatischer Gestalt (Fig. 38 I und II c) und mit schief gestellten Querwänden (Fig. 38 I d), an diese schließen sich sehr weitlumige, mehr rectanguläre Zellen an (Fig. 38 I und II e), alsdann kommen wieder länger gestreckte Elemente mit merklich dünneren Membranen (Fig. 38 I u. II f), schließlich bilden sehr langgestreckte Zellen von zweierlei Form das Innere des Fußes (Fig. 33 I und II g), von denen die innersten äußerst dünnwandig und englumig sind, diese stellen den eigentlichen Zentralstrang dar. Das Durchlüftungssystem (Fig. 38 II h) ist gut entwickelt.

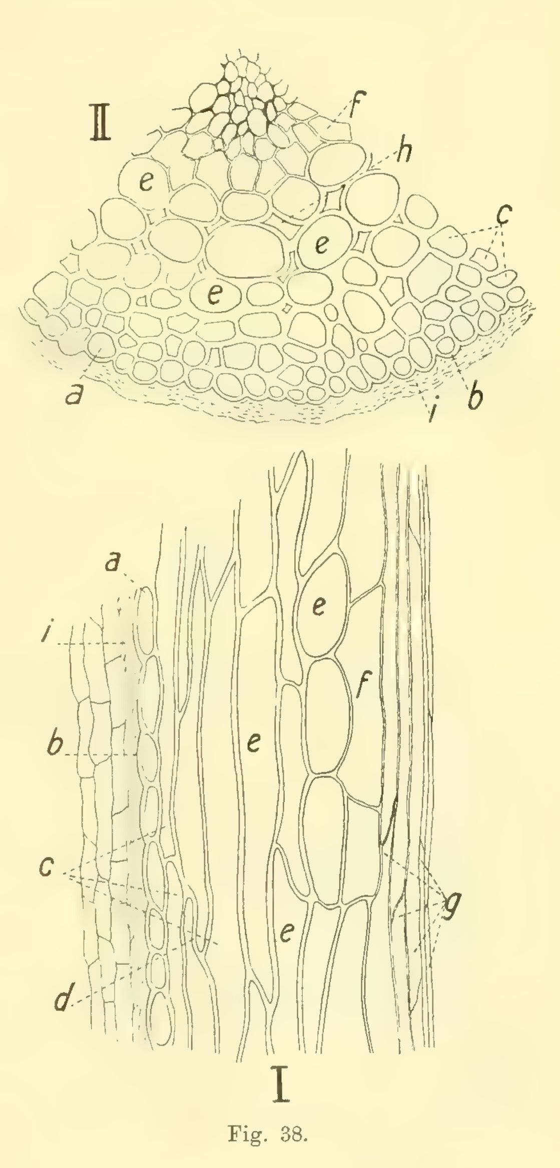


Fig. 38.

Es ist klar, daß sich dem Fuße beim Eindringen in den zentralen Teil des Stämmchens erhebliche Widerstände entgegenstellen, die Arbeit, die der Fuß bei der Besitzergreifung zu leisten hat, ist sicher nicht gering. Wie wir sehen werden, ist er dazu aber auch in hohem Grade befähigt. Die bereits erwähnten, nach außen vorgewölbten,

starken, widerstandsfähigen Zellen der Peripherie zerstören nämlich beim Vordringen des Fußes die zarten, an sie anstoßenden Zellen des Stämmchens, sie wirken einer Feile vergleichbar, in vielen Fällen werden mehrere Zellschichten des Stämmchens zerstört, diese lösen sich auf und bilden schließlich einen schleimigen Hohlzylinder um den Fuß (Fig. 38 I, II i.) In dieser schleimigen Umhüllung sieht man deutlich die Reste der teils aufgelösten, teils zerrissenen Membranen. Der zentrale, besonders wohl der Wasserleitung dienende Strang wird gegen Kollaps durch die übrigen, mechanisch sehr festen Zellkomplexe geschützt. Der peripherische Teil des Stämmchens, der sich zur Vaginula entwickelt, ist aber mechanisch so sehr gefestigt, daß ein Zerreißen dieses Zylinders durch die zweifelsohne vorhandenen, zentrifugal wirkenden Kräfte, die im Fuß wirksam sind, unmöglich ist.

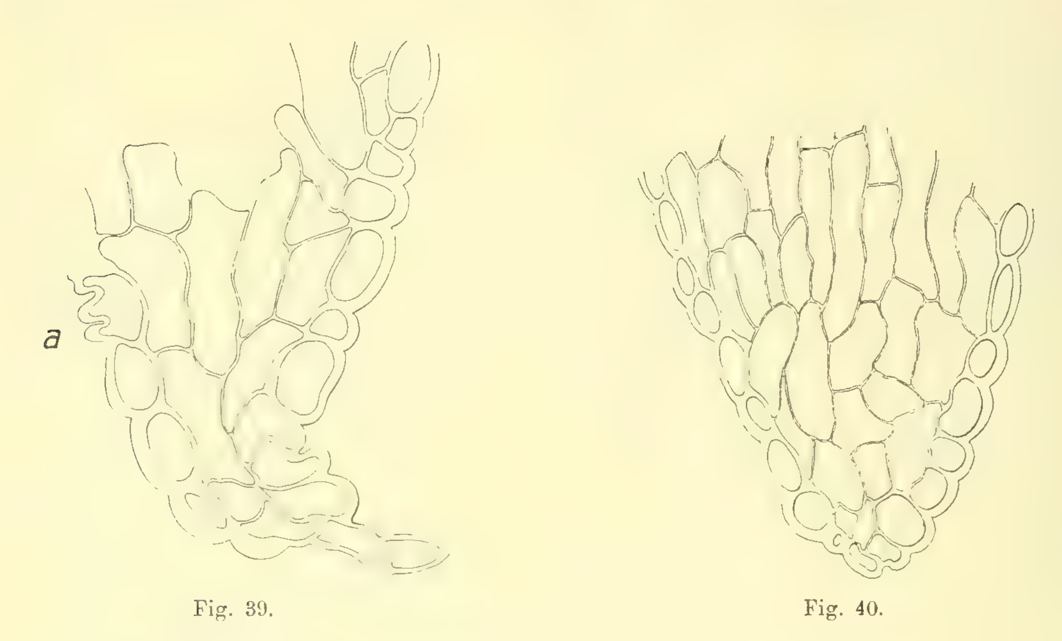


Fig. 39. Fig. 40.

Die kräftigsten Zellen des Fußes liegen aber nahe der Spitze (Fig. 39, 40). Diese wirkt wie ein Pfahl und erobert leicht das Terrain. Die Natur verfolgt also hier dasselbe Prinzip wie der Mensch, der, wenn er einen Stamm im Boden befestigen will, ihn zunächst zuspitzt und eventuell mit einer Eisenspitze versieht, damit das zugespitzte Ende leichter eindringen kann und auf seinem Wege in die Erde nicht beschädigt wird.

Ganz glatt verläuft nun der Kampf des Fußes nicht immer. Die ihm entgegenarbeitenden Widerstände sind oft so groß, daß er sich zu Konzessionen herbeilassen muß, die sich dadurch zu erkennen geben, daß die peripherischen Außenwände mehrfach verbogen werden (Fig. 39 a).

Die Entwicklung des Fußes und des zu Seta und Sporogon heranwachsenden Teils des Sporophyten hält wohl bei allen Moosen nicht gleichen Schritt. Zeitlich eilt die Ausbildung des Fußes der der Seta und des Sporogons weit voraus. Wenn die beiden letztgenannten Teile des Sporophyten sich noch in den Anfängen ihrer Entwicklung befinden, hat der Fuß bereits schon seine definitive Ausbildung erlangt. Es liegt dies auch durchaus im ernährungsphysiologischen Interesse der embryonalen Generation. Die Aufgabe des

Fußes besteht, darüber kann kein Zweifel obwalten, weniger darin, dem Sporophyten einen festen Halt im Stämmchen zu verleihen, vielmehr ist er, wie auch allgemein angenommen wird, ein Organ, dem die Aufsaugung und Fortschaffung der Nähr- bzw. Baustoffe für die noch zu entwickelnden Teile des Sporophyten als Aufgabe zufällt. Wenn auch ein Teil der Nahrung durch das assimilierende Gewebe des fertigen Sporogons selbst erworben werden kann, so muß doch die Zufuhr der meisten Nähr- und Baustoffe durch den Fuß bewerkstelligt werden, zumal die Entwicklung der Spaltöffnungen, falls solche vorhanden sind, doch erst sehr spät erfolgt. Die Herbeischaffung von Wasser und der zum Aufbau des Sporogons nötigen Stoffe geschieht durch den Fuß, dessen Zellen größtenteils dicht mit Inhalt gefüllt sind. Zur Zeit der Sporenbilung mag ja auch die assimilatorische Tätigkeit des Sporogons von Bedeutung sein, ich vermag sie aber nur gering einzuschätzen, zumal alle die zahlreichen Polytrichaceen aus der Sectio Aporotheca keine Stomata besitzen.

Versucht man die entwickelten Sporogone samt Seta und Fuß aus dem Stämmchen herauszuziehen, so ist der Aufwand einer nicht unbedeutenden Kraft erforderlich, woraus hervorgeht, daß die Verbindung des Fußes mit dem Stämmchen eine recht feste ist. In der Regel aber gelingt es verhältnismäßig selten, einen Sporophyten unversehrt herauszuziehen, meist reißt die Seta an der Übergangsstelle zum Fuße ab. Es wäre aber verfehlt, wenn man behaupten wollte, eine solch feste Verankerung des Fußes sei erforderlich, damit derselbe in einem durchaus sicheren Fundament ruhe. Ich neige durchaus der Ansicht zu, daß hierdurch der Fuß in eine feste Lage gebracht werden soll zu dem ihn umgebenden Gewebe, ohne welches er seine Aufgabe als Saugwerkzeug nicht erfüllen kann. Hierfür glaube ich durch die Ergebnisse meiner Untersuchungen den Wahrscheinlichkeitsbeweis erbringen zu können.

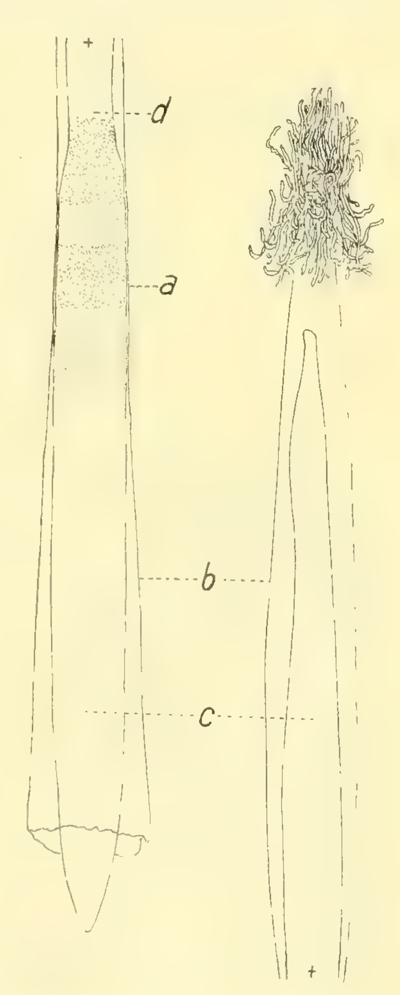


Fig. 41.

Bei den von mir untersuchten Polytrichaceen liegt die Vaginula, die wie erwähnt, aus überaus kräftigen Zellen gebildet ist, dem Sporophyten da besonders dicht an, wo wir die Übergangsstelle von Fuß zu Seta zu suchen haben. Sie bildet hier einen längeren, äußerst dicht schließenden zylindrischen Ring, der nach unten sich erweitert. Der von dieser Stelle an abwärts sich verdickende Fuß (Fig. 41) reißt, wenn man den Sporophyten herausziehen will, hier (Fig. 41 a) ab, weil die kräftigere Vaginula nicht nachgibt. Durch diesen engeren, hohlzylindrischen Teil des Scheidchens wird der Sporophyt in einer unverschiebbaren Lage festgestellt, denn weiter unten ist der Fuß, wie bereits mitgeteilt, von einer Schleimhülle umgeben, in der von einer sicheren Lage nicht gesprochen werden kann.

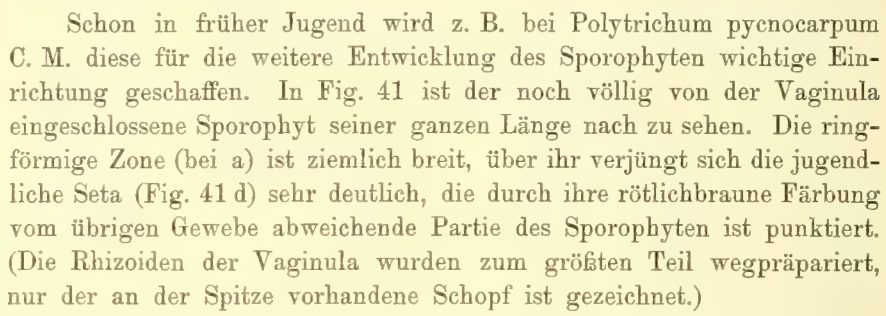
Aber noch in einem anderen Punkte besteht in den

Verhältnissen der Vaginula und des Fußes bei allen untersuchten Laubmoosen eine Übereinstimmung. Da wo die Seta gleichsam in panzerartiger Umschließung durch die Vaginula in den Fuß sich fortsetzt, zeigt sich überall eine deutlich sichtbare Veränderung in der Färbung der Membranen der peripherischen Fußzellen und oft auch des benachbarten Gewebes des Scheidchens (Fig. 42 a). Im Gebiete des Ringes weisen die Zellen des Fußes eine rötlichbraune Färbung auf, die nach unten gänzlich verschwindet, nach oben aber meist einer helleren Abstufung von Braun Platz macht. Dieser bei zahllosen Laubmoosen zu beobachtende gemeinsame Zug muß unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nehmen. Ich will nicht behaupten, daß meine Deutung die richtige ist, möchte aber doch nicht unterlassen, sie mitzuteilen.



Fig. 42.

Der Fuß ist wie erwähnt, in eine Schleimhülle eingehüllt. Fehlte nun diese Ringstelle der Vaginula, so würde zweifellos der Fuß in einem ringförmigen Spalt mit der Außenwelt in Verbindung treten. Das im Schleim vorhandene Wasser würde leicht verdampfen, was durch den hermetischen Verschluß verhindert wird, und diesen bilden nach meinem Dafürhalten die gebräunten Zellen. Ich nehme an, daß sie für Wasser wenig durchlässig sind.



Schon in früher Jugend wird z. B. bei Polytrichum pycnocarpum C. M. diese für die weitere Entwicklung des Sporophyten wichtige Einrichtung geschaffen. In Fig. 41 ist der noch völlig von der Vaginula eingeschlossene Sporophyt seiner ganzen Länge nach zu sehen. Die ringförmige Zone (bei a) ist ziemlich breit, über ihr verjüngt sich die jugendliche Seta (Fig. 41 d) sehr deutlich, die durch ihre rötlichbraune Färbung vom übrigen Gewebe abweichende Partie des Sporophyten ist punktiert. (Die Rhizoiden der Vaginula wurden zum größten Teil wegpräpariert, nur der an der Spitze vorhandene Schopf ist gezeichnet.)

Bei der Mehrzahl der Laubmoose kommt es zur Ausbildung eines Fußes von der Gestalt eines einfachen Pfahls, diese Form dürfen wir wohl als die typische ansehen. Viele Polytrichaceen aber, u. a. alle einheimischen Pogonatum-, Polytrichum- und Catharinaea-Arten, zeigen eine Komplikation insofern, als das untere Fußende hackig umgebogen ist. Anfänglich wollte es mir nicht gelingen, über die Ursache dieser Erscheinung ins Klare zu kommen. Der Fuß hat wohl die Kraft, bis zu einer gewissen Tiefe ins Stämmchen vorzudringen. Es gelingt ihm leicht, das zartere, jüngere Gewebe des Stämmchens zu durchsetzen, später aber zwingen ihn die resistenteren Zellen des älteren Stämmchengewebes zur seitlichen Abbiegung, ähnlich wie ein Nagel, der in der Wand auf einen Stein trifft, sich an seiner Spitze umbiegt.

Es läßt sich nicht leugnen, daß die anatomischen, besonders aber die biologischen Verhältnisse des Fußes bei den Bryophyten bisher eine recht stiefmütterliche Behandlung erfahren haben. Im Innern des Stämmchens verborgen, gehört er nicht zu den ohne weiteres ins Auge fallenden Teilen, auch bietet er für die oberflächliche Betrachtung weit mehr Hindernisse als alle übrigen Werkzeuge der Moospflanze. Seine Eigentümlichkeiten, seine Verbindung mit den Stämmchen sind nur durch das Studium von Längs- und Quer-

schnitten zu ermitteln. Ich habe es mir deshalb nicht versagen können, einen Seitenblick zu werfen in andere, den Polytrichaceen nicht zugehörige Glieder der Bryophytenreihe.

Wenn Diphyscium und Buxbaumia hinsichtlich des Baues ihres Fußes eine Sonderstellung einnehmen, so darf man sich darüber nicht wundern. Beide Gattungen lassen sich an keiner Stelle im System einfügen, sodaß ihnen, wie eingangs erwähnt, eine Sonderstellung eingeräumt werden muß. Die Aufgabe des Fußes als Haustorium tritt bei den bizarren Formen jener zwei Gattungen so recht klar hervor, er entsendet nämlich von seiner Oberfläche dicht gedrängt stehende, gegliederte und verzweigte Fäden von schlauchartiger Gestalt, die mit ihren Endzellen sich an das Stämmchengewebe anlehnen.[1]) Der Fuß gleicht also der Wurzel einer höheren Pflanze in vieler Beziehung, als Analogie zu den Wurzelhaaren müßten die verzweigten Fäden aufgefaßt werden.

Bei Diphyscium foliosum Mohr, das ich genauer untersuchte, liegen die peripherischen dickwandigen Zellen nicht mehr an der Außenfläche des kegelförmigen Hauptteils, sie sind vielmehr an das äußerste Ende der Rhizoiden — denn als solche müssen die in Frage kommenden Fäden angesehen werden — selbst gerückt. Bei Anwendung geeigneter Tinktionsmittel nimmt die pheripherische Zone der Rhizoiden (Fig. 43 a) besonders stark den betreffenden Farbstoff auf, sodaß sie deutlich hervortritt. Die Zellen sind besonders reich an Inhaltsstoffen, hier findet ohne Zweifel eine Speicherung der durch das Stämmchen erzeugten Assimilate statt, die alsdann ihren Weg durch die Rhizoiden in zentripetaler Richtung nehmen, um durch den zentralen Teil des Fußes dem Sporogon zugeführt zu werden. An dieser Partie des Fußes (Fig. 43 b) ist nicht wie bei Dawsonia Victoria C. M. eine besondere Gewebedifferenzierung zu beobachten, gestreckte Zellen von annähernd gleicher Länge, die im basalen Teil des Sporogons sich verkürzen und inhaltsreicher werden, — von einer Seta kann ja wohl kaum gesprochen werden — setzen ihn zusammen.

Die in Betracht kommenden Fäden zeigen das Bestreben, den durch ihr Vordringen geschaffenen Raum des Stämmcheninnern nach Kräften auszunützen. Sie wachsen unter spitzem Winkel (Fig. 43 c) gegen die zentrale Partie an der Innenseite des kurzen Scheidchens empor und bedecken sie mit einer

Fig. 43.

[1]) Goebel, Flora, 1892, Ergänzungsband, S. 103.

weniger mächtigen Schicht. Der Rand der Vaginula ist aus Zellen mit gebräunten Membranen (Fig. 43 d) gebildet, die sich bei Zusatz von Methylenblau z. B. sehr intensiv färben. An der Innenseite reicht diese gebräunte Gewebeschicht genau bis zu der Stelle (Fig. 43 e), wo die Rhizoidenschicht ihr oberes Ende erreicht. Auch der Fuß ist in dieser Gegend in seinem peripherischen Teil von einer Zone von Zellen mit gebräunten Wänden gebildet, die auffälligerweise gerade bis dahin sich erstrecken (Fig. 43 f), wo die höchsten Rhizoiden am Fuße entspringen. Wie bei Dawsonia Victoriae C. M. ist auch bei Diphyscium foliosum Mohr im peripherischen Teil des Fußes eine Schleimschicht vorhanden, die wie bei jener Art durch die geschilderte Einrichtung gegen Wasserverlust geschützt wird.

Recht eigenartig liegen die Verhältnisse des Fußes bei einem Laubmoose, das wahrscheinlich von Buchanan entdeckt und von Hooker[1]) zuerst als Pterogonium ambiguum beschrieben wurde.[2])

Die Archegonien entstehen in auffallend großer Anzahl an dem später gewölbten Scheitel eines kurzen Seitenzweiges. In der Regel wird nur ein Archegonium befruchtet, höchst selten sind es deren zwei. Liegen die Hauptachse der sehr kurzen Seta und der sehr kurzen Kolumella ungefähr auf derselben Geraden, so ist das Sporogon gerade gestielt, bilden die Achsen, wie es oft der Fall ist, einen Winkel, so dürfen wir es als schief gestielt bezeichnen. Dieser letzte Fall tritt immer ein, wenn ein von dem höchsten Punkt des Stämmchenendes seitlich gelegenes Archegonium befruchtet wird. Es muß auffallen, daß das Sporogon stets in seiner Längsachse vertikal gerichtet ist, wie ich an sehr zahlreichen Längsschnitten beobachten konnte. Daß schon in früher Jugend diese Lage eingenommen wird, ist selbstverständlich. Wir finden das mächtige Sporogon tief in die außerordentlich dicht anschließenden Perichätialblätter eingesenkt, es wird von diesen förmlich in seiner definitiven Lage festgehalten. Dünne Längsschnitte, welche seitlich der Hauptachse des Stämmchens und Sporogons geführt wurden, sodaß also letzteres nicht mehr durch den Fuß mit ersterem fest verbunden war, lieferten den Beweis, daß die Perichätialblätter wie mit Federkraft ausgestattet, das Sporogon frei schwebend festhielten. Ich möchte nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß auch die Färbung der Perichätialblätter, soweit sie mit ihrem unteren Teile das Sporogon umfassen, eine von den oberen Teilen stark abweichende ist. In den basalen und mittleren Partieen finden wir eine dunklere Färbung als an den oberen, nicht an das Sporogon anstoßenden Teilen. Meines Erachtens handelt es sich hier um eine durch das Licht hervorgebrachte Eigentümlichkeit. In den oberen Teilen kann das Licht in mehr ungestörter Weise, wenn ich mich so ausdrücken darf, seinen Weg durch die Blätter nehmen, was weiter unten nicht der Fall ist. Wir müssen also das Sporogon für die dunklere Färbung verantwortlich machen, nicht aber annehmen, daß hier eine vererbte Eigenschaft der Perichätialblätter vorliegt. Übrigens kann man bei sehr zahlreichen Vertretern der Bryophyten dieselbe Beobachtung machen, es handelt sich also um eine weitverbreitete Einrichtung, die eine verschiedene biologische Deutung zuläßt.

---

[1]) W. J. Hooker, Musci Nepalenses; or Descriptions of several Mosses from Nepal. Transact. of the Linn. Soc., Vol. 9, p. 310, tab. 26.

[2]) Bridel, Bryologia universa p. 154, erhob später diese Art zur Gattung Cleistostoma. Das von Hooker publizierte Habitusbild gibt nur eine schlechte Vorstellung von dem Aussehen dieser Art. Viel besser ist die von Brotherus gelieferte Abbildung in Engler-Prantl „Natürliche Pflanzenfamilien“.

Wahrscheinlich hat diese Einrichtung, so einfach sie erscheint, doch mehrere Aufgaben im Leben des betreffenden Individuums zu erfüllen.

Was nun den Fuß von Cleistostoma ambiguum Brid. anbelangt, so ist zunächst dessen bedeutender Umfang hervorzuheben (Fig. 44 a). Im medianen Längsschnitt hat er eine verkehrt-keulenförmige Gestalt, wie sie von keinem Laubmoos bisher bekannt geworden ist (Fig. 44). Der Fuß nimmt einen weiten Raum ein, infolge seines Eindringens erweitert sich das Stämmchenende bedeutend und erhält eine kugelförmige Oberfläche. Die den Fuß bildenden Zellen sind sehr groß, die mittleren etwas länger (Fig. 45) als die seitlichen — sie repräsentieren den Zentralstrang — und mit zarten Membranen[1]) versehen. Nur die äußeren Zellwände (Fig. 46 a) sind bedeutend verdickt und stark nach außen gewölbt, wodurch eine größere Oberfläche erzielt wird. Bei seinem Vordringen in das Stämmchen drückt der Fuß dessen zartes Gewebe zusammen, es entsteht auch hier die schon mehrfach erwähnte Schleimschicht. Daß der Fuß in dem seitlich gelegenen Gewebe des Stämmchens nicht dieselben „Verwüstungen“ anrichten kann wie an seinem breiten Grunde, versteht sich bei richtiger Beurteilung der Umstände von selbst.

Nach Brotherus bringt Cleistostoma ambiguum Brid. zweigestaltige Sporen hervor. Ich habe aber nur eine Art vorgefunden. In allen untersuchten Sporogonien fand ich aber das reich verzweigte Mycel eines Pilzes, das unzählige Conidien abgeschnürt hatte, die überall in der Kapsel verbreitet waren und auch an der Außenwand der Sporen hafteten, sodaß diese dadurch ein papillöses Aussehen erhielten. Ich zweifle

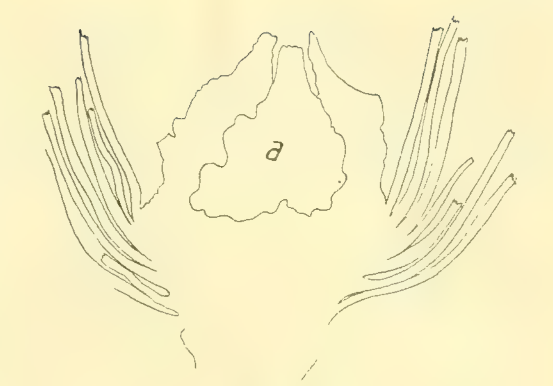


Fig. 44.

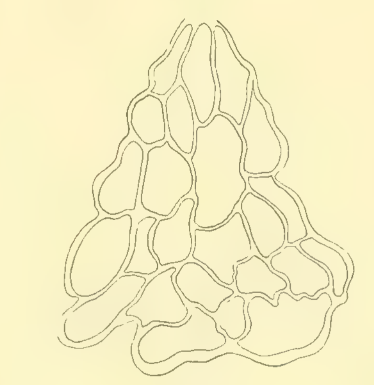


Fig. 45.



Fig. 46.

[1]) Die beigefügten Figuren sind zum Teil nach Schnitten gezeichnet, die mit Kalilauge behandelt worden waren.

nicht daran, daß Brotherus diese Conidien für die kleinere Sporenform gehalten hat. Etwas Ähnlichem begegnen wir auch im Sporogon von Sphagnum.

Eine von der gewöhnlichen Form stark abweichende Ausbildung des Fußes tritt uns bei den im System tiefstehenden Arten von Phascum, Mildeella und Archidium entgegen. Bei diesen ist das in Frage kommende Organ meist keulig bzw. kugelig angeschwollen. Dieser Form des Fußes begegnen wir aber auch, wie ich an Cleistostoma ambiguum Brid. zeigte, bei systematisch höher stehenden Laubmoosen, beispielsweise fand ich bei Gigaspermum repens Hook., einer in vieler Beziehung sehr interessanten Art, die zu den Hedwigiaceen gestellt wird,[1]) habituell jedoch den cleistokarpischen Bryineen sehr nahe steht, einen Fuß von ausgesprochen traubenförmiger Gestalt (Fig. 47), dessen peripherische Zellen mit sehr verdickten und nach außen stark vorgewölbten Außenmembranen versehen sind, wogegen die Innenzellen sehr zarte Wände besitzen; diese Elemente kann man in ihrer Gesamtheit als Zentralstrang auffassen. Die Angabe Limprichts,[2]) „er — der Fuß der Laubmoose nämlich — besitzt an seiner Peripherie dünnwandige, sich vorwölbende Zellen", ist in dieser Allgemeinheit durchaus falsch.

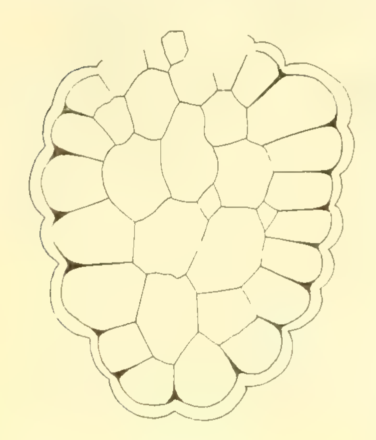


Fig. 47.

In der „Organographie"[3]) und in den zuletzt veröffentlichten „Archegoniatenstudien" hat Goebel auf die höchst eigenartigen Organisationsverhältnisse von Eriopus cristatus Hedw. und remotifolius C. M. hingewiesen und die Entwicklungsgeschichte der erstgenannten Art ausführlich dargelegt.

Wie Goebel richtig bemerkt, macht der Fuß eines frei präparierten Embryos von Eriopus cristatus Hedw. durchaus den Eindruck einer Seta, die an ihrem oberen Ende ein Gebilde von kapselähnlichem Aussehen trägt. Alle von mir untersuchten Eriopus-Arten, z. B. E. Zürnianus C. M., setigerus Mitt. stimmen in dem angeführten Punkte mit jenen Formen überein. Es tritt auch hier überall außerordentlich klar hervor, daß der Fuß in der Entwicklung allen übrigen Teilen des Sporophyten voraneilt. Die Organisation des Fußes bei den Eriopus-Arten muß als eine in jeder Beziehung eigenartige bezeichnet werden und hat, soviel mir bekannt ist, in anderen Verwandtschaftskreisen der Laubmoose ihresgleichen nicht mehr. Der Fuß ist nämlich aus sehr großen, zartwandigen, — nur die periklinen Außenwände sind etwas verdickt — großkernigen und protoplasmareichen Zellen gebildet und stellt einen schlaffen Schlauch dar, dem alle Einrichtungen mechanisch wirkender Art, wodurch sein Eindringen in den stielförmigen Teil — von Goebel Archegonienstiel genannt — erleichtert wird, fehlen. Bei allen von mir untersuchten Eriopus-Arten, auch bei Eriopus cristatus Hedw., dringt der Fuß fast bis zur Basis des Archegonienstiels vor; diese Tatsache veranlaßte mich unter Berücksichtigung des Umstandes, daß dem Fuß alle Waffen zur Einbohrung fehlen, noch einmal die bereits von Goebel in ihren Grundzügen

[1]) Engler-Prantl, Natürliche Pflanzenfamilien, Lieferung 222, S. 718.

[2]) Rabenhorst, Kryptogamen-Flora, Band IV, Abt. I, S. 41.

[3]) Siehe Goebel, „Archegoniatenstudien", S. 67. Flora, Band 96, Heft I.

festgestellte Entwicklungsgeschichte des Sporophyten genau zu untersuchen. Ich habe mich aber auf die letztgenannte Art nicht ausschließlich beschränkt, habe vielmehr eine ganze Anzahl von Eriopus-Formen untersucht, weil von einer vergleichenden Untersuchung die besten Resultate zu erwarten waren. Es sei schon jetzt mitgeteilt, daß alle Eriopus-Arten bezüglich der Entwicklung des Sporophyten in allen wesentlichen Punkten übereinstimmen.

Gelegentlich der Schilderung der Entwicklungsgeschichte des Sporophyten von Gottschea Blumei macht Goebel[1]) darauf aufmerksam, daß „das Sporogon sich nicht einfach in die unverändert bleibende Sproßachse hineinbohrt. Man sieht auf Längsschnitten durch Stämmchen, welche befruchtete Archegonien tragen, daß weit unterhalb des Embryos das Gewebe, welches er verdrängen will, vorgebildet ist. Es ist sehr zartwandig und von dem peripherischen, welches dann den Embryo als schützende Hülle umgibt, deutlich verschieden. . . Offenbar ist also der Vorgang der, daß infolge der Befruchtung (wie dies auch sonst bei Lebermoosen vorkommt) auf das embryonale Gewebe unterhalb des Archegoniums ein Reiz ausgeübt wird, der es zu den erwähnten Differenzierungserscheinungen (die ich hier nicht aufführe, L.) veranlaßt. Das Sporogon findet also seinen Weg in die Sproßachse schon vorgezeichnet. Auf Seite 109 äußert sich der genannte Forscher weiter über die Bohrarbeit des Fußes von Gottschea Blumei folgendermaßen: Man kann deutlich verfolgen, wie beim Einbohren des Sporogons die Zellen der Sproßachse sich voneinander loslösen, ausgesogen und desorganisiert werden. Es ist auch am unteren Ende des Embryos ein besonderes Bohrorgan vorhanden, ausgezeichnet durch verdickte, wie gequollen erscheinende Zellwände. Dieses Bohrorgan ist aber offenbar der Hauptachse nach nicht mechanisch tätig, sondern scheidet Stoffe aus, welche auf das Sproßgewebe eine auflösende Wirkung ausüben". Diese Angaben halte ich, mit Ausnahme des letzten Punktes, für zweifellos richtig. Auch bei der Entwicklung des Sporophyten von Polytrichum- und Pogonatum-Arten, von Cleistostoma ambiguum Brid. und anderen Arten habe ich die Entstehung eines zartwandigen Gewebes unterhalb des Embryos feststellen können und dieselben Erscheinungen beobachtet, wie sie Goebel für Gottschea Blumei angibt. Anderer Ansicht bin ich hingegen bezüglich des umgebogenen Endes des Fußes des genannten Lebermooses, ein Analogon liegt bei zahlreichen Polytrichum- und Pogonatum-Formen vor, worüber ich mich bereits oben geäußert habe. Will der Fuß tiefer ins Stämmchen eindringen, als das zartwandige Gewebe reicht, so findet er in den älteren Zellen einen großen Widerstand, der die Umbiegung zur Folge hat.[2])

In seiner Abhandlung „Über einige mechanische Einrichtungen im anatomischen Bau von Polytrichum juniperinum"[3]) macht Firtsch in Bezug auf die Befestigung des Sporogons Angaben, die ich nicht unwidersprochen lassen kann. Er nimmt nämlich an, daß der Fuß der genannten Art Einrichtungen besäße, die es verhinderten, daß das Sporogon, besonders zur Zeit der Reife, aus der Vertiefung des Stämmchens herausgezogen werde. Er sagt

[1]) Goebel, Archegoniatenstudien. Flora, Band 96, Heft I, S. 111.

[2]) Siehe auch Haberlandts Mitteilungen über die Beziehung zwischen dem Zentralstrang des Stämmchens und dem Sporogonfuß. Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Laubmoose. Pringsheims Jahrb. f. wiss. Bot., 1886, S. 387—388.

[3]) Berichte der Deutsch. Bot. Ges., 1883, S. 93—95.

bezüglich des Fußes des Sporogons folgendes: „Die Vorwölbungen der Außenwandungen bedingt nicht nur eine Vergrößerung der absorbierenden Flächen, sondern erhöht auch die Reibung des Fußes an der Innenfläche der Vaginula. Diese letztere ist gleichfalls mit Höckerchen versehen, welche allerdings mehr vereinzelt sind, die aber doch zur Erhöhung des Reibungswiderstandes beitragen dürften. Diese Höckerchen bestehen aus einzelnen größeren Zellen von birnförmiger Gestalt, welche aus der zweiten oder dritten Zellschicht von innen gezählt gegen den Fuß zu wachsen, die darüber befindlichen Zellen zur Seite drängen und wahrscheinlich resorbieren.

Bisweilen erscheinen diese dünnwandigen, aber stark turgeszierenden Höckerchen gefächert. Ob ihre angedeutete mechanische Funktion die einzige ist, welche ihnen zukommt, oder ob sie nicht auch in ernährungs-physiologischer Beziehung eine Rolle spielen, kann hier nicht entschieden werden.“

Die von Firtsch erwähnten Vorwölbungen des Fußes und die eigenartigen birnförmgen Zellen sind weiter nichts als Absorptionswerkzeuge, mit der mechanischen Befestigung aber haben sie nichts zu tun. Die birnförmigen Zellen, die, wie erwähnt, bisweilen gefächert sind, müssen als schwache Anzeigen von Rhizoidenbildung aufgefaßt werden, die bei Diphyscium foliosum Mohr zu sehr kräftiger Entwicklung gelangt (siehe Fig. 43).

Wie ich gezeigt habe, eilt die Entwicklung des Fußes der der übrigen Teile des Sporophors stark voraus. Die Entwicklung der Seta und des Sporogons nimmt erst ihren Fortgang, nachdem der Fuß seine volle Ausbildung erlangt hat. Dieser wird, wie ich dargelegt habe, schon in früher Jugend so fest in das Stämmchen eingekeilt und durch besondere Einrichtungen so straff in der erforderlichen Lage gehalten, daß die Vorwölbungen als Mittel zur Befestigung gar nicht in Betracht kommen können.

„Die Seta ist in das Stämmchen geradezu eingekittet“, schreibt Firtsch. Polytrichum juniperinum unterscheidet sich aber von den übrigen Arten dieser Gattung und anderen Polytrichaceen-Formen in keiner Weise, sein Fuß steht ebenfalls in einem Schleimzylinder, der durch die Zerstörung von Zellen bei seinem Vordringen und durch eigene Absonderung einer ähnlichen Substanz hervorgebracht wird. Die Möglichkeit, daß ein junges oder erwachsenes Sporogon durch äußere Gewalten aus dem Stämmcheninnern herausgezogen werden könnte, ist vollständig ausgeschlossen, diese Gefahr tritt niemals an einen Sporophor heran.

Unsere Kenntnis der Entwicklungsgeschichte des Eriopussporophyten erfährt, wie ich im folgenden zeigen werde, eine wesentliche Bereicherung durch Aufdeckung der Beziehungen, die zwischen dem Sporophyten, insbesondere seinem Fuße zu dem, was Goebel den Archegonienstiel nennt, bestehen. Auf Seite 65 seiner „Archegoniatenstudien“ bildet Goebel (Fig. 41 I) ein befruchtetes Archegonium ab, das oben mit breiten Papillen bedeckt ist. An seiner Basis stehen drei unbefruchtete Archegonien. Das, was Goebel den „Archegonienstiel“ nennt, ist zu Beginn der Entwicklung noch nicht vorhanden, denn der Archegonienstiel hat nur eine geringe Kürze, wie die Figur zeigt. Ich behalte aber den Ausdruck „Archegonienstiel“ bei, um mich deutlich ausdrücken zu können. Dieser Stiel (Fig. 48b) entsteht erst nach der Befruchtung, in ihn bohrt sich der Fuß des Embryos ein (Fig. 48c), was zur Voraussetzung hat, daß der Stiel ebenfalls in die Länge wächst. Bewege ich Dolch und Scheide mit beiden Händen um ungefähr denselben Betrag gegeneinander, so schiebe ich die Scheide über den Dolch und zugleich den Dolch in die Scheide.

Anders verhält sich die Sache, wenn ich die Scheide in der linken Hand festhalte und mit der rechten den Dolch einführe. Auf den Vorgang bei Eriopus paßt das zuerst angewandte Bild. So ist es dem waffenlosen, schlaffen Fuße möglich, eine feste Basis zu gewinnen, sein Wachstum und die Streckung des Stieles ergänzen einander vortrefflich. In diesem Falle kann auch von einer Zerstörung benachbarten Stielgewebes durch den Fuß nicht die Rede sein, weil dieser, auch wenn er die z. B. für Dawsonia Victoriae C. M. beschriebenen mechanischen Hilfsmittel besäße, gar keine Verwendung dafür haben würde, denn der wachsende Stiel umschließt ihn um denselben Betrag, um den er sich selbst verlängert, jedenfalls ein höchst eigenartiger Vorgang.

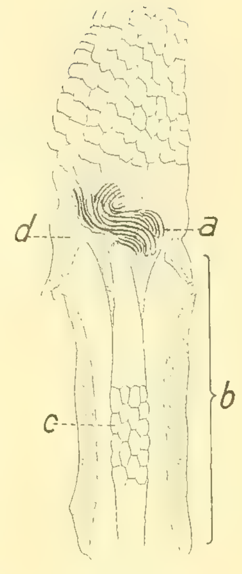


Fig. 48.

Bei allen Eriopus-Arten, z. B. E. Zürnianus C. M., Jellineki C. M., remotifolius C. M., setigerus Mitt., cristatus Hedw., ist die Seta erwachsener Sporophyten an ihrem Übergang zum Fuß eigentümlich hin- und hergebogen. In früher Jugend schon tritt, wie Goebel nachwies,[1]) diese Verbiegung ein, sie ist also eine dauernde Eigentümlichkeit des Sporophyten. Goebel äußert sich über das Zustandekommen dieser Krümmung folgendermaßen: „Man könnte sich dieses dadurch zustande gekommen denken, daß man annimmt, der Embryo verlängere sich rascher als das Epigon, er biege sich deshalb an der Stelle, wo das Epigon ihn am wenigsten fest umhüllt, und diese Biegung bedinge dann die weiteren Erscheinungen.“ Es kann kein Zweifel darüber obwalten, daß ausschließlich rein mechanische Ursachen die Krümmung am basalen Ende der Seta bedingen. Goebels Vermutung führt ja die Erscheinung ebenfalls auf mechanische Ursachen zurück, ich vermag mich ihr aber nicht anzuschließen. Durch ausgedehnte Untersuchungen konnte ich über die Entstehungsursache der Krümmung folgendes in Erfahrung bringen. Das Epigon wächst, wie Goebel annahm, zu gewissen Zeiten der Entwicklung langsamer in die Länge als der von ihm umschlossene Embryo, die Folge davon ist, daß der Embryo sich irgendwo krümmt. Nun fragt es sich, worin liegt es begründet, daß das Epigon nicht gleichen Schritt mit dem Wachstum des Embryos hält? Diese Frage war nicht leicht zu beantworten, da die Kleinheit des Objekts für die Untersuchung ins Gewicht fiel, derartige Untersuchungen auch an und für sich zu den schwierigeren gehören.

An der fertigen Haube der von mir untersuchten Eriopus-Arten sind schon im jugendlichen Zustand des Sporophyten zwei Teile sehr deutlich zu unterscheiden, ein oberer, je nach der Art mit besonderen Eigentümlichkeiten ausgestatteter, und ein unterer Abschnitt, dessen langgestreckte Zellen in Form von einzelnen Fransen oder Fransenbüscheln vom basalen Rand des oberen Kalyptraabschnitts herabhängen. Diese untere Partie der Haube ist es, welche in jugendlichem Alter die Streckung des oberen Epigonteils, aus dem ja zum größten Teil die obere Kalyptra hervorgeht, verhindert und die Biegung des unteren Setenteils verursacht. Wie die Entwicklungsgeschichte lehrt, geht der untere Haubenteil aus der Gesamtheit der Oberflächenzellen des unteren Epigonteils, des Arche-

[1]) Siehe die Abbildungen in Flora, Band 96, Heft I, S. 66.



Fig. 49.

gonienstiels, hervor, der in seiner ganzen Erstreckung als Vaginula bezeichnet werden darf. Der basale Haubenabschnitt löst sich als Hohlzylinder von der Peripherie des Archegonienstiels los; damit hängt es zusammen, daß in der Jugend die Fransen bis zur Basis des Stiels hinabreichen (Fig. 49). Ist der Zusammenhang zwischen Archegonienstiel und Fransenpartie aufgehoben, so kann sich der obere Epigonteil mit den Fransen nach oben strecken. Der obere Epigonteil erscheint als Luftballon, der vermittelst zahlreicher, starker Taue, der Fransen, unten am Archegonienstiel festgehalten wird. Löst sich die Verbindung, so kann das Fliegen beginnen. Eine weitere Folge der Zugwirkung ist, daß der vorher gerade und wachsende Embryo gezwungen wird, sich zu biegen; dies geschieht bei allen Arten an einer ganz bestimmten Stelle, der Basis der Seta (Fig. 48a). Es leuchtet ein, daß durch diese seitliche Ausbiegung des Embryo ein größerer Raum in Anspruch genommen wird, zumal außerdem an jener die Rhizoiden entstehen, die später in oft sehr mächtiger Ausbildung teilweise unter dem Sporogon wahrzunehmen sind. Das noch jugendliche, biegsame und wohl auch dehnbare Gewebe des Epigons wird durch die Krümmung des Embryos nach außen gedrückt, wodurch eine ringförmige, vorspringende Zone am Epigon hervorgebracht wird (Fig. 50 a, b, c). Immer noch wirken die Zugkräfte der basilaren Haubenpartie, unteres und oberes Epigon drücken in einer bestimmten Schicht aufeinander und es entsteht ein Wulst, der am deutlichsten am oberen Rand des Archegonienstiels hervortritt und von Goebel als Vaginularkragen bezeichnet wird (Fig. 50 d, e, f). Aber auch der obere Epigonabschnitt besitzt einen solchen Kragen, der sich jedoch nicht in der charakteristischen Weise wie der am Archegonienstiel umlegen kann, weil an ihm die noch nicht von letzterem befreiten Fransenzellen einen Zug nach unten ausüben. Innerhalb des Kragens entsteht ein braun gefärbtes, äußerst sprödes Gewebe, das mit den gebräunten Elementen im späteren basalen Setenteil im großen ganzen übereinstimmt. In dieser Gewebepartie des Kragens tritt die Trennung zwischen unterem Epigonteil, dem Vaginularkragen und der Basis des oberen Kalyptraabschnitts ein (Fig. 48 d). Durch die Bildung des Kragens wird aber noch etwas anderes erreicht, nämlich die Loslösung der in der Entwicklung fertigen Fransen vom Archegonienstiel. Durch die zentrifugale Bewegung des Kragens werden die an der Basis seines oberen Teils anfassenden Fransen ebenfalls in zentrifugaler Richtung fortbewegt, sie werden dadurch gedehnt und vom Archegonienstiel abgehoben (Fig. 51 a und Fig. 50 e, f). In sehr zahlreichen Fällen konnte ich diese Loslösung sehr gut beobachten und noch genau feststellen, welche Fransenzelle sich von einer bestimmten Stelle der Peripherie des Archegonienstiels gelöst hatte. Die Betrachtung der Oberfläche des letzteren zeigt, daß hier keine normale Außenfläche mehr vorliegt. In der Regel findet nur die Loslösung einer einzigen Schicht von der Außenseite des Archegonienstiels statt (Fig. 50 e). Es kommt aber auch vor, daß zwei Schichten abgehoben werden (Fig. 50 f). Wenn nun der basale Teil der Haube nur aus der äußeren dieser beiden Schichten hervor-

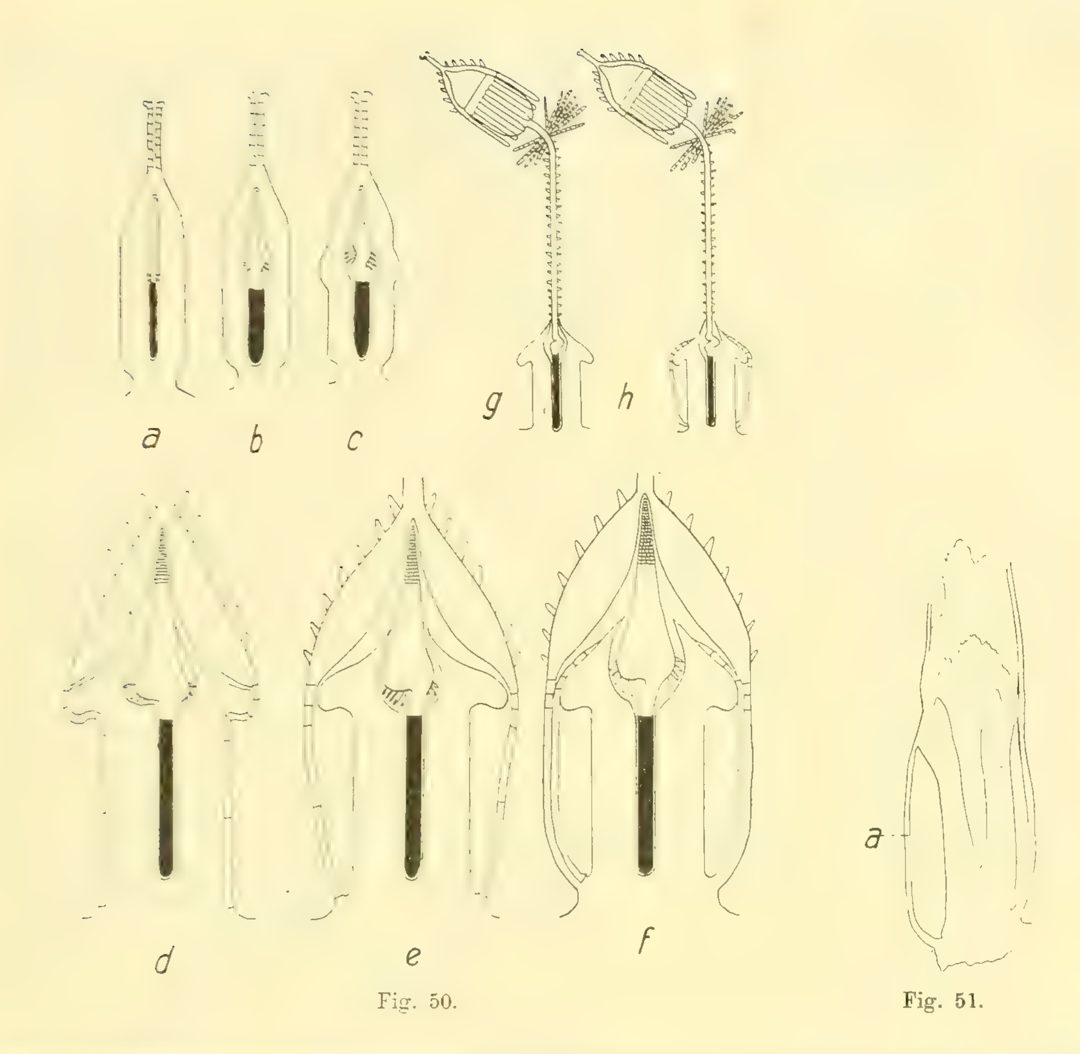


Fig. 50. Fig. 51.

geht, so kommt es zur Bildung eines den Archegonienstiel umgebenden Hohlraums, über dessen biologische Deutung ich keine Angabe machen kann (Fig. 51 a und Fig. 50 f, h). Möglicherweise fällt ihm die Aufgabe zu, Wasser festzuhalten. Der Nachweis dieses Hohlraums ist nur an nicht allzu dünnen Schnitten möglich, weil die Zellschicht des Mantels sehr zart ist und sehr leicht reißt, wodurch dann mikroskopische Bilder entstehen, die zu falschen Deutungen Veranlassung geben. Aus dem Mitgeteilten ergibt sich, daß die Fransen der Haube, wie man leicht annehmen könnte, nicht rhizoidenartige Auswüchse vom unteren Rande der Kalyptra sind, denn sie verdanken, wie gezeigt wurde, ihre Entstehung dem Archegonienstiel, sie dürfen also nicht mit den an der oberen Kalyptra entstehenden rhizoidenförmigen Emergenzen als morphologisch gleichwertig hingestellt werden, wie es auch bisher noch von keiner Seite geschehen ist.

Durch die Loslösung der unteren Kalyptra wird also die in basaler Richtung wirkende Zugkraft ausgeschaltet, es ist damit aber noch nicht die tiefere Ursache für die endgültige Befreiung des oberen Hauptteils der Kalyptra von der kragenförmigen Vaginula ermittelt,

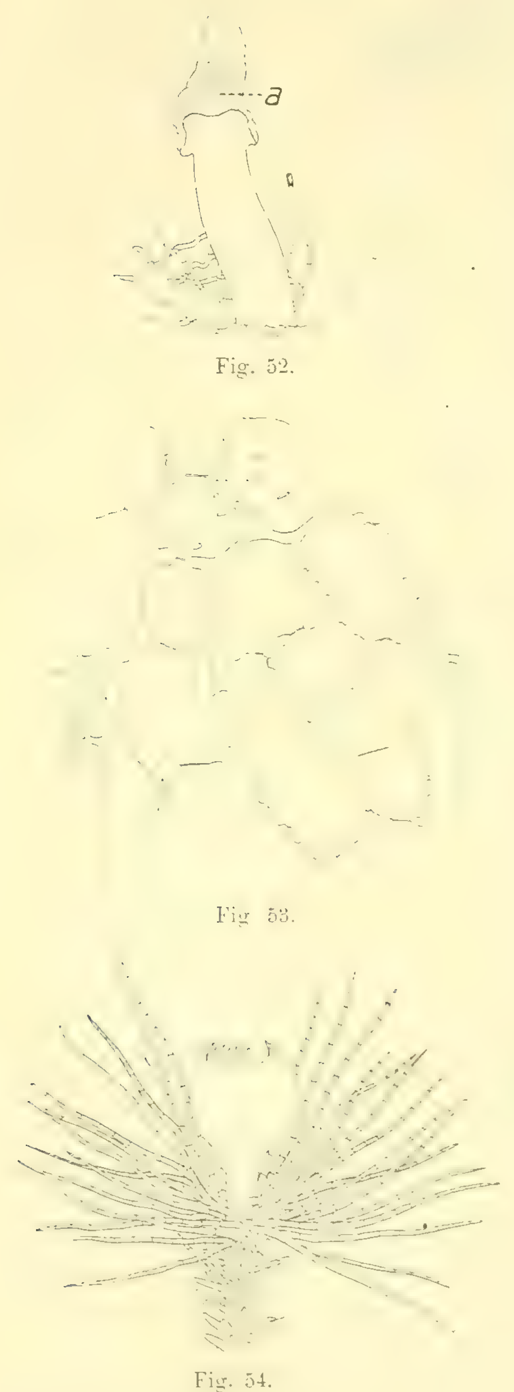


Fig. 52.

Fig. 53.

Fig. 54.

denn jener bildet doch im Jugendzustand mit dem Archegonienstiel ein einheitliches Ganzes. Durch das Auftreten eines besonderen Gewebes mit spröden Wänden, das bei entwickelten Sporophyten hauptsächlich die oberen Partieen der Vaginula zusammensetzt, wird die Trennung der beiden Teile herbeigeführt (Fig. 52 a). Nach der Ausbildung dieser eigenartigen, mit starren Wänden ausgestatteten Zellen, die wir auch an dem Übergang der Seta zum Fuß beobachten, kann sich das Gewebe eines ganz bestimmten Teils der Seta strecken und die Haube emporheben. Aber der gekrümmte Teil der Seta ist nicht mehr streckungsfähig und behält dauernd seine eigentümliche Form. Ich möchte nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß die gebräunte Gewebemasse an der Basis der Seta aus Zellen mit außerordentlich reicher Tüpfelung besteht (Fig. 53). Nach oben nimmt die Zahl der Tüpfel allmählich ab. Nach Goebel sind jene Zellen nicht abgestorben, sondern führen protoplasmatischen Inhalt. Es liegt hier meines Erachtens eine Korrelationserscheinung vor. Dadurch, daß die Seta gezwungen wird, unter der Einwirkung äußerer Faktoren sich zu krümmen, wird die Zufuhr von Wasser und Nährstoffen außerordentlich erschwert. Die Herstellung der so zahlreichen Tüpfel macht den „Fehler" wieder gut. Es muß auch auffallen, daß gerade an dieser Biegungsstelle die Rhizoiden entstehen, denen offenbar die Aufgabe zufällt, ebenfalls den durch die Knickung entstandenen „Schaden" wieder auszugleichen.[1]) Bis zu welcher Mächtigkeit diese Rhizoiden, die wir später teilweise unterhalb des Sporogons wiederfinden, gelangen können, führt Fig. 54 vor Augen.

Der hygrophile Charakter der Eriopus-Arten, die gleich den zahlreichen Hookeria-Formen an schattigen und nassen Stellen wachsen, findet seinen klarsten Ausdruck in der Anhäufung von Einrichtungen zum Auffangen und Festhalten von Wasser, wie sie in solcher Mannigfaltigkeit und üppiger Entwicklung kaum wieder unter den

[1]) Vgl. auch die Bemerkung Goebels in Organographie, Teil II, Heft I, Bryophyten, S. 377.

Bryophyten anzutreffen sein mögen. Besonders hoch muß die wasserhaltende Kraft der Seta eingeschätzt werden, die an ihrer ganzen Oberfläche mit sehr reichlichen, vielfach auch rhizoidenförmigen, aber unverzweigten Emergenzen besetzt ist. Alle im Herbar C. Müller-Hal. vorhandenen Eriopus-Arten zeigen in diesem Punkte vollkommene Übereinstimmung. Wie aus Fig. 55 ersichtlich ist, nimmt die Wandstärke von der Peripherie der Seta nach innen hin allmählich ab, dasselbe gilt auch hinsichtlich der Zahl der Tüpfel. Diesen begegnet man am häufigsten an der nach innen gelegenen Wand der vorgestülpten Epidermiszelle und an den Membranen der benachbarten Zellen (Fig. 55 a); dies deutet darauf hin, daß das von den Papillen aufgenommene Wasser in zentraler Richtung fortgeleitet wird. Wo die Papillen fehlen, ist die Zahl der Tüpfel sehr gering oder es sind solche gar nicht vorhanden.



Fig. 55.


Fig. 56.

Auch die Haube vermag viel Feuchtigkeit in sich aufzunehmen. Bei Eriopus Jellineki C. M. besteht die Wand der Kalyptra aus einer überraschend großen Zahl von Schichten (Fig. 56), in deren Zellen sowohl wie auch in den stark verdickten Membranen Feuchtigkeit in größerer Menge gespeichert werden kann.

Es ist schon früher von mir darauf hingewiesen worden, daß auch bei den Polytrichaceen der Fuß an seiner Außenfläche mit einer Schleimschicht überzogen ist. Die Frage nach der Herkunft des Schleims, d. h. ob die Zellen des Fußes selbst imstande sind, Schleim abzusondern, oder ob es sich um eine Schicht handelt, die aus der Zerstörung von Stämmchenzellen durch den eindringenden Fuß entsteht und diesem adhäriert, konnte nur auf experimentellem Wege entschieden werden. Bei der Versuchsanstellung verfuhr ich in folgender Weise: Eine kreisrunde Korkscheibe wurde vermittelst einer glühenden Nadel an zahlreichen Stellen perforiert. Durch die entstandenen feinen Löcher wurden die Sporophyten von Polytrichum juniperinum Willd. hindurchgesteckt, die Sporogone verhinderten

dann durch ihren größeren Umfang, daß die Versuchsobjekte durchfielen. Die Korkscheibe wurde darauf in ein mit Wasser gefülltes Becherglas gebracht, dessen Inhalt täglich erneuert wurde; die Objekte selbst waren im Wasser in annähernd vertikaler Lage suspendiert.

Nach einiger Zeit zeigten sich überall schleimige Überzüge an der Oberfläche des Fußes, wohingegen weiter hinauf solche fehlten. Mit einer guten Lupe waren diese Schleimüberzüge im durchfallenden Lichte deutlich zu sehen. Aus diesem Versuch ergibt sich, daß das Gewebe des Fußes Schleim abzusondern in der Lage ist. Welche Art von Schleim vorliegt, habe ich nicht untersucht. Mit Alaun ließ er sich gut härten, auch nahm er viele Farbstoffe, z. B. Methylengrün, begierig auf.

Das Experiment lieferte noch ein anderes Resultat. Die grünlichen Teile des Fußes nahmen mit der Zeit eine braunrote Färbung an. Zuerst zeigte sich diese Farbenänderung an der Spitze, später verbreitete sie sich über ausgedehnte Partieen des Fußes. Es handelt sich hierbei wohl um eine Schutzvorrichtung des Fußes gegen das Licht, wir dürfen die Färbung des Fußes als durch die Belichtung hervorgerufen ansehen.

Abgesehen von der nicht bei allen Polytrichaceen vorhandenen Apophyse,[1]) die Goebel und Haberlandt als zur Seta gehörig betrachten,[2]) bietet diese in biologischer Beziehung weniger Bemerkenswertes. Anatomisch ist sie schwach differenziert, ganz im Gegensatz zu dem hochentwickelten Stämmchen und dessen Blättern. Ein peripherischer, aus langgestreckten, dickwandigen Zellen gebildeter Zylinder übernimmt auch hier die mechanische Festigung, während das Innere, aus dünnwandigen Elementen bestehend, dem Transport des Wassers und der in ihm gelösten Nährstoffe dient. Ein Zentralstrang fehlt nirgends, er hebt sich scharf von dem umgebenden Gewebe ab. Im großen ganzen entspricht die Länge der Seta der Größe des Stämmchens, allerdings müssen die Seten der riesenhaften Dawsonia-Arten, wie D. gigantea Grev. u. e. a., als relativ kurz bezeichnet werden. An anderer Stelle[3]) habe ich darauf aufmerksam gemacht, daß die in stehenden Gewässern, Sümpfen und Mooren lebenden Laubmoose sich durch den Besitz sehr langer Seten auszeichnen, wogegen die im fließenden Wasser vorkommenden Formen in der Regel sehr kurze Seten hervorbringen, vielfach kann überhaupt bei den Bewohnern des strömenden Wassers von einer Seta kaum die Rede sein. Arten, deren Vorkommen an Erde, Gestein, Bäume u. dgl. gebunden ist, nehmen hinsichtlich der Länge der Seta eine Mittelstellung ein. Es läßt sich der Gedanke nicht von der Hand weisen, daß zahllose Laubmoose mit kurzgestielten Kapseln früher ein Wasserleben führten, sehr zahlreiche Formen haben die habituellen Eigentümlichkeiten der Wassermoose bewahrt. Grimmia apocarpa, die an den trockensten Stellen, z. B. auf Felsen und Gestein, wächst, kommt auch im fließenden Wasser vor (f. rivularis) und läßt uns wohl ahnen, daß die Vorfahren vieler jetzt außerhalb des Wassers lebenden Formen früher an dieses Medium gefesselt waren.

Die größte Mehrzahl der Polytrichaceen sind Landbewohner. Interessant ist es nun, daß die in Mooren und Sümpfen gedeihenden Formen dieser Familie durch besonders lange

---

[1]) Über die anatomischen und anderen Verhältnisse Vaizey in Journal of the Linnean Society, Vol. XXIV, S. 271, Fig. 17, Taf. 10, außerdem S. 280 und S. 281, Absatz 2.

[2]) Im geneigten Zustand stellen Sporogon und Apophyse ein einheitliches Ganzes dar, sodaß ich mehr der Ansicht zuneige, daß beide Teile zusammengehören.

[3]) Lorch, Beiträge zur Anatomie und Biologie der Laubmoose. Flora, 1894, Heft III, S. 34.

Seten an ihren Standort angepaßt sind. Von den europäischen Arten nenne ich Polytrichum gracile Dicks (6—8 cm),[1]) strictum Banks (6—10 cm), Swartzii Hartm. (5—8 cm), commune L. (6—12 cm), wohingegen die kräftigen Stämmchen von P. alpinum L. (3—5 cm), formosum Hedw. (4—8 cm), juniperinum Willd. (2—6 cm), wie die angegebenen Zahlen beweisen, viel kürzere Seten erzeugen. An einem äußerst reichhaltigen Herbarmaterial konnte ich mich davon überzeugen, daß die exotischen Formen mit den Vertretern unserer Flora übereinstimmen.

Jeder, der die Oberfläche eines an fruktifizierenden Laubmoosen reichen Torfmoores mit Aufmerksamkeit betrachtet hat, wird mir bestätigen, daß die Seten dieser Arten, mit den Landbewohnern verglichen, durch ihre große Zartheit auffallen, eine Eigentümlichkeit, der eine nicht zu bestreitende Gesetzmäßigkeit innewohnt, worauf meines Wissens bisher noch von keiner Seite hingewiesen wurde. Aber noch eine andere Besonderheit der Seten der Moorbewohner kann nicht übersehen werden, ich denke an die eigentümlichen Krümmungserscheinungen, die sich an den Seten der typischen Bryophyten der gedachten Örtlichkeit beobachten lassen; der zur Verfügung stehende Raum gestattet aber nicht, hier eine Aufzählung der in Frage kommenden Arten zu geben. Beide Eigentümlichkeiten treten in den verschiedensten Verwandtschaftsreihen der Laubmoose auf, fast immer begegnet man ihnen bei den moorbewohnenden Spezies. Es ist also kein Zufall, wenn z. B. Polytrichum gracile Dicks., ein typischer Bewohner unserer Moore, eine geschlängelte und relativ schmächtige Seta hervorbringt.

Die Seten der meisten Laubmoose spielen, da sie biegungsfest gebaut sind, bei der Sporenaussaat eine wichtige Rolle. Regentropfen und Winde wirken auf sie ein und setzen sie in vibrierende Bewegung, wodurch in Verbindung mit anderen Einrichtungen des Sporogons eine allmähliche Sporenausstreuung erzielt wird.[2]) Je länger die Seta ist, umso größer ihr Ausschlag, wenn bewegte Luft oder ein Regentropfen sie trifft. Ob auch bei den Polytrichaceen die ruckweisen Erschütterungen (Torsion) der Seta infolge Aufnahme oder Verlustes des Wassers eintreten, vermag ich nicht zu sagen, ein Grund zur Annahme, daß es hier anders sein soll, liegt nicht vor. Diese ruckweisen Drehungen der Seta veranlassen, besonders bei geneigten Sporogonien, ebenfalls eine allmähliche Sporenentleerung.

Wichura hat in seiner Publikation „Beiträge zur Physiologie der Laubmoose"[3]) der Schraubenwindung der Seta ein besonderes Kapitel gewidmet. Die Verflachung der Seta tritt, wie auch von mir überall beobachtet wurde, unmittelbar unter dem Sporogon zuerst auf und schreitet nach unten fort. „Die bandartige Verflachung scheint, so schreibt Wichura, Bedingung der eintretenden Schraubendrehung zu sein, wie ich daraus entnehmen zu müssen glaube, daß die Fruchtstiele von Bryum und Mnium, die auch im Trocknen rund bleiben, keine Spur einer Schraubenwindung zeigen." Wichura hat auch den Drehungsvorgang der Seta nach der physikalischen Seite hin untersucht. Er betont, „daß die Achsendrehung eines bandartig abgeplatteten Körpers in der Regel nur möglich ist, wenn sich mit dieser Bewegung zugleich eine leichte Krümmung nach einer der beiden flachen

[1]) Kryptogamen-Flora von Rabenhorst, 1895, Band IV, Teil II.

[2]) Vgl. Goebel, „Über die Sporenausstreuung bei Laubmoosen", Flora, 1895, S. 459 und „Über Sporenverbreitung durch Regentropfen", Flora, 1896, S. 480.

[3]) Pringsheims Jahrbücher f. wiss. Bot., 1860, S. 189—201.

Seiten hin verbindet". Es müssen, wie Wichura hervorhebt, die beiden Seiten der Seta in anatomischer Beziehung Differenzen aufweisen. Daß dies der Fall ist, ergibt sich aus dem Verhalten des oberen Setenabschnitts, durch dessen Verflachung die Überbiegung der Seta ermöglicht wird. Neigen sich z. B. die Kapseln von Polytrichum commune L., so liegen alle Symmetrieebenen, wenn man sich die Längsachsen der Sporogone gleichgerichtet denkt, parallel zueinander. Da aber, wie sich herausgestellt hat, die Neigung des Sporogons von dem Eintreten der bandartigen Verflachung abhängt, so läßt sich daraus die Folgerung ziehen, daß jene Verflachung einen gesetzmäßigen, d. h. bei allen Sporogonien durchaus übereinstimmenden Verlauf nehmen muß. Die bei der Kapsel deutlich hervortretende Dorsoventralität ist in der oberen, möglicherweise auch in der ganzen Seta vorhanden und zeigt sich, wenn durch Eintrocknung die Abplattung erzeugt wird.

Die Seten unserer einheimischen Polytrichaceen sind meist in ihrem oberen Teil rechts gedreht. Bei dem Auf- und Zusammenrollen des Setenbandes wird das Sporogon mehrere Male im Kreise herumgeführt. Da aber, wie oben erwähnt, die Achsendrehung nur möglich ist, „wenn sich mit dieser Bewegung zugleich eine leichte Krümmung nach einer der beiden flachen Seiten hin verbindet", so wird dadurch die Längsachse des Sporogons andauernd in ihrer Lage verschoben, was für die allmähliche Sporenausstreuung sicher von Bedeutung ist.

Obwohl die ungeschlechtliche Generation, wie Wichura sich ausdrückt, „etwas völlig Neues" ist, so kann ich ihm nicht zustimmen, wenn er behauptet, daß das Sporogon samt Seta von dem Gametophyten in Bezug auf seine symmetrische Ausbildung ganz unabhängig sei, daß beide „das Gesetz ihrer Symmetrie von außen durch die Beleuchtung" empfangen. Es will mir scheinen, als ob sich die drehende Tendenz der Stämmchen auch auf die Seta übertrage; diese Tendenz kann sogar noch in der spiraligen Drehung der Zähne des Peristoms, der Zellen der Haube und des Deckels[1]) ihren Ausdruck finden.

Die Dorsoventralität der embryonalen Generation gibt sich schon in recht jugendlichem Zustand des Sporophyten zu erkennen, in erster Linie selbstredend bei solchen Formen, deren Sporogonien auch im erwachsenen Zustand den dorsoventralen Aufbau besonders deutlich zeigen. Ich untersuchte jugendliche Stadien des Sporophyten von Polytrichum pycnocarpum C. M., solange diese noch vollständig im stark gestreckten Archegonienbauch eingeschlossen waren, und fand, daß schon auf diesem Entwicklungsstadium die Dorsoventralität sich in hinreichend klaren Umrissen offenbart (Fig. 41). Ob man nun schon auf dieser Stufe der Entwicklung des Sporophyten dem Lichte einen die Dorsoventralität bedingenden Einfluß einräumen darf, wage ich nicht zu entscheiden. Junge Sporophyten, an denen noch keine Trennung von Vaginula und Haube eingetreten ist, haben meist die Form eines mehr oder weniger stark gekrümmten Säbels; die Dorsoventralität gelangt also auch an solchen Teilen zum Ausdruck, welche der geschlechtlichen Generation zum Schutze dienen.

Die hygroskopischen Auf- und Abrollungen der trockenen Seta ist mit einer wirklichen Achsendrehung verknüpft. Wie Wichura[2]) zeigte, ist „aber der Fruchtstiel der meisten Moose im jugendlichen Zustand kein geradliniges Gebilde, sondern eine regelmäßige, sanft aufsteigende Schraubenlinie von sehr engem Lumen". Nach dem genannten

---

[1]) Wichura, Beiträge zur Physiologie der Laubmoose, S. 203.

[2]) Wichura, Beiträge zur Physiologie der Laubmoose, S. 201.

Forscher tritt bei dieser Schraubenlinie im Gegensatz zur trockenen Seta keine Achsendrehung ein (Atrichum undulatum, Polytrichum commune). „Es wird also hieraus unzweifelhaft, daß uns die Fruchtstiele der Moose in ihrem jüngeren Zustande das Beispiel einer Schraube ohne Achsendrehung bieten“, denn die Kapseln müßten ihre durch das Licht fixierte Lage fortwährend ändern, wenn mit der Aufführung der Schraubenlinie sich eine Achsendrehung der Seta verbände.

Die Oberflächenzellen der jugendlichen Seten von Pogonatum aloides Hedw., Polytrichum piliferum Schreb., juniperinum Willd., Dicranella heteromalla L., Ceratodon purpureus L. und Discelium nudum Dicks. verlaufen in einer nach rechts drehenden Schraubenlinie. Hieraus geht hervor, daß schon im jugendlichen Zustande der Seta zum Ausdruck gelangt, in welchem Sinne später die Spirale an der reifen Seta verläuft. Man kann aber auch an jugendlichen Seten konstatieren, daß nicht erst ein gewisser Reifezustand erreicht werden muß, wenn die bandförmige Verflachung und die spiralige Einrollung erfolgen soll. Es läßt sich dies sehr gut an Discelium nudum Dicks., das auch in manch anderer Beziehung zu den interessanteren Formen der Bryophyten gehört, beobachten. Diese Art steht in allen Teilen der ungeschlechtlichen Generation im Banne einer rechtsläufigen Spirale. Von der Fuß- bis zur Deckelspitze, Vaginula und Haube eingeschlossen, schließen sich die Epidermiszellen in dem genannten Sinne aneinander. Bei der Untersuchung überraschte mich am meisten der Umstand, daß die Oberflächenzellen des Fußes die spiralige Anordnung am schärfsten hervortreten ließen, und hier hatte ich es am wenigsten erwartet. An der Vaginula war die Spirale höher, aber trotzdem gut zu sehen, am wenigsten von der spiraligen Tendenz beeinflußt erwies sich Sporogon einschließlich Deckel. Auch die große Schraubenwindung der turgeszenten Seta ist bei Discelium nudum Dicks. sehr gut ausgebildet, sie wird durch Verlust des Wassers von einer sehr großen Anzahl engerer Schraubenlinien ersetzt. Die große Schraubenwindung ist unter dem Mikroskope an den Ausbiegungen nach rechts und links sofort zn erkennen. Diese kommen bei Eintrocknung in Wegfall, damit ist eine Streckung der Seta verbunden.

Bei Atrichum angustatum Bryol. Eur. sind alle Epidermiszellen der turgeszenten Seta in sehr deutlicher, rechtsläufiger Spirale angeordnet, bei Verlust der Feuchtigkeit findet aber nur im oberen Setenteil die Einrollung statt, unten dagegen unterbleibt sie vollständig, oben tritt die Verflachung der Seta ein, unten bleibt die zylindrische Gestalt erhalten, ein Beweis dafür, daß die Einrollung nur vor sich gehen kann, wenn die Abplattung eintritt.

Nach Limpricht[1]) soll die trockene Seta bei Mnium hornum L. keine Drehung zeigen. Anscheinend besitzen die Epidermiszellen turgeszenter Seten keine spiralige Anordnung. Sie ist aber doch vorhanden, nur nicht so leicht zu sehen, weil die Spirale sehr hoch ist. Trocknet die Seta ein, so nimmt sie die bandförmige Gestalt an und führt die spiralige Einrollung aus.

Die trockenen Seten von Dicranella cerviculata Schpr. sind unten rechts, oben links gedreht. Dem entspricht vollkommen der Verlauf der Epidermiszellen an der turgeszenten Seta. Zwischen beiden Zonen liegt eine kürzere Strecke, deren Zellen im turgeszenten Zustand nicht gedreht sind. Bei Discelium nudum Dicks. sind alle Oberflächenzellen der

[1]) Kryptogamen-Flora, Band IV, 2, S. 453.

turgeszenten Seta in demselben Sinne gedreht, es findet die Aufrollung der eintrocknenden Seta auch nur nach einer Richtung statt.

Bei solchen Polytrichaceen, die in ihrem Vorkommen an schattige und fast stets feuchte Lokalitäten gebunden sind, kann auch eine Reduktion eines Teiles des vom mechanischen Zylinder umschlossenen Gewebes eintreten. Es entseht dann ein luftführender Hohlzylinder um den Zentralstrang. Es wäre nicht allzu gewagt, vorausgesetzt daß die diesbezüglichen Angaben richtig sind,[1]) hierin eine Anpassung an äußere Verhältnisse zu erblicken, denn an Orten, wo immer Feuchtigkeit zur Verfügung steht, kann die Entwicklung des Sporogons auch wohl vor sich gehen, wenn ein Teil des inneren Gewebes fehlt, zumal ja der Zentralstrang, den man für das Organ der Wasserleitung ansieht, erhalten bleibt. Als typische Bewohner feuchter, schattiger Stellen sind unsere Catharinaea-Arten und sehr viele hygrophile, tropische Polytrichaceen, besonders solche aus der Abteilung Catharinella C. M. anzusprechen. Immerhin würde die Existenz eines luftführenden, den Zentralstrang umschließenden Hohlraums der biologischen Deutung große Schwierigkeiten bereiten. Berichtigt sei hier eine Angabe von Brotherus,[2]) wonach bei Rhacelopus pilifer die Seta mit einem zylindrischen Hohlraum versehen ist. Auch bei dieser Art ist die Seta im zentralen Teil mit einem scharf sich vom übrigen Gewebe abhebenden Zentralstrang versehen. Dieser wird von einem Gewebe sehr zartwandiger Elemente umschlossen, das auf dickeren Querschnitten leicht zu erkennen ist, bei Anfertigung dünner Querschnitte aber leicht zerreißt. Ich habe die Catharinaea-Arten auf diesen Punkt hin nicht untersucht, stehe aber den diesbezüglichen Angaben mißtrauisch gegenüber.[3]) In diesem Mißtrauen werde ich bestärkt durch die Ergebnisse der Untersuchungen von Vaizey,[4]) der das Vorhandensein eines derartigen Luftzylinders bestreitet. „I have carefully examined setae in all stages of development, but detected no sign of any such process — destroyed and absorbed cells in the internal layers of the cortex — although the gradual separation of the cortical cells to form the intercellular air-passages, was easily seen. It was indeed found, when the sections were made with due care, that in the mature seta every, or nearly every, cell of the parenchymatous sheath was connected with one or two of the cells of the cortex." Zur Aufnahme von Wasser sind die Seten vieler Polytrichaceen mit Mammillen oder papillösen Auflagerungen an ihren peripherischen Zellen ausgestattet. Erstere erreichen wohl bei Rhacelopus pilifer den höchsten Grad der Ausbildung, halten aber einen Vergleich mit den entsprechenden Organen der Eriopus-Arten nicht aus. Papillöse Wandverdickungen kommen vor allem den Polytrichum-Seten aus der Sectio „Polytricha pilifera" und vielen in bedeutender Meereshöhe und in arktischen Breiten einheimischen Formen zu, eine Tatsache, die vom pflanzengeographischen Standpunkt aus betrachtet unsere Beachtung in höchstem Maße verdient.

Es ist eine längst bekannte Thatsache, daß zahlreiche Laubmoose zur Zeit der Sporenreife ihre Sporogonien zur Seite neigen. Daß hierdurch die Sporen leichter verbreitet

---

[1]) Kryptogamen-Flora von Rabenhorst, 1895, Band IV, 2, S. 591—601.

[1]) Engler-Prantl, Die natürlichen Pflanzenfamilien, Laubmoose, Lieferung 220, S. 670.

[1]) Haberlandt, Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Laubmoose, S. 397.

[1]) Vaizey, On the Anatomy and Development of the Sporogonium of the Mosses in Journal of the Linnean Society, Vol. XXVI, p. 268, Fig. 28, auf Taf. 11 und 12.

werden können, braucht wohl nicht erst bewiesen zu werden. Auch bei den Polytrichaceen können wir in sehr vielen Fällen diese Erscheinung beobachten. In der Jugend nimmt das Sporogon immer eine aufrechte Lage ein, später ist es geneigt, wagerecht bis nickend. Am stärksten ausgeprägt finden wir die Neigung der Sporogonien bei den mit einer Apophyse versehenen Arten der Gattung Polytrichum, bei den streng dorsoventral gebauten Kapseln von Lyellia crispa Hook., Dawsonia und Polytrichadelphus, während die Theken der der Apophyse entbehrenden Pogonatum-Arten, wie P. nanum Schreb., aloides Hedw., urnigerum L. u. a. zur Zeit der Sporenreife aufrecht stehen oder eine schwache Neigung zur Seite zeigen. Rhacelopus pilifer, die Arten von Psilopilum neigen ihre Sporogonien ebenfalls stark seitlich, unsere Catharinaea-Arten und die Vertreter der Gattung Oligotrichum können als aufrecht bezeichnet werden, weil die Neigung der Sporogonien sich als eine Krümmung derselben zu erkennen gibt. Ein eingehendes Studium der Symmetrieverhältnisse aller Polytrichaceensporogonien überzeugt uns, daß sie sämtlich dorsoventral gebaut sind, und auch bei den Aloidella-Formen ist der scheinbar radiäre Bau durch mancherlei Besonderheiten gestört. Stets ist aber schon an der fertigen jugendlichen Kapsel deutlich zu erkennen, nach welcher Seite hin sie sich im Reifezustand neigen wird.

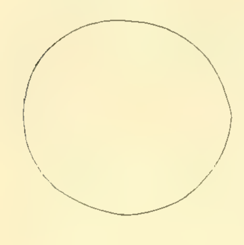
Bei den Polytrichum-Arten bildet die Längsachse der Theka zur Zeit der Sporenreife ungefähr einen rechten Winkel zur Seta, oft aber ist die Neigung noch stärker. Im Gegensatz zu den Pogonatum-Formen verfügen sie, wie oben erwähnt, über eine Apophyse an der Übergangsstelle von Seta zu Sporogon; dieser Hals ist halbkugelig oder verfließt fast mit der Kapsel oder aber er ist scheibenförmig[1]) und dann durch einen tiefen, ringförmigen Spalt von der Urne getrennt. Bei Polytrichum juniperinum Willd. und piliferum Schreb., die ich genauer untersuchte, spielt die Apophyse auch bei der Sporenentleerung eine wichtige Rolle.

Bevor das Sporogon sich neigt, erfährt der obere Teil der Seta eine bemerkenswerte Veränderung, sie nimmt nämlich durch Schrumpfung eine bandförmige Gestalt an. Es leuchtet ein, daß um eine Achse von solcher Beschaffenheit die Neigung des Sporogons leichter möglich ist als um eine solche von kreisförmigem Querschnitt. Beispielsweise läßt sich ein Stück Weißblech ohne Schwierigkeit knicken, ein aus demselben Material verfertigter Hohlzylinder setzt aber eventuellen Knickungsversuchen den denkbar stärksten Widerstand entgegen.

Von den obengenannten beiden Arten brachte ich Rasen mit schon fast reifen, aber noch aufrechten Sporogonien, deren Seten noch nirgends die bandförmige Verflachung aufwiesen, in kleine Bechergläser und ließ die Rasen eintrocknen, ohne daß sie von direktem Sonnenlicht getroffen wurden. Nachdem sich der obere Teil der Seten abgeflacht hatte, neigten sich die Kapseln merklich zur Seite. Durch die Überbiegung seitens des Sporogons muß das Gewebe auf der konkaven (unteren Seite), falls zu der betreffenden Zeit nicht noch irgendwelche Veränderungen der Membranen, was unwahrscheinlich ist, eintreten, zusammengepreßt werden, es steht also die Unterseite unter dem beherrschenden Einfluß des Gewebes der konvexen (oberen) Fläche der bandförmigen Seta. Die Zellpartieen der konkaven befinden sich infolgedessen dauernd in einem Zustand der Spannung, diese kann aber aus dem angeführten Grunde nicht zur Geltung gelangen. Querschnitte, die durch

[1]) Rabenhorst, Kryptogamen-Flora, 1895, S. 613.

eine solche in Spannung befindliche Seta geführt werden, verhalten sich ganz eigentümlich. Ihre Teile liegen nie in einer Ebene, die ventrale Partie ist in eigentümlicher Weise umgeschlagen (Fig. 57).



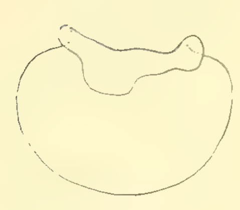


Fig. 57.

Die Befruchtung der Eizellen in einem Polytrichum-Rasen erfolgt nicht gleichzeitig. Sicher sind die Momente der Befruchtung zeitlich verschieden, und daher kommt es, daß man in demselben Polytrichum-Rasen mehr oder weniger reife Sporogonien vorfindet. Halbreife Sporogonien neigten sich bei Verlust des Wassers nur schwach zur Seite, die bandförmige Verflachung der Seta trat zwar auch hier ein, doch verhielt sich die Apophyse abweichend. Bei Pogonatum nanum Schreb., aloides Hedw. und vielen anderen fehlt die Apophyse, die bandartige Verflachung des obersten Teiles der Seta ist aber auch hier zu beobachten. Da aber die Vertreter der Aloidella-Gruppe das Sporogon in der Reife nicht neigen, so vermute ich, daß die Apophyse infolge ihrer Schrumpfungen die Herabbiegung der Kapsel bewirkt. Es ist wohl nicht angängig, das Gewicht der Theka für die in der Sporenreife sich zeigende Neigung in Anspruch zu nehmen, denn jenes verringert sich immer mehr; ob die eigenartigen Schrumpfungen des Sporogons an der Neigung derselben Anteil haben, muß ich dahingestellt sein lassen.

Die dargelegte bandartige Ausgestaltung des oberen Setenteils vollzieht sich erst, wenn die Sporen zur Reife gelangt sind, wenn also keine Baustoffe mehr durch die Seta herbeigeführt zu werden brauchen. Ich nehme an, daß diese bis zur vollständigen Reife der Sporen Nährstoffe zuführt und daß deren Transport erst aufhört, wenn die bandförmige Verflachung stattfindet, wodurch das Aufsteigen von Wasser und der in ihm gelösten Bestandteile zur Unmöglichkeit wird.

Welch bedeutende Veränderungen sich im Laufe der Zeit an der Apophyse von Polytrichum juniperinum Willd. vollziehen, lehrt ein Blick auf Fig. 58 a—d. Fig. 58 a zeigt die Linien, wie sie ein Längsschnitt durch das erwachsene Sporogon dieser Art liefert. Die das Sporogon von der Apophyse trennende wallartige Vertiefung ist noch ziemlich schwach ausgebildet. An etwas älteren Kapseln, die sich zur Neigung anschicken, verringert sich der Abstand je zweier gegenüberliegender Punkte der Vertiefung, das heißt, die ringförmige Aushöhlung wird tiefer (b). Zu ungefähr derselben Zeit flacht sich die oberste Seta bandförmig ab, weiter findet sich an der dorsoventralen Seite, da wo Seta und Apophyse ineinander übergehen, eine sich immer stärker geltend machende Knickung statt (Fig. 58 c, d). Mittlerweile hat sich aber auch der Längsdurchmesser der Apophyse bedeutend verkürzt.

Goebel und Haberlandt betrachten die Apophyse von Polytrichum als obersten Abschnitt der Seta. Vaizey rechnet sie zur Theka: In Polytrichum, as mentioned above, the theca is differentiated into two organs, namely, the sporangium and the apophysis (Journal of the Linnean Society, Vol. XXVI, p. 270, Taf. 9, Fig. 8 a—d). In der Reife stellen Apophyse und Sporangium ein einheitliches Ganzes dar, die vorher wagrecht verlaufende Furche zwischen Apophyse und Sporogon wird nach der Herabbiegung in eine vertikale Lage gebracht, sodaß die Längsachse beider sich nicht verschiebt, Apophyse und Sporo-

gonium behalten also immer ihre gegenseitige Lage bei, woraus ich schließe, daß sie in morphologischer Beziehung nicht getrennt werden dürfen. Auch auf Grund der Entwicklungsgeschichte der Theka läßt sich kein Argument dafür anführen, daß die Apophyse zur Seta zu rechnen ist. Vielmehr zeigt sich, daß das jugendliche Sporogon erst in späteren Entwicklungsstadien eine Einschnürung erhält, die zur Entstehung der Apophyse und des Sporogoniums im engeren Sinne führt. In dem apophysenähnlichen Hals von Buxbaumia aphylla befindet sich ein hohlzylindrischer, mit Spannfädenresten ausgekleideter Hohlraum, den man für das untere abgeschnürte Ende des oberen, dem eigentlichen Sporogon angehörigen Luftraums halten kann. Meines Erachtens liegt in dem eigentümlichen Aufbau des Halses dieser Art ein Hinweis, daß der Hals nicht der Seta zuzurechnen ist, zumal auch gerade an der Übergangsstelle von der Seta zum Halse die papillöse, oberflächliche Auskleidung der letzteren ihr Ende erreicht. Bei Splachnum luteum trägt die Oberseite der blattähnlichen Apophyse sogar Spaltöffnungen, die man bei anderen Moosen bisher nur am Sporogon selbst nachgewiesen hat. Mit Vaizey[1]) möchte ich auch hier wie bei Polytrichum die Apophyse als einen Teil des Sporogons betrachten.

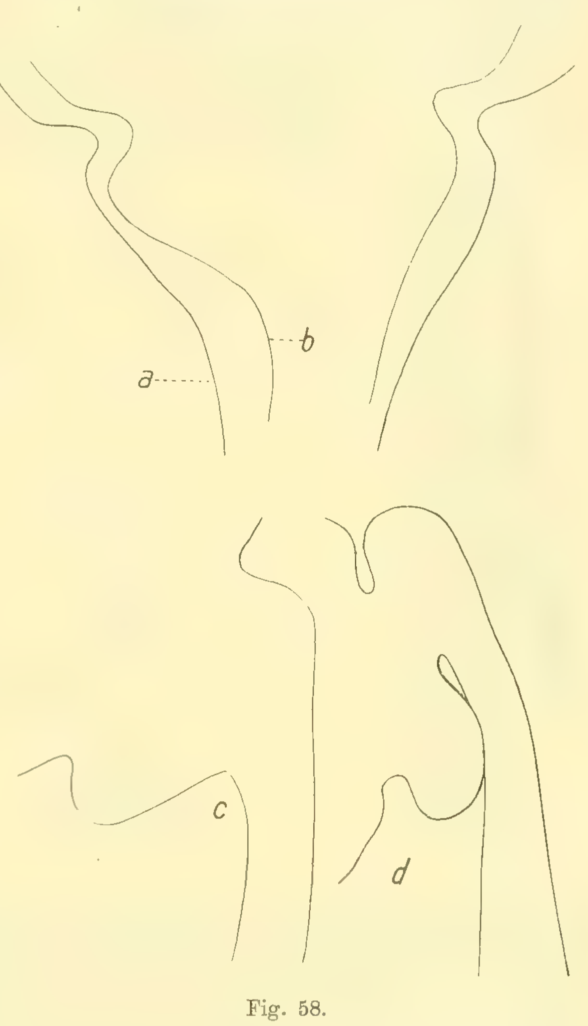


Fig. 58.

In recht bescheidenen Grenzen bewegt sich zur Zeit noch unsere Kenntnis der anatomischen, entwicklungsgeschichtlichen und biologischen Verhältnisse der Laubmooskalyptra. Eine den Gegenstand von allen Seiten beleuchtende Darstellung wäre also sehr verdienstlich und würde eine Menge neuer Tatsachen ergeben, zumal die Kalyptra, schon was die Mannigfaltigkeit ihrer Ausbildungsweise anbelangt, z. B. mit dem Gestaltenreichtum der Blätter, des Peristoms wetteifern kann. Am besten unterrichtet sind wir noch über die einschlägigen Verhältnisse bei Dawsonia und Polytrichum in weiterem Sinne, die beide in der Ausbildung der Kalyptra große Ähnlichkeit zeigen. Auch ist der Versuch gemacht worden, über die biologische Bedeutung dieses Organs Klarheit zu schaffen.

[1]) Vaizey, On the Morphologie of the Sporophyte of Splachnum luteum. Annals of Bot., Vol. V, p. 5—7.

Die Arten der Gattungen Polytrichum, Pogonatum, Dawsonia,[1]) Cephalotrichum, Rhacelopus, Bartramiopsis bilden in Bezug auf die Ausbildung der Haube eine biologische Gruppe, sie besteht aus „Protonemafäden begrenzten Wachstums",[2]) die durch eigenartige, rankenförmige, kürzere, seitliche Fäden zu einem mehr oder weniger dichten Netzwerk verflochten sind. Die Arten von Polytrichadelphus, Oligotrichum, Catharinaea und Lyellia[3]) bringen nur spärliche Rhizoiden an ihrer Kalyptra hervor, während sie der Haube der Psilopilum-Formen vollständig abgehen.

Daß die in Betracht kommenden „Haarbildungen" nichts anderes als Rhizoiden sind, dürfte nach Goebels Untersuchungen[4]) kaum einem Zweifel noch begegnen. Alle Eigenschaften, die den am Stämmchen und an der basalen Vaginula hervorsprossenden Rhizoiden zukommen, finden wir auch an denen der Kalyptra; es ist kein Grund zur Annahme vorhanden, daß die im oberen Teil des Epigons bei Polytrichum auftretenden Bildungen später morphologisch etwas anderes sein sollen, als was sie in der Jugend waren, zumal sich gar kein wesentlicher Unterschied und keine Grenze zwischen den Rhizoiden an einem befruchteten Archegonium feststellen läßt.[5])

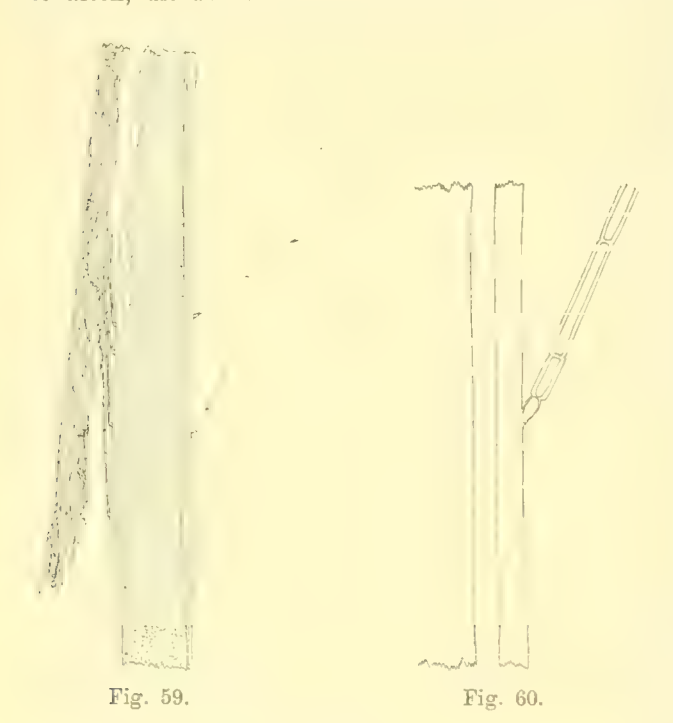


Fig. 59. Fig. 60.

Im erwachsenen Zustand hat die Kalyptra bei den Arten der zuerst aufgeführten Gattungen eine annähernd glockenförmige bis zylindrische Gestalt, sie haftet lange an der Spitze der „inneren" Kalyptra, während nach unten der Zusammenhang mit ihr gelöst ist. Eine solche Haube erweckt den Anschein, als ob ihre Rhizoiden aus den obersten peripherischen Zellen der „inneren Kalyptra" hervorgegangen und im weiteren Verlauf ihrer Entwicklung nach unten gewachsen seien. Durch ausgedehnte Untersuchungen habe ich aber festgestellt, daß die Haubenrhizoiden aus einer längeren Zone der „inneren" Kalyptra, des oberen Vaginulaabschnitts hervorsprossen, wie es sich, wenn man die Verhältnisse bei einem befruchteten Archegonium in Rücksicht zieht, eigentlich von selbst versteht. Es muß aber doch darauf hingewiesen werden, daß ein Teil des sich streckenden Epigons und zwar der später über

[1]) Goebel, Organographie, Teil II, Heft I, S. 372.

[2]) Goebel, Archegoniatenstudien, Flora, 1906, Heft I, S. 20 und R. Brown, Miscellaneous Works I, p. 349.

[3]) Goebel, Archegoniatenstudien. Flora, Band 96, Heft I, S. 37.

[4]) Goebel, Organographie, Teil II, Heft I, S. 372.

[5]) Vgl. Fig. 249 in Goebels Organographie, Teil II, Heft I, S. 373.

der Rißstelle der an der Basis zurückbleibenden eigentlichen Vaginula gelegene Abschnitt keine Rhizoiden hervorbringt. Bei Polytrichum Beccarii C. M., das ich genauer untersuchte, steht der mächtige Rhizoidenfilz in der Jugend durch Fäden mit dem Epigon in Verbindung, die aus der Peripherie des letzteren hervorsprossen, es sind dies die primären Rhizoiden (Fig. 59). Diese lösen sich später durch eine basale Trennzelle, die sehr zarte Wände besitzt (Fig. 60), von dem Epigon los und legen sich dem übrigen Filz an. Nur an der Spitze des Epigons findet keine Trennung statt und zwar aus leicht ersichtlichem Grunde. Die an der Kalyptra im jugendlichen Zustande derselben an ihr hervorsprossenden Rhizoiden stehen sehr dicht beieinander, nach außen hin verästeln sie sich in der bekannten Weise. Mit der Weiterentwicklung des Sporophors hält die Kalyptra einige Zeit Schritt, sie wächst in die Länge. Dadurch werden die Ursprungsstellen der Rhizoiden an der Kalyptra voneinander entfernt. Die Längsrhizoiden, die sich durch zahllose Rankenfäden gegenseitig einen Halt gewähren, werden in ihrer Längsrichtung gedehnt, können aber ohne Gefahr für ihren Bestand dem Zuge folgen, weil sie in die Fesseln der Rankenrhizoiden gelegt sind. Ihre meist umgebogenen Enden lassen es nicht zu, daß sie sich seitlich um einen gewissen Betrag gegeneinander verschieben. Die Ursprungsstellen der Rhizoiden sind aber mit der Zeit so weit voneinander entfernt worden, daß ihre Loslösung von der Kalyptra an den Trennzellen erfolgen muß. Nur an der Spitze, wo von derartigen Wachstumsverhältnissen nicht die Rede sein kann, bleibt der Zusammenhang gewahrt. Die „innere“ Haube befreit sich später an einer bestimmten Stelle, die schon vorher erkennbar ist, von dem unteren Teil des Epigons und bleibt mit jener auch nach der Fortführung durch den Wind und andere Agentien fest verbunden. Bei allen von mir untersuchten Haubenformen — es waren deren sehr viele — reißt die „innere“, aus festem Gewebe gebildete Kalyptra außerdem der Länge nach auf und zwar stets, was bemerkenswert ist, in einer in der Symmetrieebene des Sporogons liegenden Linie. Auch dieser Riß ist vorgebildet, besonders starke Saumzellen schaffen einen widerstandsfähigen Rand, besonders gut zu sehen ist dieser z. B. bei Polytrichum polycarpum Schpr. Die Kalyptren machen stets den Eindruck, als ob sie radiär gebaut wären. Bei genauerem Zusehen beobachtet man aber oft, daß auch die Haube nicht allseitig — ich meine den Filzteil — geschlossen ist, sondern eine ebenfalls deutlich wahrnehmbare Rißlinie aufweist (Fig. 61). Diese Rißlinie des Filzteils entspricht stets dem an der „inneren“ Kalyptra entstehenden Spalt.

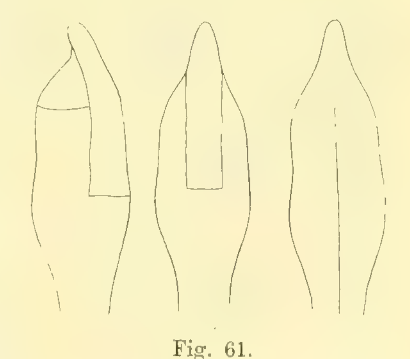


Fig. 61.

Die Entwicklungsgeschichte lehrt, daß die rankenförmigen Seitenzweige erst ihre Ausbildung erfahren, nachdem das feste Gerüst, das aus stärkeren Längsrhizoiden besteht, die bei Dawsonia mehrzellig sind, fast seine definitive Beschaffenheit erlangt hat. Diese rankenartigen Rhizoidenzweige treiben durch ihr Wachstum das stärkere Gerüstwerk auseinander und verhindern gleichzeitig dadurch, daß sie sich an zahllosen Stellen umschlingen, das Auseinanderweichen der kräftigen Längsrhizoiden. Die Entwicklung des Rhizoidenfilzes ist eine höchst eigentümliche und hat wohl nicht ihresgleichen in einem anderen Verwandtschaftskreise der Laubmoose. Ich vermute, daß diese kurzen Rhizoidenzweige Schleim

absondern, eine bestimmte Angabe kann ich aber nicht machen, auch muß es dahingestellt bleiben, ob ihnen die Eigenschaft des Rankens[1]) zukommt.

Der Filz hat ohne Zweifel die Aufgabe, Wasser zu speichern. Je dichter bzw. dicker er ist, umso besser kann er diese Aufgabe erfüllen. Im allgemeinen bringen die mehr xerophilen Formen der Polytrichaceen die typische Rhizoidenkalyptra hervor, aber auch sehr zahlreiche, ausgesprochen hygrophile Arten, die den feuchtwarmen Gebieten der Erde, z. B. Kamerun, angehören, erzeugen diese Form der Kalyptra. Es muß aber bemerkt werden, daß, was Dichtigkeit und Größe des Kalyptrafilzes anbelangt, diese Arten hinter den trockenheitsliebenden zurückstehen.

Die Aufgabe der rankenförmigen Rhizoiden besteht aber nicht nur darin, den Bestand des ganzen Filzes zu sichern. Er erscheint uns in einem wesentlich anderen biologischen Lichte, wenn wir die fertige Rhizoidenmasse in ihrem Verhältnis zum Sporogon betrachten. In der Jugend paßt sich nämlich, wie an allen in Betracht kommenden Polytrichaceen-sporogonien zu beobachten ist, die Haube der Form der letzteren an. Nimmt das Sporogon mit zunehmender Reife an Umfang zu, so geben die Ranken, die schon vorher in genügender Länge vorhanden sind, nach und halten trotzdem das Gerüstwerk zusammen. Hat das Sporogon seine Ausbildung erreicht und beginnt es einzuschrumpfen, so bleibt der geschaffene Zustand der Rhizoidenmasse bestehen, dadurch entfernt sich diese etwas von der Theka und wird später als lockere Umhüllung zur Zeit der Sporenreife abgestreift. Solange also das Sporogon noch in der Entwicklung begriffen ist, liegt ihm der Filz dicht an. Er speichert Wasser, das unmittelbar von den Zellen des Sporogons aufgenommen werden kann. Daß die Rankenrhizoiden in der Tat diese Aufgabe haben, muß auch bewiesen werden können, und ich glaube, diesen Beweis erbringen zu können. Bei manchen Dawsonia-Arten, z. B. D. polytrichoides, reicht der Filz weit unter das Sporogon hinab. Die viel dünnere Seta treibt aber den Filz gar nicht auseinander, wie die Beobachtung zeigt, wogegen weiter oben eine mächtige Dehnung durch den sich vergrößernden Umfang des Sporogons eintritt. Wie soll nun die Haube sich von der Kapsel befreien, wenn sie unten an die Seta gefesselt ist? Durch die seitliche Neigung des dorsoventralen Sporogons wird der Filz an der Rückseite in seiner Längsrichtung gedehnt, die starken, aus mehreren Zellen bestehenden Rhizoiden werden voneinander entfernt, woher es kommt, daß wir die Haube oft in einen oberen und einen unteren Abschnitt zerlegt vorfinden. In der geschilderten Tätigkeit der Rankenrhizoiden erblicke ich deren vornehmste biologische Aufgabe. Der Filz umschließt also bis zu einem gewissen Stadium fest das Sporogon, führt ihm Wasser zu und verhindert eine übermäßige Transpiration. Wenn nun, wie ich vermute, die Rankenrhizoiden Schleim absondern, so würde dadurch die wasserspeichernde Kraft des Filzes ganz bedeutend erhöht.

Morphologisch gleichwertige Organe pflegen oft in systematisch fernstehenden Verwandtschaftskreisen aufzutreten. Es sei bezüglich der Bryophyten erinnert an die Lamellen der Blätter der Polytrichaceen, mehrerer Pottia-Arten, zahlreicher Campylopus-Formen und an die von Goebel zuerst beschriebenen homologen Bildungen bei dem Lebermoose Gottschea Blumei. Dasselbe läßt sich von den Rhizoiden an den Kalyptren der Laubmoose sagen,

[1]) Firtsch, Berichte der Deutsch. Bot. Ges., 1883, Band I, und Goebel, Archegoniatenstudien, Flora, 1891, Heft I, S. 21 und 22.

wenn auch ihre Verbreitung eine viel häufigere als die der Lamellen ist. Einem leisen Anklang an den Kalyptrafilz der Polytrichaceen begegnen wir bei vielen exotischen Campylopus- und Thysanomitrium-Arten, die aber noch in manch anderer Beziehung biologisch höchst interessant sind.

Bei diesen Arten werden die Sporogonien meist in größerer Menge am Stämmchenende hervorgebracht. Sie stehen, zu einer Art Becher vereinigt, dicht beieinander. Dieser Becher, rein äußerlich betrachtet, hat einige Ähnlichkeit mit dem Antheridienbecher der Polytrichaceen. Jedes Sporogon bildet den Abschluß eines Zweiges, die Scheitelzelle der Hauptachse persistiert aber nicht, sodaß eine Durchwachsung, wie wir sie bei den Antheridienbechern der Polytrichaceenbecher beobachten, hier nicht zustande kommen kann. Die Sporogonien (Fig. 62 c) werden von hin- und hergebogenen, geschlängelten Seten[1]) getragen und sind bis zu ihrer Öffnung in die tiefsten Stellen des Bechers, mit der Haubenspitze nach unten gekehrt, versenkt. Erheben sich die Sporogonien, indem sich die Seten strecken, aus der schützenden Umhüllung der Becherblätter, so bleiben bei vielen Arten alle Hauben samt Deckel in der Tiefe zurück (Fig. 62 a). So z. B. bei Thysanomitrium Beccarii, wo die Haube den Deckel an Länge bedeutend übertrifft (Fig. 62 a), erstere bringt außerdem einen reich verzweigten Rhizoidenfilz hervor (Fig. 62 a), der sich in die Spalten, welche in der Tiefe des Bechers massenhaft vorhanden sind, hineindrängt und verhindert, daß die Haube bei Streckung der Seta mit emporgehoben wird. Der Rhizoidenfilz an der Haube dieser Art ist reichlich vorhanden und stimmt mit den am Stämmchen und an der Oberseite der Blätter hervorsprossenden, stark verzweigten Fäden vollkommen überein. Ich habe zahlreiche Becher dieser Art untersucht und stets ebenso viele Hauben und Deckel in der Tiefe vorgefunden, wie Sporogonien vorhanden waren. In einem Falle zählte ich zehn Sporogonien und ebenso viele Hauben mit Deckel. Niemals aber konnte ich eine Kalyptra an einem über den Becher empor-

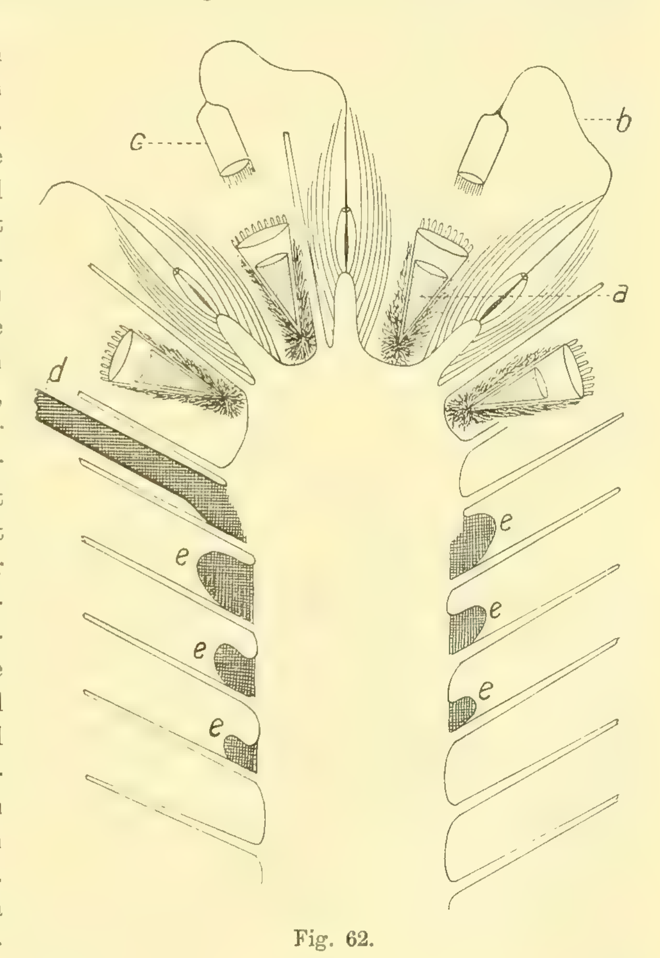


Fig. 62.

[1]) Vgl. Wichura, Beiträge zur Physiologie der Laubmoose. Pringsheims Jahrb. f. wiss. Bot., 1860, S. 202.

gehobenen Sporogon entdecken, die Zahl der umgestülpten Hauben entsprach stets der Zahl der Kapseln. In dem Grunde des Bechers dienen die äußerst zierlichen, trichterförmigen Gefäße als vortreffliche Wasserbehälter, deren feuchtigkeitshaltende Kraft sicher noch eine Verstärkung durch den reichlichen Rhizoidenfilz erfährt. Thysanomitrium Wichurae C. M. enthielt in einem Becher zwölf Sporogonien. Deckel und Haube fehlten überall. Entweder waren diese in der üblichen Art abgefallen oder noch innerhalb des Bechers aufzufinden. Es verhielt sich hier genau so wie bei Th. Becarii, ich fand die zwölf Hauben mit Deckeln tief versenkt zwischen den zahlreichen kurzen Ästchen, die an ihrer Spitze das Sporogon tragen und im Verein mit Hochblättern den Becher zusammensetzen. Die spitzkegelförmige Haube füllt die Zwischenräume der Ästchen so vorzüglich aus, daß Spalten und Lücken kaum zu bemerken sind. In einem anderen Becher von Th. Wichurae C. M. waren zehn Kapseln vereinigt, die Zahl der Hauben im Grunde des Bechers stimmte damit überein. Mit diesen beiden Arten sind aber die Campylopus- und Thysanomitrium-Arten, denen das geschilderte Verhalten eigentümlich ist, nicht erschöpft. Diese Einrichtung ist aber durchaus spezifisch, andere zahlreiche Formen üben das bei den meisten Laubmoosen zu beobachtende Verfahren. Welche Einrichtungen den Deckel innerhalb der Haube festhalten, vermag ich nicht zu sagen. Als den eigentlichen Wasserbehälter müssen wir den Deckel ansehen, denn die Haube ist meines Wissens oft seitlich gespalten, diese würde also ohne den Deckel nur wenig zu leisten imstande sein.

Was bei den Antheridienbechern der Polytrichaceen die sich vorzüglich aneinander schmiegenden Perichätialblätter zu Wege bringen, einen dichten Verschluß nämlich, das leistet bei vielen Campylopus- und Thysanomitrium-Arten die Gesamtheit der zahlreichen, in die Tiefe des Bechers versenkten Zisternen. Aber es besteht doch zwischen beiden Einrichtungen in Bezug auf diejenigen Organe, denen Wasser zugeführt werden soll, ein tiefgreifender Unterschied. Bei den Polytrichaceen mag wohl auch durch die Becherbildung die persistierende Scheitelzelle vor dem Absterben bewahrt werden, ich glaube aber doch, daß ihre Hauptaufgabe eine andere ist, daß diese mit der Antheridienentleerung im Zusammenhang steht. Es drängte sich die Frage auf, welche Organe der Campylopus- und Thysanomitrium-Arten wohl aus der geschilderten Einrichtung einen Nutzen ziehen mögen. In der ersten Zeit wohl mehr die Sporogonien, später mehr die in den Achseln der obersten Stämmchenblätter stehenden unentwickelten Äste, die teils wieder als Wasserreservoire dienen, teils zu Ästen auswachsen, die den Vorgang der Becherbildung nach einiger Zeit wiederholen. Von diesen ruhenden Knospen wächst bei Th. Beccarii fast immer nur eine (Fig. 62 d) zu einem Aste aus, während die anderen als wasserspeichernde zartwandige Gewebemassen (Fig. 62 e) die Zukunft des wachsenden Sprosses gemeinsam mit den Haubenzisternen des Bechers (Fig. 62 a) sichern. Bei vielen Campylopus- und Thysanomitrium-Arten entwickeln sich aber mehrere ruhende Knospen zu neuen Ästen, es hängen also die habituellen Eigentümlichkeiten dieser Arten im wesentlichen von der Zahl der zu Ästchen auswachsenden Knospen ab.

Nach den Notizen zu schließen, die den im Berliner Kgl. Herbarium vorhandenen, äußerst zahlreichen Arten beider Gattungen beigegeben sind, handelt es sich wohl fast immer um xerophile und oft in sehr bedeutender Meereshöhe vorkommende Formen.

Wie erwähnt, fungieren eine Anzahl schlafender Knospen als Wasserbehälter. Die ruhenden Astanlagen sind hier recht kräftig (Fig. 62 e) und die Gefahr, sie für etwas

anderes[1]) zu halten, ist ausgeschlossen. Die Scheitelzelle ist stets leicht nachzuweisen, ein Irrtum also ausgeschlossen. Das Gewebe ist äußerst zart und für die Wasseraufnahme trefflich geeignet. Wahrscheinlich führen die oberen größeren Blätter das Wasser zu, das bei dem Austreiben der Ruheknospen nutzbar gemacht wird. Wir sehen also, daß morphologisch gleichwertige Organe sich in ihrer Entwicklung ganz verschiedenartig verhalten, was hier umso mehr auffällt, weil es sich um Knospen handelt, die in allernächster Nähe beieinander stehen. An den höchst eigentümlichen Stolonen von Jaegerina stolonifera ist ein ähnliches Verhalten zu beobachten. In den Winkeln der winzigen Blätter entwickeln sich zahllose Brutknospen (Fig. 63 a), die sich um eine ruhende Knospe gruppieren (Fig. 63 b). Diese entwickelt sich in der Regel nicht zu einem Aste, sie dient als Wasserspeicher und ermöglicht die Entwicklung der Brutkörper, die morphologisch wohl nichts anderes als

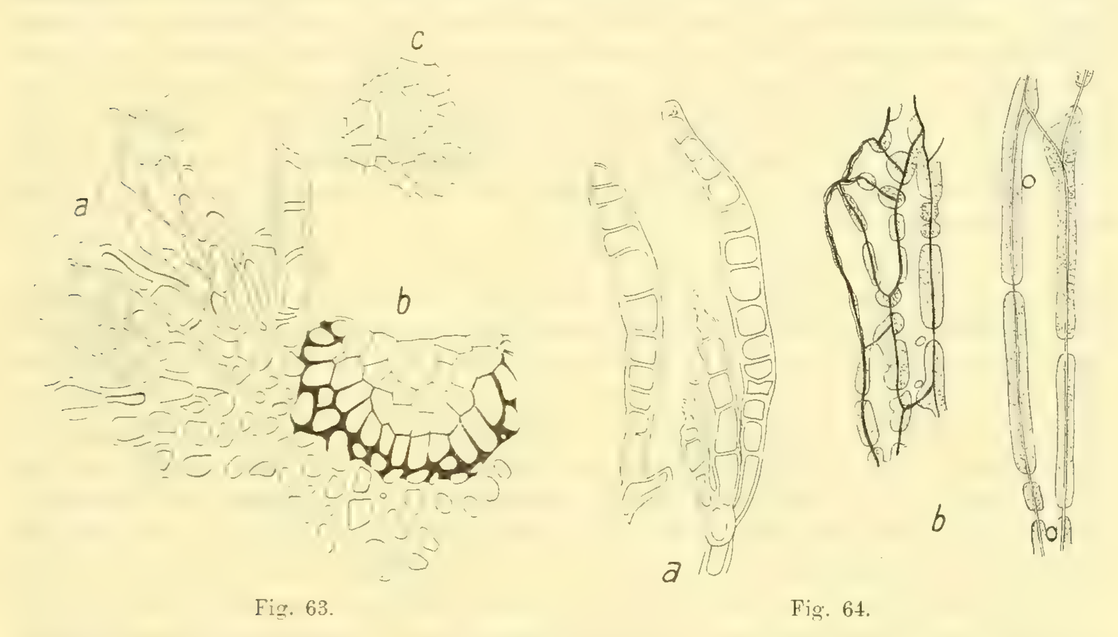


Fig. 63. Fig. 64.

metamorphosierte Rhizoiden darstellen. Die dreiseitig-pyramidale Scheitelzelle war auch hier leicht nachzuweisen (Fig. 63 b und c). Die sehr zartwandigen Zellen der ruhenden Knospen (Fig. 63 b, c) gehen nach innen in ein mit sehr stark verdickten Membranen und auf allen Wänden ungemein reich getüpfeltes (Fig. 64 b) Grundgewebe über, wie es in dieser Ausbildung meines Wissens bei den Laubmoosen bisher noch nicht angetroffen wurde. Es kann also Wasser, welches von dem zarten Gewebe der ruhenden Knospe aufgenommen wird, leicht durch die unverdickten Wandstellen zu den in der Entwicklung begriffenen Brutknopen, von denen Fig. 64 a einige in stärkerer Vergrößerung vorführt, transportiert werden.

Bei Thysanomitrium Beccarii ist der untere Teil der Seta von einer becherförmigen Hülle umgeben, diese besteht aus einem widerstandsfähigen Gewebe mit gebräunten Mem-

[1]) Vgl. die Bemerkungen und Berichtigungen Goebels in Archegoniatenstudien, Flora, 1906, S. 78—80 über die von Brizzi beschriebenen „macule" an Cyathophorum.

branen. Eine andere biologische Aufgabe als die der Wasserspeicherung können diese Becher wohl kaum haben (Fig. 62).

Über die Einrichtungen, die zur Ausstreuung der Sporen bei den Laubmoosen dienen oder in irgend einer Beziehung dazu stehen, sind wir noch wenig unterrichtet. Es liegen meines Wissens über diesen Gegenstand bisher nur zwei Abhandlungen vor, deren Titel ich in der Fußnote[1]) mitteile.

Charakteristisch für die Polytrichaceen (exklusive Dawsonia) ist das Auftreten eines meist dünnen Häutchens, des Epiphragmas, das aus der Kolumella hervorgeht und an seiner Unterseite längere Zeit hindurch, meist bis nach der Aussaat der Sporen, mit dem Peristom in Verbindung bleibt. Wird das Epiphragma etwas gehoben, so entsehen zwischen den Zähnen des Peristoms feine Öffnungen, durch welche die Sporen den Weg ins Freie nehmen können; man kann also mit Goebel das Polytrichumsporogon z. B. hinsichtlich der Sporenausstreuung sehr gut mit der Porenkapsel von Papaver vergleichen. Sind auch die Poren, die sich bei feuchter Witterung scheinbar meist nicht ganz schließen, relativ klein, so ist doch die Größe der Sporen so gering, daß solche stets in größerer Menge verstäubt werden können. Es unterliegt keinem Zweifel, daß das Epiphragma in ausgezeichneter Weise das Eindringen von Regen in die Kapsel verhindert, aber darin besteht meines Erachtens nicht seine Hauptaufgabe.

In seinen peripherischen Teilen ruht das Epiphragma auf den Zähnen des Peristoms, während es in seiner Mitte von dem stielförmigen Abschnitt der Kolumella unterstützt wird. Das Epiphragma befindet sich längere Zeit hindurch in einem Zustand der Spannung, die spannende Kraft liegt in der Säulenfestigkeit der Sporogonwand verborgen und wird durch die Zähne auf das Epiphragma übertragen. Der Vergleich mit dem Felle einer Pauke hinkt ja etwas, jedenfalls ist aber die Möglichkeit vorhanden, daß das Epiphragma durch auffallende Regentropfen in vibrierende Bewegungen versetzt wird. Tritt dieser Fall ein, so wird auf die Luft unter dem Epiphragma die Wellenbewegung der Paukenhaut übertragen, hierdurch wird die trockene Sporenmasse aufgewirbelt und mit der durch die Poren herausgepreßten „Luftsäule“ ins Freie übergeführt. Es will mir scheinen, als ob die mit einer Paukenhaut ausgestatteten Polytrichaceen, besonders aber solche, deren Kapseln im Reifezustand aufrecht stehen oder schwach geneigt sind (Catharinaea, Pogonatum, Oligotrichum), auch wenn die Luft Feuchtigkeit enthält, doch ihre Sporen auf die geschilderte Art zu entlassen imstande sind.

In der Reife führen die Sporogonien von Polytrichum, Lyellia, Dawsonia und Polytrichadelphus eine scharfe Neigung zur Seite aus, die mit der Sporenentleerung in Beziehung steht. Besonders die Arten der drei erstgenannten Gattungen zeichnen sich durch den Besitz eines stark verbogenen äußeren Sporensackes vor allen übrigen Polytrichaceen aus. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Aussaat der Sporen aus einem derartigen Sporensack viel langsamer erfolgen muß als aus einem solchen von der gewöhnlichen Form (Hohlzylinder). Regen und Wind setzen Seta samt Sporogon in Bewegung, und da die Neigung der Kapseln stets größer als 90° ist, müssen die in tieferen Ausbuchtungen lagernden

[1]) Goebel, Archegoniatenstudien. Über die Sporenausstreuung bei den Laubmoosen. Flora, 1885, Heft III. — Hutton, Observations on the different Modifications in the Capsules of Mosses, with reference to the Dispersion of the spores. Transactions and Proceedings of the New Zealand Institute, 1874.

Sporenmassen in springender Bewegung allmählich nach der Öffnung des Sporogons gelangen. Sehr wenig vorteilhaft wäre es, wenn die Neigung der Kapsel soweit ginge, daß der Mund nach unten zu liegen käme, es fände dann die Entleerung der Sporen in kürzester Frist statt, was nicht im Interesse der Art ist, ganz abgesehen davon, daß sich die Sporenmassen an der Urnenmündung über dem Epiphragma zusammenballen und die Poren verstopfen würde. Ein Zuckerstreuer entläßt bekanntlich seinen Inhalt am besten, wenn man ihn in ganz bestimmter Neigung zu dem Objekt, das man mit Zucker bestreuen will, bewegt.

Lyellia crispa Hook. unterscheidet sich von Dawsonia und Polytrichadelphus durch den Mangel des Peristoms. Die Kolumella erweitert sich oben nicht zu einem häutigen, zarten Epiphragma, sondern zu einem mehr massigen Körper von annähernd kegelförmiger Gestalt, der nach Goebel dem Polytrichum-Epiphragma in entwicklungsgeschichtlicher Beziehung nicht entspricht. Bei feuchter Witterung verschließt dieses verbreitete Ende die Öffnung des Sporogons wie ein Kegelventil. Selbst wenn dieser Verschluß fehlte, könnte Wasser doch nicht in die Öffnung des Sporogons eindringen, weil dessen Rückenseite nach vorne vorgezogen ist und die Kapselmündung wie ein schützendes Dach überragt.

Lyellia und Dawsonia, in geringerem Grade auch Polytrichadelphus und Polytrichum besitzen Sporogonien von deutlich dorsoventralem Bau. Daß nun diese gerade zur Zeit der Sporenreife ihre Kapseln zur Seite neigen, ist eine auffällige Erscheinung, ebenso wie die Tatsache, daß die Schrumpfungen hier am stärksten auftreten. Ob die im Laufe der Entwicklung an der Kapsel sich immer mehr geltend machende Dorsoventralität in einem ursächlichen Zusammenhang mit der Neigung der Kapsel steht, habe ich nicht ermitteln können, wahrscheinlich ist es aber.

Das Exothecium von Dawsonia ist von lederartiger Konsistenz und wie bei Lyellia an seiner Rückenseite mit einer der Längsachse entsprechenden Ausbuchtung versehen. Auf die hierdurch hervorgerufene Ähnlichkeit der Dawsonia-Kapseln mit denen von Buxbaumia und Diphyscium hat bereits Goebel hingewiesen und der Vermutung Ausdruck gegeben, es möchte die Sporenausstreuung ähnlich wie bei Diphyscium durch eine Art Blasebalgeinrichtung, die durch Regentropfen in Tätigkeit gesetzt wird, erfolgen. Das aus zahlreichen, langgestreckten Borsten bestehende pinselförmige Peristom dient jedenfalls der allmählichen Aussaat der Sporen durch den Wind, es arbeitet genau so wie die Porenkapsel einer Pogonatum- oder Catharinaea-Art.

Es wäre noch die Frage zu beantworten, ob die Wand oder die Kolumella bei Verlust der Feuchtigkeit eine stärkere Zusammenziehung erfährt oder ob nur einer von beiden Teilen sich kontrahiert. Nach meinen Beobachtungen kommt die Kolumella nicht in Betracht. Änderungen in dem Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre müssen naturgemäß an der Außenseite des Sporogons, an der Kapselwand, ihre Wirkung zuerst äußern. An Oberflächeninhalt übertrifft die Sporogonwand den nach außen liegenden Abschnitt der Kolumella — es handelt sich nur um das Epiphragma — ganz bedeutend, und da unter gewöhnlichen Umständen eine größere Fläche mehr an Feuchtigkeit einbüßt als eine kleinere, so dürfte die Kapselwand je nach dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft durch ihre Streckung bzw. Kontraktion die Verengung bzw. Erweiterung der Poren hervorrufen.

Die Wand des Sporogons der Polytrichaceen verdient in mehr als einer Beziehung unsere Beachtung. Insbesondere sind die Eigentümlichkeiten, mamillösen Auftreibungen, wie sie uns bei den meisten Polytrichaceen entgegentreten, geeignet, unser Interesse in

Anspruch zu nehmen, zumal heutzutage mit der Auffassung, es handle sich um eine Oberflächenvergrößerung zum Zwecke der Assimilation, nichts mehr anzufangen ist.

Vaizey[1]) hat die Epidermiszellen von Polytrichum commune L. genauer untersucht und erläutert an einer Figur (Pl. XII, Fig. 48), die einen Querschnitt durch die Sporogonwand jener Art vorführt, die einschlägigen Verhältnisse: Each epidermal cell rises at the middle point of its external surface, so as to form an outward projection from each cell, and from the cell-lumen a deep pit penetrates into this papilla, leaving the tip of papilla only closed by a very thin membrane. Vaizey berichtet hier etwas, worüber die Figur keinen Aufschluß erteilt, denn die Verdünnung an der Spitze ist im Vergleich zu der Dicke der übrigen Wandteile so geringfügig, daß von einer „very thin membrane" nicht die Rede sein kann. Auch ist die Anwendung der Bezeichnung „Tüpfel" auf dem heller erscheinenden Teil der Mamilla durchaus zu verwerfen, da fast ausnahmslos bei Polytrichaceen mit derartigen Vorstülpungen der Außenwände der Epidermiszellen gerade der äußerste Teil der Membran eine Verdickung aufweist. Das scheinbare Auftreten von Tüpfeln ist in rein optischen Verhältnissen begründet, weil das Licht von den seitlich aufsteigenden Membranpartieen stärker absorbiert wird als von dem Spitzenteil der Papille. Daher kommt es auch, daß bei höherer Einstellung der fragliche Tüpfel von einer ringförmigen Leiste umgeben zu sein scheint, die in Wirklichkeit nicht existiert.

Über die Aufgabe dieser Einrichtung äußert sich Vaizey folgendermaßen: This peculiar modification is only found on the wall of the sporangium, and as that is the part covered by the calyptra, it has occurred to me that a possible explanation of the structure is, that by means of these modified pits nourishment may be conveyed from the epidermis cells of the sporangium to the calyptra.

Stofflich erweisen sich die äußersten Teile der Mamillen aus demselben Material aufgebaut wie beispielsweise die Membranen der Zellen der Glashaare und die papillösen Anfügungen der Lamellenendzellen. Es besteht heute kein Zweifel mehr darüber, daß solche Wände infolge ihres starken Quellungsvermögens besonders befähigt sind, Wasser in größerer Menge zu speichern und lange festzuhalten.[2]) Die Mamillen der Polytrichaceensporogonien haben wohl auch diese Aufgabe zu erfüllen. Vaizey verhält sich bezüglich der biologischen Deutung der Mamillen sehr vorsichtig, er gibt „a possible explanation of this structure", für die ich mich nicht erwärmen kann.

Meine Ansicht über die Funktion der Lamellenendzellen habe ich bereits früher in dieser Schrift mitgeteilt: In ihnen erblicke ich eine optische Vorrichtung, die dazu dient, dem zu den Lamellen gelangenden Lichte den Durchgang zu erleichtern, es in zweckentsprechender Weise zu zerstreuen, sodaß auch die tiefer gelegenen chlorophyllhaltigen Zellen ihre Assimilationsarbeit verrichten können. Ich möchte annehmen, daß es sich auch bei den mamillösen Ausstülpungen der Polytrichaceensporogonien in erster Linie um eine derartige Einrichtung handelt, durch welche selbst in den zentralen Partieen der immerhin ziemlich voluminösen Kapsel noch eine ausreichende Assimilationsarbeit ermöglicht wird.

---

[1]) R. Vaizey, On the Anatomy and Development of the Sporogonium in Mosses. Journal of Botany, Vol. XXVI, p. 271.

[2]) Lorch, Beiträge zur Anatomie und Biologie der Laubmoose. Flora, 1894, S 39—41.

Bei Pogonatum aloides Hedw. sind die Mamillen sehr gut entwickelt (Fig. 65 b). Jede Epidermiszelle besitzt eine solche und liefert bei höherer oder tieferer Einstellung unter dem Mikroskop ganz verschiedene Bilder (Fig. 65 a und c). An den Außenwänden ist keine verdünnte Stelle wahrzunehmen, es ist also ganz verkehrt, von Tüpfeln zu sprechen. Es liegt nahe, daß von außen auf die Sporogonwand gelangende Lichtstrahlen irgendwelche Ablenkungen erfahren, die nicht eintreten würden, wenn die Mamillen fehlten.

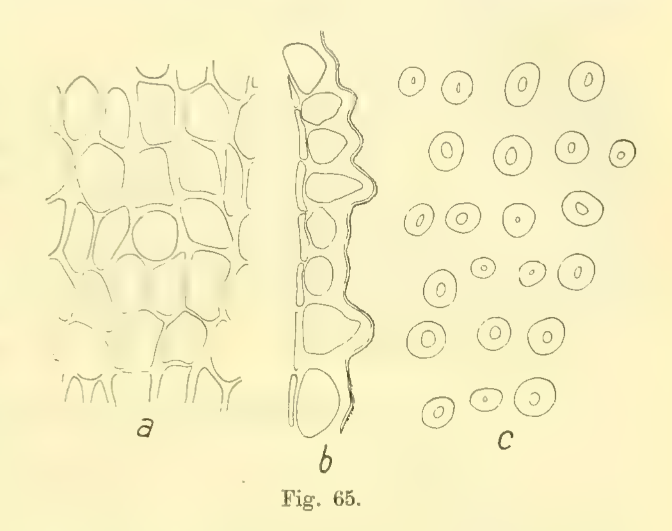


Fig. 65.

Bei den Polytrichum- und Pogonatum-Arten ist der Sporensack vermittelst chlorophyllhaltiger Fäden frei im Hohlraum der Theka aufgehängt. Er ist besonders bei Polytrichum mehrere Male längs und quer gefaltet, wodurch eine sehr bedeutende Oberflächenvergrößerung und die Erzeugung ungeheurer Sporenmassen ermöglicht wird. Viele Teile des gewundenen Sporensackes befinden sich dem ankommenden Lichte gegenüber in einer ungünstigen Lage, dieser Übelstand wird aber ausgeglichen nach meiner Ansicht durch die von den Mamillen hervorgebrachte starke Dispersion des Lichtes.

Zwischen der Lage des Sporensackes und dem Vorhandensein bzw. Mangel der Mamillen scheinen bei den Polytrichaceen feste Beziehungen vorhanden zu sein. Es ist nämlich auffallend, daß bei solchen Polytrichaceen, deren Sporensack dem Exothecium anliegt, die Mamillen fehlen. Dies ist z. B. bei den Catharinaea-Arten der Fall. Hier bedeckt die Haube nur einen geringen Teil der Kapsel, der größte Teil der Oberfläche wird unmittelbar von den ankommenden Lichtstrahlen getroffen. Der Weg durch das Exothecium zum Sporensack ist nur kurz, besondere Apparate zur Zerstreuung des Lichtes erweisen sich als überflüssig. Auch bei Pogonatum nanum Schreb., das unter den einheimischen Arten dieser Gattung eine Ausnahmestellung einnimmt, fehlen die Mamillen. Der Sporensack liegt aber auch hier ebenfalls unmittelbar dem Exothecium an und ist außerdem nur sehr wenig hin- und hergebogen.

Mit Mamillen ausgestattet sind die Epidermiszellen bei den Kapseln der Gattungen Rhacelopus, Pogonatum und Polytrichum Sectio Porotheca, sie fehlen bei Polytrichum Sectio Aporotheca, Oligotrichum, Bartramiopsis, Lyellia, Dendoligotrichum, Polytrichadelphus und Dawsonia.[1])

Die Verhältnisse bei Oligotrichum, Dendoligotrichum und Polytrichadelphus, wo zwar auch wie bei Pogonatum (exklusive Sectio Nana) und Polytrichum der Sporensack beiderseits vermittelst Spannfäden im Hohlraum des Sporogons suspendiert ist, scheinen mit meiner Erklärung in Widerspruch zu stehen, indessen besitzt hier der äußere Sporensack keine

[1]) Engler-Prantl, Die Natürlichen Pflanzenfamilien, S. 672—700.

Ausbuchtungen und Verkrümmungen, außerdem ist, von Polytrichadelphus abgesehen, das Sporogon wenig umfangreich. Es darf auch nicht übersehen werden, daß die Kalyptra bei diesen Gattungen das Sporogon im entwickelten Zustand wenig oder gar nicht bedeckt und schon frühzeitig abgeworfen wird.

Der Sporensack zeigt also, besonders wenn er beiderseits durch annähernd gleich lange Spannfäden innerhalb des Sporogons aufgehängt ist, das Bestreben, seine Oberfläche und damit auch seinen Inhalt durch seitliche Ausbuchtungen zu vergrößern. Ermöglicht wird ihm dies dadurch, daß die Spannfäden sich den Vergrößerungsbestrebungen des Sporensackes anpassen, sie sind wohl einer gewissen Dehnung fähig. Sind die mit der Kapselwand in Verbindung stehenden Fäden kürzer als die nach innen ausstrahlenden, so wird dadurch die Oberflächenvergrößerung stark behindert, weil kürzere Fäden die mit den Ausbuchtungen des Sporensackes verknüpften Dehnungs- und Lagenveränderungen nicht in dem Maße mitmachen können wie längere.

C. Systematik und Pflanzengeographie.

Die vielseitigsten Untersuchungen namhaftester Forscher haben das Ergebnis geliefert, daß die Polytrichaceen als die höchst organisierten Laubmoose zu gelten haben. Das weitere Verbleiben dieser Familie als solcher in der Gruppe der Bryineen ist nicht mehr zu rechtfertigen, sie muß gleich den Gattungen Buxbaumia, Diphyscium, Andreaea und Sphagnum zu einer selbständigen Unterklasse erhoben und an die Spitze der Laubmoosreihe gestellt werden. Dadurch würde sich die Zahl der Architypen[1]) der Mooswelt von drei auf die folgenden sechs erhöhen: Polytrichales, Buxbaumiales, Diphysciales, Andreaeales, Sphagnales und Bryales. Es ist nicht einzusehen, warum man bisher den Schritt, die Polytrichaceen an die erste Stelle zu setzen, noch nicht getan hat. In der sonst so ausgezeichneten Limpricht'schen Bearbeitung der Laubmoose in Rabenhorsts Kryptogamen-Flora leitet der Verfasser die Schilderung der Familiencharaktere mit den Worten „Am höchsten organisierte Familie der Mooswelt“ ein, beläßt sie aber altem Herkommen gemäß trotzdem als Familie in der durch das rein äußerliche Merkmal der Akrokarpie gekennzeichneten Gruppe der Musci acrocarpi.

Für die Vereinigung der Dawsonia-Arten mit den Polytrichaceen sprechen gewichtige Gründe. Ältere Systematiker wie Bridel-Brideri, C. Müller-Hal. u. a. bringen auch die Dawsonia-Arten bei den Polytrichaceen unter, Brotherus[2]) dadegen erhebt sie zu einer selbständigen Familie, ohne ersichtlichen Grund nach meinem Dafürhalten. Nachdem durch Goebel[3]) nachgewiesen war, daß das höchst sonderbare Peristom der Dawsonien in entwicklungsgeschichtlicher Beziehung durchaus dem Polytrichumperistom entspricht, liegt meines Erachtens erst recht keine Veranlassung mehr vor, jene zu einer selbständigen Familie zu stempeln. Die anatomischen Differenzen im Aufbau der vegetativen Organe von Dawsonia und Polytrichum sind nicht derart, daß man auf sie eine systematische

[1]) Vgl. J. Sachs, Phylogenetische Aphorismen und über innere Gestaltungsursachen und Automorphosen, § 4.

[2]) Brotherus in Engler-Prantl, Die natürlichen Pflanzenfamilien, Lieferung 222.

[3]) Goebel, Archegoniatenstudien. Flora, Band 96, Heft I, S. 22—35.

Trennung beider basieren kann. Schon der Umstand, daß die Dawsonien ausnahmslos mit einem vorzüglichen Schwellgewebe und deren Blätter außerdem mit kräftigen Lamellen versehen sind, dürfte genügen, um die nahe Verwandtschaft mit den Polytrichaceen überzeugend darzulegen. Bezüglich mancher Einzelheiten im Bau der Sporophyten stehen sie den typischen Polytrichaceen sogar viel näher — Rhizoidenkalyptra — als manche Formen, die man wie Lyellia seither ohne weiteres dieser Familie zurechnet. Wollte man die systematische Sonderstellung der Dawsonien aufrecht erhalten, so müßte meines Erachtens auch Lyellia und ein Teil der Psilopila aus der Polytrichaceen-Unterklasse entfernt und zu Vertretern besonderer Familien erhoben werden.

Nach Goebels Untersuchungen sind die Peristomzähne von Dawsonia nicht, wie man früher annahm, einfach, sondern gegliedert, während bei den Polytrichaceen sie sich aus Bündeln bastfaserähnlicher, ungegliederter, ganzer Zellen zusammensetzen. Auf Grund dieses anatomischen Befundes hat Mitten die Laubmoose in Arthrodontei und Nematodontei zerlegt. Nach dieser Einteilung würde Dawsonia von den Polytrichaceen getrennt werden, „sie ist daher aufzugeben“.[1])

Auf Grund vergleichend-anatomischer Untersuchungen vertritt Goebel die Ansicht, daß „die Gewebegliederung des Polytrichaceenrhizoms auf einer primitiveren Stufe stehen geblieben ist und Dawsonia superba diesen weniger differenzierten, primitiveren Charakter auch in den oberirdischen Sproßachsen beibehalten hat“.[2]) „Dawsonia“, so schreibt der genannte Forscher,[3]) „kann als primitive Form der Polytrichaceenreihe betrachtet werden. Dies spricht sich aus einerseits im Bau der Gamophyten, anderseits in dem der Sporophyten, speziell dem des Peristoms.“ Auch die „Aufstellung der Dawsonioidiae als einer von den Polytrichaceen getrennten Gruppe“ verwirft Goebel, „beide stellen nur Gruppen einer sehr natürlichen Familie dar“.[4])

Goebel ist auch „der Frage nach der Verwandtschaft der Polytrichaceen mit anderen Moosgruppen“[5]) näher getreten, von denen nach ihm außer den Buxbaumiaceen noch die Tetraphideen in Betracht kommen. Er wendet sich gegen Philibert,[6]) der den Versuch gemacht hatte, „zwischen dem Peristom der Dawsonieen und dem der Buxbaumieen eine hypothetische Verbindung herzustellen“.[7]) Philibert hat aber offenbar das entwicklungsgeschichtliche Moment, das in diesem Falle für die Feststellung der Verwandtschaft beider Gruppen ausschlaggebend sein kann, außer acht gelassen und ist deshalb zu irrtümlichen Auffassungen gelangt. „Etwas günstiger liegen die Verhältnisse für eine andere Moosgruppe, welche man ebenfalls mit den Polytrichaceen in Verbindung gebracht hat, den „Tetraphideen“. Man mag also annehmen, daß Tetraphideen und Polytrichaceen, eventuell auch die Buxbaumiaceen mehr oder minder nahe beieinander aus einem gemeinsamen Urstamm entsprungen seien, aber frühzeitig besondere Wege der Weiterentwicklung eingeschlagen haben.[8]) Nach allem, was uns also bisher über die systematische Stellung der Polytrichaceen bekannt geworden ist, dürfen diese weder mit Diphyscium und Buxbaumia noch mit den Tetraphideen zu einer natürlichen Familie vereinigt werden. Vorderhand dürfen wir wohl die letzteren als den Anschluß nach unten gelten lassen.

---

[1]) Goebel, Archegoniatenstudien, Band 96, Heft I, S. 198. [2]) Ibib., S. 17. [3]) Ibid., S. 198.
[4]) Ibid., S. 45. [5]) Ibid., S. 40.
[6]) Philibert, Revue bryologique, 1901.
[7]) Goebel, Archegoniatenstudien, Band 96, Heft I, S. 40. [8]) Ibid., S. 43.

Versucht man die Polytrichaceen, die als Unterklasse der Laubmoose nach der Nomenklatur Englers[1]) als Polytrichales bezeichnet werden müßten, systematisch zu gruppieren, so kann man sich von verschiedenen Einteilungsprinzipien leiten lassen. Geht man von rein morphologischen Gesichtspunkten aus, so würden wiederum mehrere Grundsätze befolgt werden können. Vielfach geben auch die biologischen Eigentümlichkeiten mancher Organe vorzügliche Anhaltspunkte für die systematische Einteilung ab.

Die Aufgabe der systematischen Botanik besteht in der „Gruppierung der Pflanzenformen nach ihrer natürlichen Verwandtschaft".[2]) Wenn wir annehmen, daß die Gattungen von Polytrichum, Polytrichadelphus, Bartramiopsis, Pogonatum, Rhacelopus, Catharinaea, Oligotrichum, Psilopilum, Dawsonia und Lyellia so nahe miteinander verwandt sind, daß wir sie zu einer Familie vereinigen können, so bleibt noch immer die Frage offen, in welchem verwandtschaftlichen Verhältnisse die einzelnen Gattungen zueinander stehen und an welche Familien bzw. größere systematische Gruppen wir sie nach oben oder nach unten angliedern sollen.

Es ist klar, daß ein Mann wie C. Müller-Hal., der sein ganzes Leben der Bryologie widmete und infolgedessen befähigt war, die große Reihe der Laubmoose in toto zu überblicken, sich ein wesentlich vollständigeres Bild von den verwandtschaftlichen Verhältnissen der Laubmoose hätte machen können als einer, der nicht über die Kenntnis so zahlreicher Formen verfügt. Leider hat aber der genannte Forscher von der Kraft, die in ihm wohnte, nicht den richtigen Gebrauch gemacht, denn er beachtete die zur Ergründung der Verwandtschaft unbedingt notwendige entwicklungsgeschichtliche und anatomische Literatur gar nicht. Wie wäre es sonst möglich gewesen, daß Müller die in entwicklungsgeschichtlicher und manch anderer Beziehung so isoliert dastehenden Gattungen Buxbaumia und Diphyscium mit den Polytrichaceen vereinigen konnte!

In seinem posthumen Werke „Genera Muscorum frondosorum" (p. 157) wählt er die Symmetrieverhältnisse des Sporogons zum Einteilungsprinzip. Lyellia und Dawsonia stellt er mit Buxbaumia und Diphyscium in der Sektion der Polytrichaceae asymmetricae zusammen. Er übersieht dabei aber vollständig, daß bei den Arten dieser Gattungen die Symmetrieverhältnisse in Gestalt einer ausgesprochenen Dorsoventralität in die Erscheinung treten, denn asymmetrisch nennt man nur den Körper, der in keiner Weise den Gesetzen der Symmetrie gehorcht. Dieses rein äußerliche Merkmal veranlaßt also Müller, jene vier Gattungen zu einer höheren systematischen Einheit zu verknüpfen und sie den Polytrichaceae symmetricae gegenüberzustellen. Es ist von mir darauf hingewiesen worden, daß alle Polytrichaceen, was die Symmetrieverhältnisse des Sporogons anbelangt, mehr oder weniger dorsoventralen Bau besitzen.

Müller war ein Feind der Dezentralisation und hat sich als solcher unbestreitbare, große Verdienste erworben, es kann aber auch nicht verschwiegen werden, daß er in seinem Bestreben zu konzentrieren, sehr oft zu weit gegangen ist. Wenn er die von anderen Autoren zu selbständigen Gattungen gestempelten Typen Rhacelopus und Pogonatum mit Aloidella, Cephalotrichum, Oedipyxis, Catharinella und Eupolytrichum unter Polytrichum vereinigt, so ist auch nicht das geringste dagegen einzuwenden, wenn er aber

[1]) Engler, Syllabus der Pflanzenfamilien, 1904.

[2]) Engler, Syllabus der Pflanzenfamilien, S. 6.

Atrichum, Psilopilum, Oligotrichum, Polytrichadelphus und Dendoligotrichum als „Hörige" der Gattung Catharinaea hinstellt, so muß dagegen Einspruch erhoben werden, da zu dieser Konzentration nicht der mindeste Anlaß vorliegt. Atrichum, Oligotrichum und auch Dendoligotrichum ruhen ja als Gattungen scheinbar auf recht schwachen Füßen, falls man nur die äußere Morphologie in Rücksicht zieht. Wesentlich anders gestaltet sich aber das Urteil, sobald die anatomischen Verhältnisse, besonders die des Stämmchens, die zur Ergründung der Verwandtschaftsverhältnisse unentbehrlich sind, Beachtung finden. Es ist zunächst hervorzuheben, daß Dendoligotrichum einen vorzüglich ausgebildeten polytrichoiden Zentralstrang besitzt, der von einer ebensolchen Endodermis umgeben ist, die als äußerst scharf umgrenzter Ring besonders bei Zusatz von Kalilauge hervortritt. Bei Oligotrichum ist nach Brotherus der Zentralstrang nicht polytrichoid; von der Richtigkeit dieser Angabe konnte ich mich an Querschnitten durch die Stämmchen zahlreicher Arten überzeugen. Die Atrichum-Arten haben nach Limpricht meist einen polytrichoiden Zentralstrang. Wir sehen also, daß der einfache — nicht polytrichoide Zentralstrang von Oligotrichum bei den meisten Atrichum-Arten den polytrichoiden Typus annimmt und bei Dendoligotrichum den höchsten Grad der Differenzierung der Gewebe erreicht. Wir sind wohl berechtigt, aus diesem anatomischen Befund den Schluß zu ziehen, daß Dendoligotrichum Atrichum näher steht als Oligotrichum, ganz abgesehen davon, daß die beiden erstgenannten Gattungen auch sonst eine höhere Stufe der Entwicklung repräsentieren.

Müller hat auch Polytrichadelphus in seinem großen Genus Catharinaea aufgehen lassen, und zwar deshalb, weil es bezüglich der Haubenbildung mit den übrigen Untergattungen übereinstimmt. Es gibt aber Polytrichadelphus-Arten, deren Haube einen relativ starken Rhizoidenfilz aufweisen, sodaß es doch sehr gewagt ist, sie mit Catharinaea zu vereinigen. Sie würden auch, was die Symmetrie der Kapsel anbelangt, zu Buxbaumia, Diphyscium, Lyellia und Dawsonia als den Vertretern der Polytrichaceae asymmetricae gestellt werden müssen. Denn gerade auch bei ihnen ist die Kapsel zweikantig und im Querschnitt halbmondförmig, was Müller ganz übersehen zu haben scheint. Der polytrichoide Zentralstrang ist bei Polytrichadelphus sehr gut entwickelt, die Blätter sind sehr scharf in Scheide und Spreite gesondert, besitzen im Gegensatz zu Atrichum und Oligotrichum ein gut ausgebildetes Schwellgewebe und können demzufolge — auch wieder im Gegensatz zu Atrichum und Oligotrichum — in Übereinstimmung mit vielen Polytricha Bewegungen in der Trocken- und Feuchtigkeitsstellung ausführen. Abweichend von Atrichum und Oligotrichum wird die Spreite der Polytrichadelphusblätter der ganzen Länge nach von Lamellen bedeckt, auch sind überall die Lamellenendzellen nach derselben Grundform gebaut. Wohin man also kommt, wenn bei systematischen Erwägungen nicht die Gesamtorganisation der Leitstern ist, offenbart sich so recht an der von C. Müller beliebten Art, das System nach rein äußerlichen und nur nach einem einzigen Merkmal aufzustellen.

Noch weniger als Polytrichadelphus darf Psilopilum in der Gattung Catharinaea belassen werden. Die peristomlosen Arten, wie P. gymnostomulum C. M., pygmaeum C. M., Ulei Broth., Bellei Broth. sträuben sich gegen ihre Vereinigung mit Catharinaea. Die eigenartige Gestalt — trichterförmig — des Epiphragmas und die bei den genannten Arten zu beobachtende Nacktmündigkeit weisen auf Lyellia hin. Manche Arten verfügen allerdings über ein Peristom, bei anderen sind die Zähne sehr ungleichmäßig ausgebildet. Wie es scheint, ist nirgends ein polytrichoider Zentralstrang vorhanden.

Den höchsten diagnostischen Wert besitzen solche Merkmale, die zeitlebens an dem Individuum haften und hierher gehören auch biologische Eigentümlichkeiten, die man bisher fast gar nicht berücksichtigt hat. Diese haben den anderen gegenüber oft noch den Vorzug, daß sie ohne besondere Hilfsmittel, beispielsweise ohne Verwendung einer Lupe, festgestellt werden können. So können in vielen Fällen die charakteristische Aufwärtsbewegung der Blätter in die Trockenstellung, die bei Eintrocknung für viele Formen eigentümlichen Kräuselungen, spiralige oder anders geartete Drehungserscheinungen u. s. w. zur Feststellung einer Art dienen. Die Torsionen der Stämmchen haben keinen diagnostischen Wert, weil die Untersuchungen lehren, daß es rechts- und linksdrehende Stämmchen bei einer und derselben Art gibt. Für die Unterscheidung der Arten kommen in erster Linie die anatomischen Details der Blätter in Betracht, ferner die Eigentümlichkeiten im Bau des Sporogons. Ohne Zuhilfenahme des Mikroskops ist nur selten auszukommen, denn oft verbirgt sich das spezifische Merkmal in der anatomischen Beschaffenheit des Blattquerschnitts. Ich habe die Blattquerschnitte vieler hundert Polytrichaceen untersucht und kann jetzt schon auf Grund diesbezüglicher Beobachtungen mitteilen, daß eine nicht geringe Anzahl der von C. Müller-Hal. aufgestellten Formen spezifisch nicht voneinander abweichen. In sehr zahlreichen Fällen führen erst die Untersuchungen der Lamellenendzellen zu dem gewünschten Ergebnis. Welch hohe diagnostische Bedeutung diesen innewohnt, ergibt sich aus den Bestimmungstabellen, die Brotherus in den „Natürlichen Pflanzenfamilien“ (Lieferung 221 und 222) veröffentlicht hat. Es läßt sich ohne Berücksichtigung irgend eines anderen Organs lediglich auf die anatomischen Verhältnisse des Blattes hin eine Bestimmungstabelle aufstellen, die alle bekannten Polytrichaceen umfaßt.

In seinem Bestreben, die Polytrichaceen zu klassifizieren, hat C. Müller-Hal. mehrere Male unbewußt Gruppen gebildet, deren Vertreter in pflanzengeographischem und zugleich biologischem Sinne zusammengehören. Es sind dies die Arten der Sektion Catharinella und der Subsektion Polytricha pilifera seiner Gattung Polytrichum. Die Catharinella-Arten[1]) C. Müllers sind fast ausschließlich auf das Gebiet der tropischen Regenwälder beschränkt und folgen in ihrer Verbreitung vollständig den Ausbuchtungen, welche die feuchtwarme Zone nach den verschiedenen Breiten hin erfährt. Sie sind ausgesprochene Hygrophyten, die einerseits in der westafrikanischen Waldprovinz und dem Monsungebiet des paläotropischen Florenreichs, anderseits in mehreren Gebieten (Hyläa) des zentral- und südamerikanischen Florenreichs[2]) ein den physiognomischen Charakter der Landschaft sicher beeinflussendes Element darstellen. Ich habe schon früher an mehreren Stellen auf diese Formen hingewiesen, es sei jetzt noch hinzugefügt, daß deren Lamellen in der Regel wenig dicht stehen und wenige Zellen hoch sind und daß die Lamellenendzellen keine besonders hervorstechenden Eigentümlichkeiten gegenüber den übrigen aufweisen. In dieser Beziehung zeigen sie vollständige Übereinstimmung mit den einheimischen hygrophilen Catharinaea-Arten. Das Gewebe des Blattes ist locker, die Sklerenchymplatten sind relativ schwach ausgebildet. In höheren Regionen verschwinden die Catharinella-Arten, beispielsweise in

---

[1]) Hierher rechne ich noch sehr zahlreiche Arten, die C. Müller besonders in den Sektionen Pogonatum und Aloidella unterbringt.

[2]) Engler, Syllabus der Pflanzenfamilien. Übersicht über die Florenreiche und Florengebiete der Erde. S. 213—216.

dem nordafrikanischem bzw. ost- und südafrikanischen Steppengebiet (C. latidens C. M., flexibifolia C. M., rubenti-viridis C. M., Molleri C. M., brevi-urnacea C. M., cubensis Sull., obscuro-viridis C. M., fast alle in Kamerun, Pogonatum macrophyllum D. et M., Polytrichum Humboldtianum und zahlreiche andere).

Wesentlich anders verhalten sich die zur Sektion Polytricha pilifera gehörenden Arten. Ihre Lamellen sind die höchsten, welche ich beobachtete, und durch die höchst eigentümlichen, hyalinen, flaschenförmigen Anfügungen ausgezeichnet. Die Blattränder bedecken die Lamellenschicht und dürfen als unbeweglich angesehen werden. Die Zellen dieser Randfflächen sind für Licht leicht durchlässig, so daß man durch sie die Lamellenendzellen unter dem Mikroskop wahrnehmen kann. Die Tiefe der Lamellenschicht macht besondere Einrichtungen zur Zerstreuung des von oben kommenden Lichtes notwendig, und als solche betrachte ich die hyalinen Anfügungen.

Die Polytricha pilifera sind scharf ausgeprägte Xerophyten, sie kommen in allen, in niedrigen Breiten aber nur in bedeutender Höhe vor. Interessant ist in dieser Beziehung z. B. die von Volkens am Kilima-Ndscharo in bedeutender Höhe gesammelte und von C. Müller als Polytrichum nano-globulus beschriebene Form, da sie außer der apikalen hyalinen Anfügung an ihren Lamellenendzellen meist noch mehrere seitliche Anfügungen hervorbringt.

Weiterhin besteht im anatomischen Aufbau große Übereinstimmung. Die dorsalen Sklerenchymbündel sind sehr kräftig ausgebildet und reichen, abweichend von zahlreichen anderen Polytrichaceen, bis zum einschichtigen Rand und nehmen den größten Teil des Blattquerschnitts ein. Die Membranen der Sklerenchymzellen sind stark verdickt, besonders auch die der dorsalen Epidermis. Ebenso weist der Besitz des wohlausgebildeten Glashaares und des Schwellgewebes auf Xerophilie hin (Polytrichum patagonicum C. M., stolonigerum C. M., tuberculosum C. M., pilifolium C. M., hyperboraeum R. Br., boreale Kindbg., Spegazzinii C. M., piliferum Schreb. u. a.).

In geographischer Hinsicht besonders bemerkenswert ist die Verbreitung der Psilopilum-Arten. Von wenigen Formen, die in sehr bedeutender Meereshöhe vorkommen, abgesehen, sind sie durchweg Bewohner des arktischen, des austral-antarktischen und des Kerguelen-Gebietes.[1]) Die wenig kräftigen Arten dieser Gattung haben also vorzugsweise ihre Verbreitung in zwei weit voneinander entfernten, der Breite nach sich entsprechenden Erdgebieten, die man sich in Gestalt zweier schmaler Gürtel um die Erde gelegt denken kann.

In ausgezeichneter Weise tritt bei der Mehrzahl der Psilospila die Form des Rollblattes auf. Es wird hier nicht wie bei vielen hygrophilen Arten von Atrichum, Oligotrichum, Catharinella eine Rinne erst bei Verlust des Wasser hervorgebracht, die verhältnismäßig sehr breiten Blattsäume sind vielmehr dauernd aufgerichtet und verwandeln die ventrale Seite des Blattes in eine Hohlrinne, in der sich die nicht gerade sehr häufigen Lamellen befinden. Die Blätter der Psilopila haben keinen scheidigen Grund, sie sind meist auch in turgeszentem Zustand stark an der Oberseite gebogen, trocken aber in der Regel stark schneckenförmig eingerollt.

Den größten Teil des Jahres hindurch leidet der Boden arktischer Breiten unter niedriger Temperatur, er ist für die Pflanzenwelt physiologisch trocken. Auch während des kurzen Sommers können die klimatischen Bedingungen als nicht besonders günstig für

[1]) Engler, Syllabus der Pflanzenfamilien, S. 209, 217.

die Pflanzenwelt angesehen werden; rasch wachsen dann die Knospen höherer Pflanzen zu Trieben aus, ebenso schnell vollzieht sich die Entwicklung der Blüten und Früchte. Mit dem zur Verfügung stehenden Wasser — ich meine das in der Pflanze vorhandene — müssen viele Formen recht haushälterisch umgehen, und darin werden sie von den Rollblättern, die eine übermäßige Transpiration verhindern, unterstützt. Es ist nicht einzusehen, warum nicht auch bei den Laubmoosen die Form der Rollblätter vorkommen soll. Nach meinem Dafürhalten sind die Psilopila ein Analogon zu den mit Rollblättern ausgestatteten höheren Pflanzen niederer bezw. mittlerer Breiten. Aus dieser pflanzengeographischen Erwägung heraus hat sich mir die Überzeugung aufgedrängt, daß das Genus Psilopilum ein scharf umschriebenes ist und nicht mit Atrichum, Oligotrichum und Dendoligotrichum zu Müllers Gattung Catharinaea vereinigt werden darf.

Nicht minder interessant ist die geographische Verbreitung der Dawsonia-Arten, die, soweit ich darüber Auskunft in den einschlägigen Werken und Herbarien erhalten konnte, auf Australien, Neu-Guinea und Neu-Seeland beschränkt sind. Der bekannte Tiergeograph Wallace vertritt die Ansicht, daß Neu-Seeland und Neu-Guinea einstmals mit Nordaustralien verbunden waren, die Verbreitung der Dawsonien stützt sehr gut die Annahme einer derartigen Landverbindung, denn auf der größtenteils von Wüste und Steppe eingenommenen Schichttafel Westaustraliens sind bisher Vertreter der Gattung Dawsonia nicht angetroffen worden. Der Verbreitungsbezirk ist also ein sehr beschränkter, zumal von den gebirgigen Teilen des Kontinents und auch von Neu-Guinea und Neu-Seeland nur einige Areale in Betracht kommen.

Neben Madagaskar haben Neu-Seeland und Australien einschließlich Tasmanien die altertümlichste Fauna und Flora aufzuweisen. Es ist nicht nur denkbar, sondern sogar höchst wahrscheinlich, daß uns in den Dawsonien, die hinsichtlich des Baues ihres Peristoms so von allen übrigen Laubmoosen und durch die primitivere Anatomie des Stämmchens wesentlich von Polytrichum abweichen, ebenfalls altertümliche Formen erhalten geblieben sind.

Von der Gattung Dendoligotrichum sind bis jetzt nur vier Arten bekannt geworden, von denen noch nicht feststeht, daß sie echte Arten sind. Ihr Vorkommen in zwei voneinander weit getrennten Gegenden der Erde (Chile und Feuerland einerseits, Neu-Seeland anderseits) ist schon C. Müller-Hal. aufgefallen, der sich darüber folgendermaßen[1]) äußert: „Man bemerke in der eigentümlichen Verbreitung besagter drei Arten — nach Brotherus „Natürliche Pflanzenfamilien“ sind es jetzt vier —, wie groß hier abermals die Verwandtschaft der Formen von Fuëgia, Chile und Neu-Seeland sich ausdrückt. Man kann eine so wunderbare Ähnlichkeit der Pflanzen, welche sich in der Regel entsprechen, sicher nicht anders erklären als durch die Annahme, daß sowohl die Flora von Fuëgia und Valdivia wie die Flora von Neu-Seeland gleichalterig sein müssen.“ Wir können uns nicht der Einsicht verschließen, daß die Verbreitung der Dendoligotricha von höchstem pflanzengeographischen Interesse ist und zu weiterem Nachdenken über die Gründe anregt die zu einer derartig seltsamen Verbreitung führten. Manche Forscher nehmen an, daß in früheren Erdzeitläuften Südafrika einschließlich Madagaskar, Südamerika und Australien mit Neu-Seeland große kontinentale Massen gebildet haben. Diese Annahme reicht aber nicht aus, um die Verbreitung der Dendoligotricha zu erklären, weil der Indische und

[1]) C. Müller, Genera muscorum frondosorum.

Pazifische Ozean als unüberspringbare Schranken sich ihrer Verbreitung hindernd in den Weg gestellt haben würden. Wir sind also gezwungen, entweder eine Landverbindung zwischen Australien über Madagaskar und Afrika nach Südamerika oder eine solche zwischen Südamerika und Neu-Seeland anzunehmen. Soviel mir bekannt ist, neigt man in geologischen Kreisen zu der Ansicht, daß die erstgenannte Verbindung existiert hat, wogegen man das stille Weltmeer als einen seit jeher von Wasser bedeckten Teil der Erdoberfläche ansieht.

Ich kann mir nicht denken, daß die riesenhaften Dendoligotricha von Norden her infolge zunehmender Abkühlung der Erde aus ihren Wohnsitzen vertrieben und zur Auswanderung nach dem Süden veranlaßt worden sein sollten, wo sie sich im Kampfe ums Dasein den neuen klimatischen Verhältnissen anpaßten. Viel wahrscheinlicher ist es, daß die Tier- und Pflanzenwelt des größten Kontinents der nördlichen Hemisphäre, die während unermeßlicher Zeiträume im Kampfe um Daseins die größte Kraft gewonnen hatten, allmählich südwärts vordringend das Terrain eroberten, die weniger kräftigen Konkurrenten vernichteten oder an Stellen zurückdrängten, wo diese mit den Eindringlingen von Norden her den Kampf, ohne zu erliegen, aufnehmen konnten. Vielleicht gehören die Dendoligotricha zu diesen siegreichen Vertretern der Flora südlicher Breiten, gleich den Dawsonien möchte ich sie deshalb auch für Formen von durchaus altertümlichem Gepräge ansehen.

Dendoligotrichum darf unter keinen Umständen nach dem Vorgang C. Müllers-Hal. mit Psilopilum und Polytrichadelphus in der Gattung Catharinaea belassen werden. Wenn irgend ein Polytrichaceengeschlecht Anspruch darauf erheben kann, als selbständige Gattung zu gelten, so ist es Dendoligotrichum. Ganz abgesehen von dem dendritischen Habitus, der hier in seiner reinsten Form sich offenbart, widersprechen die hoch differenzierten anatomischen Verhältnisse des Stämmchens und auch die histologische Beschaffenheit der Blätter einer Vereinigung mit Catharinaea, Psilopilum und Polytrichadelphus. Ich glaube aber auch, daß in vielen Fällen die geographische Verbreitung der Arten den Weg weist, auf dem wir zur richtigen systematischen Bewertung einer Art, Gattung u. s. w. gelangen können, und dies möchte ich ganz besonders für Dendoligotrichum annehmen, dessen Arten, wie ausgeführt wurde, eine höchst eigentümliche Verbreitung besitzen.

Die artenreiche Gattung Polytrichadelphus bietet in geographischer Hinsicht ebenfalls recht bemerkenswerte Züge. Es ist zunächst hervorzuheben, daß bisher nur aus der Neuen Welt (Amerika und Australien einschließlich Tasmanien und Neu-Seeland) Polytrichadelphus-Arten bekannt geworden sind. Die meisten Formen bevölkern in durchweg sehr bedeutender Erhebung über dem Meeresspiegel das gewaltige Kettengebirge der Kordilleren von Vancouver-Island im Norden bis zur Magelhaensstraße im Süden. Auch im brasilianischen Bergland kommen mehr in der Nähe der Küste einige Arten vor. In Australien sind sie auf den Faltenzug des Ostens, der sich in die Insel Tasmania fortsetzt, und auf die vorgelagerte Falte von Neu-Seeland beschränkt, sie scheinen auch hier ausschließlich alpine Höhen zu bevorzugen.

Alle Polytrichadelphus-Arten sind Xerophyten, in den anatomischen Verhältnissen des Stämmchens und der Blätter gelangt dies deutlich zum Ausdruck.

Wie aus den Daten über die geographische Verbreitung der Dawsonia-, Psilopilum-, Dendoligotrichum- und Polytrichadelphus-Arten sich ergibt, haben diese mit Ausnahme weniger Psilopila- und Polytrichadelphus-Formen, ihre Verbreitung ausschließlich in den

relativ jungen Faltenzügen Westamerikas, Ostaustraliens und Tasmaniens, Neu-Guineas und Neu-Seelands. Sie gehören also vornehmlich der riesigen Falte an, welche das pazifische Weltmeer ungefähr halbkreisförmig einschließt. Aber die Verbreitung der in Betracht kommenden Arten erstreckt sich nur auf die südlichen Abschnitte dieses Faltenbogens in der Kette nördlich von Vancouver über die Aleuten, Kurilen, Japan, Liu-Kiu, Formosa, Philippinen, Molukken und Sundainseln fehlen sie anscheinend vollständig.[1]) Vergegenwärtigt man sich nun, daß einige Psilopilum-Arten auf Südgeorgien (Ps. tapes C. M. und Ps. antarcticum C. M.) und letztere Form auch auf den weit davon entfernten Kerguelen vorkommt, so wird man zu der Annahme gedrängt, daß diese Inselgruppen auf einer submarinen Falte liegen, die sich von den Feuerlandsinseln in der Richtung auf Tasmanien bzw. Neu-Seeland hinzieht, der nördliche Bogenabschnitt der pazifischen Falte würde dadurch für die Erklärung der Verbreitung der betreffenden Arten nicht in Frage kommen. Auch die geographische Verbreitung der Dendoligotricha ließe sich, obwohl solche auf den zuletzt genannten Inseln bisher nicht nachgewiesen wurden, durch die Annahme einer solchen Falte zwanglos erklären und was von Dendoligotrichum gilt, dürfte auch für Polytrichadelphus zutreffen.

[1]) Neuerdings nach Geheeb kommt Dawsonia auch auf Borneo vor.

Den größten Teil des Materials zu meinen Untersuchungen erhielt ich aus den Herbarien des K. Pflanzenphysiologischen Instituts zu München, des K. Botanischen Museums zu Berlin-Dahlem und aus der Privatsammlung des Kgl. Forstmeisters Herrn C. Grebe in Hofgeismar.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, den Herren Geh. Rat Professor Dr. K. Goebel, Geh. Oberegierungsrat Professor Dr. A. Engler, Professor Dr. G. Lindau und Kgl. Forstmeister C. Grebe meinen verbindlichsten Dank abzustatten für die Liberalität, mit der sie mir die Schätze der betreffenden Herbarien zur Verfügung stellten.

Dr. W. Lorch.

Erklärung der Figuren.

Figur 1. Querschnitt durch die Achse erster Ordnung und zwei zugehörige Achsen zweiter Ordnung der ruhenden Astanlage von Polytrichum commune L.

„ 2. Querschnitt durch die Achse erster Ordnung einer ruhenden Astanlage von Polytrichum commune L.

„ 3. Querschnitt durch eine Achse zweiter Ordnung einer ruhenden Astanlage von Polytrichum commune L.

„ 4. Querschnitt durch die Achse erster Ordnung einer ruhenden Astanlage von Polytrichum commune L., etwas höher geführt als in Fig. 1.

„ 5. *α* und *β*. Querschnitte durch das Blatt von Oligotrichum javanicum D. et M.

„ 6. Querschnitt durch das Blatt von Pogonatum semilamellatum M. Linke Blatthälfte.

„ 7. *α*. Teil des Blattes von Catharinaea Hausknechtii Jur. et Milde von der Unterseite. Zähnchenreihen. — *β*. Einige Zähnchen vergrößert.

„ 8. Längsrchnitt durch das Stämmchenende einer Polytrichum-Art, median geführt. *t* Scheitelzelle.

„ 9. Querschnitt durch ein junges Blatt einer Polytrichum-Art.

„ 10. Querschnitt durch dasselbe Blatt, etwas tiefer geführt.

„ 11. Querschnitt durch das junge Blatt einer Polytrichum-Art.

„ 12. Querschnitt durch das junge Blatt von Polytrichum piliferum Schreb.

„ 13. Schema von Fig. 12.

„ 14. Schema von Fig. 11.

„ 15. *α*. Teil eines Blattquerschnitts von Polytrichum piliferum Schreb. — *β*. Schema von *α*.

„ 16. Querschnitt durch ein junges Blatt von Polytrichum. Unteres Spreitenende. Rechte Seite gefördert. Zellen punktiert.

„ 17. Lamellenendzellen vom mittleren Teil des Blattes von Polytrichum subremotifolium Hampe.

„ 18. Die Endzellen der drei mittleren Lamellen des Blattes von Polytrichum subremotifolium Hampe.

„ 19. Querschnitt durch ein junges Blatt von Polytrichum piliferum Schreb. Ungefähr durch die Mitte.

„ 20. Lamellen von Polytrichum Humboldtianum Hampe auf dem Blattquerschnitt.

„ 21. a und b. Querschnitteile vom Blatte von Polytrichum flexuosum C. M.

„ 22. Querschnitt durch das Blatt von Pogonatum microstomum Br. Eur. Lamellenquerwände sind nicht gezeichnet.

„ 23. Lamellenendzellen von Polytrichum nano-globulus C. M. im Querschnitt.

„ 24. Flaschenförmige hyaline Wandverstärkungen an den Endzellen der Lamellen von Polytrichum piliferum Schreb. und Pogonatum microstomum Br. Eur.

„ 25. Teile des einschichtigen umgeschlagenen Blattsaumes von Polytrichum piliferum Schreb. b. Randpartie mit gewelltem Saum.

„ 26. Algenmasse an der Spitze des Blattes von Pogonatum microstomum Br. Eur.

„ 27. Algenmassen an dem Blatte von Polytrichum mahense Besch.

„ 28. Ein kleiner Teil einer solchen Algenmasse stark vergrößert.

„ 29. Algenmasse an der Blattoberseite von Pogonatum Junghuhnianum D. et M.

„ 30. a. Querschnitt durch das Blatt von Polytrichum alpinum Dill. — b. Teil eines Blattquerschnitts von Polytrichum perichaetiale Mort. — c. Teil eines Blattquerschnitts von Pogonatum capillare Mich.

„ 31. Schema eines Blattquerschnitts einer Polytrichacee.

„ 32. Endzellen der Lamellen von Polytrichum juniperinum Willd.

Figur 33. 1. Lamelle von Catharinaea angustata Brid., 2. von Polytrichum brachypelma C. M., 3. von Polytrichum Warburgi C. M., 4. von Polytrichum sexangulare Flörke, 5. von Polytrichum subgracile Hampe, 6. von Pogonatum capillare Mid., 8. von Polytrichum alpinum L., 9. von Polytrichum commune L., 10. von Polytrichum Volkensii Broth., 11. von Polytrichum Mülleri Schpr., 12. von Polytrichadelphus semiangulatus Pers., 13. von Polytrichum robustum C. M. 14. von Polytrichum Teysmannianum D. et M.

„ 34. Teile von Querschnitten durch Rippe und Lamina des Blattes von Pogonatum macrophyllum D. et M.

„ 35. Querschnitt durch das Blatt von Dawsonia Beccarii Geh. et Schlieph.

„ 36. Teil eines Blattquerschnitts von Polytrichadelphus Lyalli Mitt.

„ 37. a und b. Teile von Blattquerschnitten von Dawsonia Victoriae C. M.

„ 38. I. Längsschnitt durch den Fuß von Dawsonia Victoriae C. M.
II. Querschnitt durch den Fuß von Dawsonia Victoriae C. M.

„ 39. und 40. Längsschnitte durch den Fuß einer Polytrichum-Art.

„ 41. Jugendliche embryonale Generation von Polytrichum pycnocarpum C. M.

„ 42. Längsschnitt durch Fuß und Vaginula von Dawsonia Victoriae C. M.

„ 43. Längs- und Querschnitt durch den Fuß von Diphyscium foliosum Mohr.

„ 44. Längsschnitt durch das Stämmchenende von Cleistostoma ambiguum Brid.

„ 45. Längsschnitt durch den Fuß von Cleistostoma ambiguum Brid.

„ 46. Gewebe unter dem Fuß von Cleistostoma ambiguum Brid.

„ 47. Längsschnitt durch den Fuß von Gigaspermum repens Hook.

„ 48. Längsschnitt durch den unteren Teil des Sporophyten von Eriopus Zürnianus.

„ 49. Junger Sporophyt von Eriopus cristatus Hedw.

„ 50. Schematische Darstellung der Entwicklung des Sporophyten von Eriopus.

„ 51. Längsschnitt durch den unteren Teil des Sporophyten von Eriopus Jellineki C. M.

„ 52. Frei präparierter jugendlicher Sporophyt von Eriopus remotifolius C. M.

„ 53. Gewebe über der gebräunten Zone am Fuße von Eriopus Jellineki C. M.

„ 54. Sporogon und oberer Setenabschnitt einer Eriopus-Art.

„ 55. Längsschnitt durch die Seta von Eriopus Zürnianus.

„ 56. Querschnitt durch die Haube von Eriopus Jellineki C. M.

„ 57. Querschnitt durch den oberen Setenteil einer Polytrichum-Art.

„ 58. Längsschnitt durch den obersten Seten- und untersten Sporogonabschnitt von Polytrichum juniperinum Willd.

„ 59. Längsschnitt durch einen Teil des Sporophyten von Polytrichum Beccarii C. M.

„ 60. Längsschnitt wie Fig. 59. Trennzelle des Rhizoids.

„ 61. Symmetrieverhältnisse der Haube von Polytrichum piliferum Schreb.

„ 62. Schematischer Längsschnitt durch das Stämmchenende einer Campylopus-Art.

„ 63. Querschnitt durch eine ruhende Knospe von Jaegerina stolonifera C. M.

„ 64. a. Brutknospen, b. tüpfelreiche Zellen in der Nähe der ruhenden Knospe von Jaegerina stolonifera C. M.

„ 65. a. Epidermiszellen des Sporogons von Pogonatum aloides bei tieferer Einstellung, b. im Querschnitt, c. bei höherer Einstellung.

Über

Altperuanische Schädel

von Ancon und Pachacamác.

II. Abhandlung:

Die Schädel der Gaffronschen Sammlung.

Von

Johannes Ranke.

Mit 9 Tafeln.



1.

Mit der reichen Sammlung Peruanischer Altertümer der Gaffronschen Kollektion,[1]) welche jetzt einen wertvollen Bestandteil der Ethnographischen Sammlung des Bayerischen Staates bildet, wurden auch 37 skelletierte Schädel, 4 noch mit den vertrockneten Weichteilen und den Haaren bedeckte Mumienköpfe, 1 Schädelmaske, 1 vollständige Mumie einer erwachsenen Person und 2 mumifizierte Körper von vielleicht noch nicht vollkommen ausgetragenen Neugeborenen und ein Neugeborenenkopf aus den gleichen Fundplätzen wie die ethnographischen Objekte stammend, erworben.

Die genannten somatischen Reste wurden der anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates einverleibt. Die Mumien und mumifizierten Köpfe stammen aus dem altberühmten Totenfelde von Ancon.[2]) Die Schädel sind zum Teil als aus dem gleichen Fundplatze stammend direkt bezeichnet, ein anderer Teil stammt der Bezeichnung nach aus Pachacamác. Es sind das die gleichen beiden Fundplätze, von welchen I. K. H. Prinzessin Therese von Bayern im Jahre 1898 33 (resp. 34) Schädel persönlich gesammelt und der anthropologisch-prähistorischen Sammlung zur Untersuchung und Bewahrung übergeben hat.

Über dieses wissenschaftlich wichtige Geschenk habe ich im Jahre 1900 eingehend in diesen Abhandlungen berichtet unter dem Titel: Über altperuanische Schädel von Ancon und Pachacamác, gesammelt von I. K. H. Prinzessin Therese von Bayern. Mit 9 Tafeln und 41 Figuren im Text. 122 Seiten.

Der Angabe nach, welche die Untersuchungen vollkommen bestätigen, stammen auch die unbezeichneten Schädel der Gaffronschen Sammlung von den gleichen beiden Fundplätzen. Da aber ohne direkte Angaben eine Ausscheidung der Schädel nach ihrer genauen Provenienz nicht mit voller Sicherheit ausführbar ist, so sollen im folgenden die neuerworbenen Schädel zunächst als eine zusammengehörende Reihe betrachtet werden.

Gaffron ist Arzt und hat als solcher mit besonderem Interesse die somatischen Reste der präkolumbischen Bevölkerung Perus gesammelt.

---

[1]) Die Gaffronsche Sammlung. Münchener Allgemeine Zeitung, 1907, Nr. 80, S. 2.

[2]) W. Reiss und A. Stübel, Das Totenfeld von Ancon in Peru. Darin XIV. Schädel, Tafel 108 bis 116 von R. Virchow.

Zunächst waren es die verschiedenen Grade und Formen der Deformation, welche für die Aufsammlung und Aufbewahrung entscheidend waren; und in der Tat enthält die Kollektion eine bemerkenswerte Mannigfaltigkeit von Deformationsformen der Schädel. Es sei schon hier bemerkt, daß keiner der neuerworbenen Schädel von Deformation vollkommen frei ist, freilich macht sich bei einigen die Umgestaltung der normalen Form nur dem durch vergleichende Betrachtung geschärften Auge bei eingehender Analyse kenntlich. Solche Schädel erscheinen auf den ersten Blick als normal geformt.

Auch für die seit Tschudis[1]) ersten Angaben nicht mehr zur Ruhe gekommene Diskussion über den sogenannten Inca-Knochen[2]) bringt die Gaffronsche Sammlung interessantes Material, ebenso zu der Frage, inwieweit etwa die Deformation durch „Vererbung" angeboren ist.

Ein weiteres Moment, welches für die Aufsammlung Gaffrons bestimmend war, ist die so viel besprochene Frage der präkolumbischen Lues in Amerika. Die Sammlung enthält mehrere Schädel mit mehr oder weniger ausgesprochener krankhafter Veränderung, einer derselben, Nr. 32, Ancon, ist in extremem Grade pathologisch.[3])

Die folgenden Untersuchungen schließen sich direkt an meine oben zitierte Abhandlung an, als deren Fortsetzung und Ergänzung sie zunächst gelten wollen. Betreffs der Literatur über unseren Gegenstand verweise ich auf die dort gemachten Angaben. Die wichtigste neuere Publikation über die amerikanische Schädeldeformation bleiben R. Virchows Crania ethnica Americana, Sammlung auserlesener, amerikanischer Schädeltypen. Mit 26 Tafeln und 29 Textillustrationen. Groß-Folio. Berlin, Asher & Co., 1892. Hier findet sich die ältere Literatur und auch das gesamte Material zur Beurteilung der entscheidenden Differenzen zwischen Virchows und meinen Ergebnissen.

Wie neu und unerwartet die letzteren waren, geht aus den Besprechungen meiner Abhandlung durch R. Virchow[4]) und A. Lissauer hervor. Ich begreife die Haltung der beiden ausgezeichneten Forscher vollkommen, war ich doch selbst von meinen Untersuchungsresultaten überrascht. Bis dahin hatte ich nicht an der „beabsichtigten" Schädeldeformation unter den Alt-Peruanern gezweifelt; ich habe eine solche in meinem Lehrbuch: Der Mensch[5]) in der I. und II. Auflage (letztere 1894) direkt und eingehend gelehrt. Bd. I, S. 187—192 „Schädelplastik" und Bd. II, S. 234—238 „Deformation der Schädel", S. 190, Bd. I habe ich Rüdingers Abbildung: Kind in der Kopfpresse, Alt-Peru, in vollem Glauben an eine solche ebenso unvernünftige wie grausame Sitte wiedergegeben.

[1]) Dr. J. J. Tschudi, Über die Ureinwohner von Peru. Hiezu Tafel IV und V. Joh. Müllers Archiv für Anatomie und Physiologie, 1844, II. Abt., S. 98—109.

[2]) Tschudi selbst nennt ihn Inga-Knochen, os Ingae, l. c., S. 108.

[3]) Die pathologischen Verhältnisse unserer Altperuaner Schädel sind bearbeitet von Dr. med. und phil. Karl Jäger, Kaiserl. Marine-Oberassistentsarzt, in Beiträge zur frühzeitlichen Chirurgie. Inauguraldissertation. Wiesbaden, C. W. Kreidels Verlag, 1907. Text 141 Seiten und Atlas mit 13 Lichtdrucktafeln. Aus dem Münchener anthropologischen Institut.

[4]) R. Virchow, Zeitschrift für Ethnologie, 32. Jahrg., 1900, S. 226. Dazu Max Uhle, Zeitschrift für Ethnologie, 33. Jahrg., 1901. Verhandlungen S. (404).

[5]) J. Ranke, Der Mensch. II. Auflage. Leipzig und Wien. Bibliographisches Institut. 1894.

Gegen meine auf Beobachtungen gegründete Darstellung der Bedeutung und der Methoden der altperuanischen Schädeldeformation sind auf neue Untersuchungen begründete Einwendungen kompetenter Forscher nicht erhoben worden. Ohne neue Untersuchungen und Überprüfung der alten Ergebnisse nach den von mir gefundenen neuen Gesichtspunkten ist ein etwaiger Widerspruch selbstverständlich bedeutungslos.

Mir hat nun die neue Schädelsammlung aus den gleichen Fundplätzen, aus welchen die Schädel meiner ersten Serie stammen, Gelegenheit gegeben, meine 1900 gewonnenen Resultate wieder zu prüfen.

Herr Privatdozent Dr. Ferd. Birkner, K. Kustos an der anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates und die Herren stud. geogr. und anthr. Max Mayr und Ried haben mich bei den Untersuchungen auf das wirkungsvollste unterstützt, so daß ich die als Mitarbeiter an der vorliegenden Abhandlung zu bezeichnen habe. Mit eingehendster Sorgfalt wurde Schädel für Schädel wiederholt gemeinsam betrachtet und nach Form und Maß geprüft.

Es gereicht mir zur Genugtuung, es schon hier aussprechen zu können, daß die neuen Untersuchungen meine früheren Resultate nach jeder Richtung bestätigt haben:

Die „künstliche Deformation“ der altperuanischen Schädel von Ancon und Pachacamác ist keine im strengeren Sinne „absichtliche“; sie erklärt sich wie die zwar im allgemeinen schwächeren, im Prinzipe aber vollkommen identischen „künstlichen Deformationen“ europäischer Schädel, z. B. Hinterkopf-Abplattung und Sattelkopfbildung,[1]) aus der Art und Dauer der Lagegerung der Neugeborenen auf mehr oder weniger fester Unterlage und aus der länger dauernden Einbindung der noch leicht formbaren Köpfchen in verschieden gebundene Kinderhäubchen und ähnliche Schutzvorrichtungen für den Kopf.

Wie die Methoden der Deformation, so reihen sich auch die Formen der deformierten Schädel vollkommen in die älteren beiden Reihen ein, es treten keine neuen Methoden und Formen auf. I. K. H. Prinzessin Therese hatte[2]) die betreffenden Schädel nach dem Gesichtspunkt aufgesammelt, daß womöglich alle an den beiden in der Umgegend von Lima gelegenen altperuanischen Fundstätten sich findenden Schädelformen vertreten sein sollten. So wurden jene zwei in sich geschlossenen Parallelreihen von Schädeln verschiedener Form aus Ancon und Pachacamác gewonnen, welche einen möglichst vollkommenen Überblick gaben über die individuellen Variationen innerhalb dieser beiden Gruppen der Mehrzahl nach stärker „künstlich“ deformierten Schädel. Dadurch wurde es ermöglicht, tiefer in das Wesen der wunderlichen, in ihrem Grund und Ursprung damals noch unerklärten und allgemein verkannten, scheinbar grausamen Sitte der „künstlichen“ Schädelumformung bei den Alt-Peruanern einzudringen. Wie vollkommen I. K. H. Prinzessin Therese die beabsichtigte Vollständigkeit der Formen-Aufsammlung gelungen ist, beweist, daß, wie gesagt, die neue Schädelserie sich mit der früheren zu einer einheitlichen Reihe verbindet.

---

[1]) J. Ranke, Über altperuanische Schädel etc., S. 103 ff. (371 ff.).

[2]) Derselbe, l. c., S. 3 (631).

Sehr erwünscht war es, daß die Gaffronsche Sammlung mehrere Exemplare der „künstlich“ geformten Dolichocephalen“ enthält. Unsere ältere Gesamtreihe besitzt nur einen solchen Dolichocephalen aus dem Totenfeld von Ancon. Er findet sich beschrieben l. c., S. 51 und 52 unter der Bezeichnung Nr. 18 (33) Ancon. S. 51 bringt eine sagittale Umrißzeichnung und Tafel 5 ausgeführte geometrische Aufnahmen des Schädels in den drei Hauptnormen in ein Drittel natürlicher Größe.

Die größere Anzahl der Vergleichsobjekte gestattet nun eine sichere Bestätigung des früheren Resultats, nun nicht mehr allein auf eine Einzelbeobachtung gegründet.

Ein weiteres, wohl noch bedeutsameres Resultat hat nun die größere Anzahl der zur Vergleichung zur Verfügung stehenden Schädel ergeben: es haben sich deutlich zwei verschiedene Urtypen der Schädel erkennen lassen. Die Schädel zeigen trotz der Deformation noch die ursprünglichen normalen beiden Schädelformen: einen feinen und einen groben Typus. Ich glaube die beiden Typen nicht auf individuelle Variation, sondern auf ethnische Verschiedenheiten, auf Mischung zweier verschiedener ethnischer Elemente in unseren Reihen, beziehen zu dürfen.

2.

Allgemeine Beschreibung der Schädel.

Die allgemeine Schädelform.

1. Die Längenbreitenverhältnisse der Schädel.

Die Schädel der Gaffronschen Sammlung reihen sich, wie gesagt, vollkommen unter jene ein, welche ich in meiner ersten Abhandlung über altperuanische Schädel von Ancon und Pachacamác beschrieben habe. Es gilt das zunächst für die allgemeine Form, welche durch das Längenbreiten- und das Längenhöhenverhältnis der Schädel charakterisiert ist.[1])

Die von I. K. H. Prinzessin Therese gesammelten Schädel konnten alle nach ihrer Provenienz in zwei Reihen gesondert werden, welche einander in Beziehung auf das Längenbreitenverhältnis sehr ähnlich sind.

„Die Schädelreihe von Ancon beginnt, abgesehen von dem einen deformierten dolichocephalen Schädel, mit einem (resp. zwei) Schädeln, welche an der brachycephalen Grenze der Mesocephalie stehen, von dem Längenbreiten-Index (76,55 und) 78,45, und schreitet dann von dem brachycephalen Grenz-Index 80 in fast geschlossener Reihe von Index zu Index vor bis zu dem Index 100, bei welchem die Breite des Schädels, welche normal kürzer ist als die Länge, der letzteren gleich geworden ist."

„Die Schädelreihe von Pachacamác beginnt mit ebenfalls zwei Schädeln mesocephaler Form, mit den Indices 79,57 und 79,77 an der Grenze der Brachycephalie stehend. Die brachycephalen Formen beginnen mit dem Längenbreiten-Index von 84,24 und schreiten von da ebenfalls ziemlich stetig vor bis zu einem Index von 106, bei welchem Index die Länge von der Breite des Schädels um 6% überschritten wird."

Unter den nach ihrer Einzelherkunft bezeichneten Schädeln der Gaffronschen Sammlung sind aus Ancon: 2 Dolichocephale, einer mit dem Index 72,84, der andere mit dem Index 74,68 direkt an der Grenze der Mesocephalie stehend, und ein Brachycephaler, mit Index 85,39. Aus Pachacamác ebenfalls 2 Dolichocephale mit Index 73,33 und 74,1, letzterer wieder an der Grenze der Mesocephalie; 1 Mesocephaler mit Index 76,34 und 8 Brachycephale, welche von dem Index 85,47 bis zu dem ganz extremen von 112,48 vorschreiten. Die Indices sind: 85,47; 91,61; 95,30; 95,96; 100,00; 100,00; 101,38; 112,48.

Die Schädel reihen sich sonach, abgesehen von dem ganz extrem deformierten mit Index 112 am Ende der Pachacamác-Reihe, vollkommen in die früheren Serien ein. Auch

---

[1]) J. Ranke, l. c., S. 8 (636) ff.

insofern besteht Übereinstimmung, daß die extremen Grade der brachycephalen Deformation unter den Schädeln aus Pachacamác häufiger sind als unter denen aus Ancon. Die prinzipielle Übereinstimmung der beiden Reihen läßt es aber, wie hervorgehoben, untunlich erscheinen, die nichtbezeichneten Schädel der Gaffronschen Sammlung nach den beiden Fundplätzen auszuscheiden. Ich ziehe es deshalb vor, alle Altperuaner-Schädel unserer Sammlung hier zu einer Gesamtreihe, nach ihren Längenbreiten-Indices geordnet, zu vereinigen. Die Schädel der Gaffronschen Sammlung sind in der Tabelle durch Zahlen in Kursivschrift ausgezeichnet.

Tabelle I.

Längenbreiten-Index von 70 Altperuaner Schädel von Ancon und Pachacamác.

Von Ancon = A; von Pachacamác = P; AP = unbestimmt, von welchem der beiden Fundplätze; die kursiven Zahlen bezeichnen die Schädel der Gaffronschen Sammlung, die anderen jene der Sammlung der Prinzessin Therese.

	Reihe der Indices	Längen-breiten-Index	Fund-ort		Reihe der Indices	Längen-breiten-Index	Fund-ort
	68	*68,21*	AP	Brachycephale:	86	86,42	P
		68,85 (= 69)	AP			86,47	P
	69	69.74 (= 70)	A		87	87,27	P
Dolichocephale:	70	—				87,86	A
	71	*71,13*	AP		88	*88,13*	AP
		71.55	AP			88.89	P
	72	*72,84*	A		89	89,03	A
	73	*73,18*	AP			89,24	P
		73,33	P		90	—	
	74	*74,01*	P		91	91,30	P
		74,68 (= 75)	A			*91,36*	AP
Mesocephale:	75	—				*91,61*	P
	76	*76,34*	P			91.82	P
		76,53 (= 77)	AP		92	92,35	A
	77	—			93	*93,04*	AP
	78	*78,13*	AP			*93,04*	AP
		78,45	A		94	94.73	A
	79	*79,22*	AP		95	*95.30*	P
		79.57	P			*95,96* (= 96)	P
		79.77	P		96	—	
Brachycephale:	80	80,23	A		97	—	
		80.35	A		98	98.66	A
		80,53	AP		99	99,32	P
		80.55	AP		100	100,00	A
		80.84	A			*100,00*	P
	81	81.09	A			*100.00*	P
	82	82.14	A		101	*101,38*	P
	83	*83.03*	AP			*101.43*	AP
		83,33	AP			101,92	P
		83,88	AP		102	*102.16*	AP
	84	*84,11*	AP			102,77	P
		84,21	A		103	103,29	P
		84,24	P			*103,52*	AP
		84,28	AP		104	104.34	P
		84,61	P		105	—	
	85	*85,27*	AP		106	106,45	P
		85,29	A			*106.53*	AP
		85,39	A		112	*112,48*	P
		85,47	P				

Die vollkommene Gleichartigkeit der Gesamtreihe spricht für sich selbst.

Die Längenbreiten-Indices gehen von extremer Dolichocephalie (Index 68) bis zu extremster Brachycephalie (Index 106 resp. 112, von welch letzterem in den folgenden Berechnungen meist abzusehen ist).

Unter der Gesamtzahl 70 überwiegen weit die Brachycephalen mit 53 Schädeln, ihnen stehen gegenüber 7 Mesocephale und 10 Dolichocephale. Von den 7 Mesocephalen nähern sich 2 mit Index 76 den Dolichocephalen, 5 mit dem Index 78 und 79 (79,77) den Brachycephalen.

Vom Index 78 bis 106 (von der ganz extremen Ziffer 112 sehe ich hier ab) umfaßt die Gesamtreihe 39 Einzel-Indexstufen. Fast ohne Unterbrechung, es fehlen nur 3 Stufen, ist jede Stufe dieser so außerordentlich gestreckten Indexreihe durch einen oder durch mehrere Schädel vertreten.

In meinem Buche: Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern, mit 16 Tafeln und 2 Karten, München, Literarisch-artistische Anstalt Theodor Riedel, II. Abschnitt, 1879 (s. Beiträge zur Anthrop. u. Urgesch. Bayerns, Bd. II, 1879) habe ich zum erstenmal die anthropometrischen, speziell die kraniometrischen Ergebnisse geschlossener Messungsreihen in Kurvenform dargestellt, um eine exakte Vergleichung verschiedener Reihen tunlichst zu erleichtern. Meine Methode der Kurvendarstellung hat sich dann rasch überall für anthropologische Untersuchungen eingebürgert, seitdem zuerst J. Kollmann[1]) dieselbe für seine umfassenden, vergleichend kraniometrischen Studien verwendete und Stieda[2]) meine Kurvenresultate seinen mathematischen Analysen des wahrscheinlichen Fehlers und der exakten Beweiskraft kraniometrischer Serien zu Grunde gelegt hat.

Meine Methode, die kraniometrischen Resultate in Form einer Kurve aufzuzeichnen, läßt die Beurteilung der Einzelwerte, z. B. die beobachteten Längenbreiten-Indices, mit einem Blicke überschauen. Als Abszisse benutze ich die in fortschreitender Linie aufgetragenen Längenbreiten-Indices in ganzen Indexzahlen von 65 bis 100 resp. 106, die Höhe der Ordinaten wird durch die Anzahl der auf jeden Index treffenden Schädel bestimmt, indem ich dieselbe über jeden einzelnen Index verzeichne.

Zur Vergleichung der Verschiedenheiten der Gesamtserie unserer deformierten altperuanischen Schädel von einer geschlossenen Serie undeformierter Schädel von ebenfalls hoher Brachycephalie wähle ich meine Kurve von Altötting, Oberbayern.[3]) Die Abszisse dieser Kurve reicht vom Index 73 bis 89, die Kurve steigt aber erst vom Index 76 an geschlossen in die Höhe bis sie über den Indices 83 und 84 ihre Maxima erreicht, von denen sie sehr rasch zu Index 89 abfällt, auf diesen treffen noch 3 Schädel auf 90 schon wieder 0.

Wie ganz anders ist das Resultat der entsprechenden kurvenmäßigen Zusammenstellung unserer altperuanischen Schädelreihe.

[1]) J. Kollmann, Beiträge zu einer Kraniologie der Europäischen Völker. Archiv für Anthropologie, Bd. XIII, 1881, S. 79 ff., S. 179 ff. XIV, S. 1 ff.

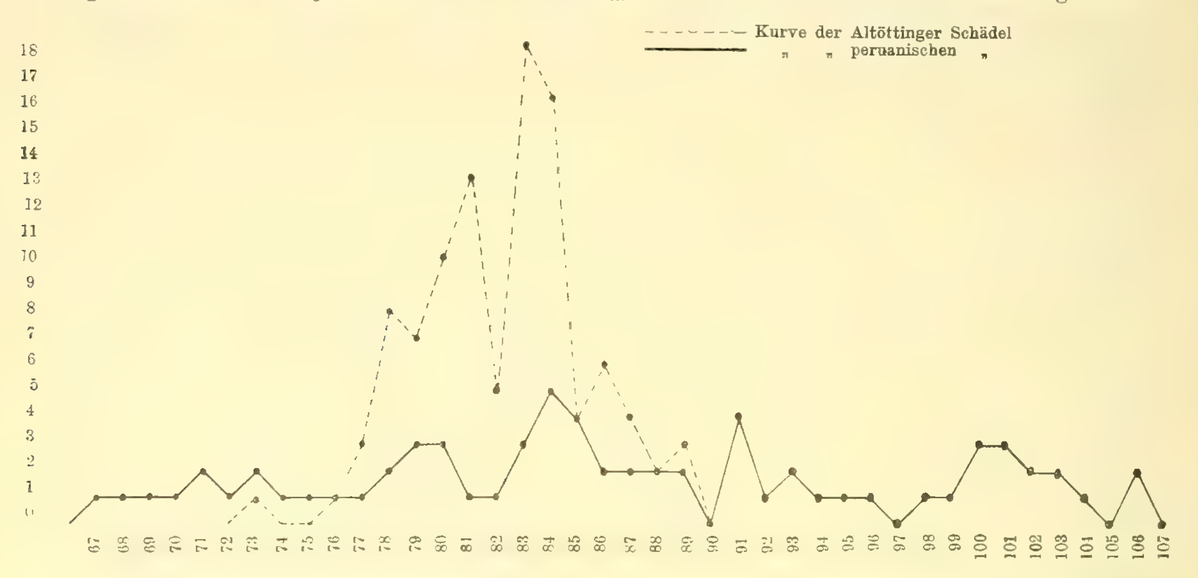
[2]) L. Stieda, Archiv für Anthropologie, Bd. XIV, 1883, S. 167 ff. Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der anthropologischen Statistik.

[3]) J. Ranke, l. c. II. Abschnitt, S. 23 ff. Tabelle I, S. 74 und Kurventafel.

Zur Vergleichung stelle ich beide Kurven übereinander:

Kurve I der 70 altperuanischen Schädel

verglichen mit 100 altbayerischen Schädeln (Altötting), beide Kurven nach den Einzel-Indices geordnet.



Während die Kurve von Altötting im wesentlichen eine geschlossene Form zeigt und ihre entschiedenen Maxima in nächster Nähe besitzt: Index 81, 83 und 84, zeigt die Peruanerkurve nur relativ kleine, wellenförmige Erhebungen vom Anfang der Abszisse bis zu ihrem Ende. In der Tat hebt sich der Index 85 etwas über die anderen, ohne daß wir aber bei ihm schon von einem wahren Maximum der Kurve reden dürften. Die natürliche Kurve, wie sie der undeformierte Peruaner-Schädel ergeben würde, ist offenbar durch die Deformation der Schädel und die dadurch gesetzte gleichsam „willkürlich" gesteigerte individuelle Variation zersprengt. Die Gestalt der Peruanerkurve dürfen wir als einen Beweis dafür ansprechen, daß unnatürliche Einwirkungen auf die Form der Schädel deren natürliche Gestalten in ausschlaggebendem Maße alteriert haben.

Wir sind imstande, die Wirkung der individuellen Variation auf das allgemeine Resultat dadurch etwas zu korrigieren, daß wir nicht die Einzel-Indices der Kurve zu Grunde legen, sondern mehrere zu einer gemeinsamen Gruppe zusammenfassen.

Durch meine Vermittelung haben sich die deutschen Kraniologen mit den französischen und englischen Kollegen dahin vereinigt, die Längenbreiten-Indices im allgemeinen in Gruppen zu je 5 Indexziffern unter einer gemeinsamen Bezeichnung zusammenzufassen, im Anschluß an die altgebräuchliche Zusammenfassung von 5 Längenbreiten-Indices als Mesocephalen (75—79) zwischen die Dolichocephalen und Brachycephalen. Die Dolichocephalie und Brachycephalie werden nun in Stufen zu je 5 Indexzahlen geteilt: Dolichocephalie I. Stufe 74—70, II. Stufe 69—65 . . ., Brachycephalie I. Stufe 80—84, II. Stufe

---

[1]) J. Ranke, Internationale Verständigung. Korrespondenzblatt der deutschen Gesellschaft für Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte, XVII. 1886. S. 17.

85—89 . . . In der nebenstehenden Kurve ist die Abszisse nach den fortlaufenden Indexstufen zu je 5 Indexzahlen geteilt und als Ordinaten über jede Stufe die auf sie treffende Anzahl der Schädel eingetragen.

Kurve II der 70 altperuanischen Schädel

nach je 5 Index-Stufen geordnet.



Der Haupt-Index unserer seriierten Peruanerkurve fällt bei Berücksichtigung der 5 zifferigen Indexstufen auf die I. Stufe der Brachycephalie Index 80—84. Die Kurve zeigt jetzt eine gut geschlossene Form: neben einem nicht unbedeutenden Stock von Dolichocephalen und Mesocephalen, Index 68—79, erscheint das hohe Übergewicht der Brachycephalen aller, auch der extremsten Stufen, Index 80—112. Sehr charakteristisch erhebt sich die Kurve noch einmal über der V. Stufe der sicher durch Deformation gesteigerten Brachycephalie, Index 100—104, um dann rasch zu den allerextremsten Breitformen der Stufen VI und VII abzufallen.

Es ergibt sich ja ohne weiteres, daß solche Kurven, wie Kurve I und II der deformierten Paruaner-Schädel in einer geschlossenen Serie von Schädeln einer normalen Be-

völkerung niemals vorkommen können, die individuelle Variation geht hier über alles als normal von der Natur erlaubte Maß hinaus. Aber immerhin ist es charakteristisch, daß die II. Kurve der Peruaner eine gewisse Ähnlichkeit mit der Kurve der altbayerischen Schädel von Altötting auf Kurve I nicht verkennen läßt. Auch die Altbayern haben als Haupt-Index der Kurve die I. Stufe der Brachycephalie mit Index 80—84. Der Hauptstock der deformierten brachycephalen Alt-Peruaner war nicht wesentlich kurzköpfiger als unsere modernen Altbayern, für welche ich in ihrer Gesamtheit, nach Messungen von 1000 Schädeln aus den verschiedenen altbayerischen Landesteilen als Hauptindex 83 gefunden habe.[1]) Der Eindruck, welchen die überwiegende Mehrzahl der Peruaner Kurzköpfe während ihres Lebens auf den Beschauer gemacht haben, kann sonach von dem wenig verschieden gewesen sein, welchen im Hinblick auf ihre Kurzköpfigkeit unsere Gebirgs- und Vorgebirgsbevölkerung heute hervorbringen. Dazu kommt noch, wie ich in der I. Abhandlung ausgeführt und durch eine Abbildung illustriert habe,[2]) daß durch die dichten und langen Kopfhaare der Alt-Peruaner die Schädelform in hohem Maße verdeckt worden ist, so daß auch stärkere Deformationen sich während des Lebens verbergen mußten.

2. Längenhöhen-Index.

Wie die extremen Grade der Brachycephalie der deformierten Altperuaner-Schädel weit über alles hinausgehen, was man als normale Kurzköpfigkeit bei irgend einem Volke der Erde beobachten kann, so erhebt sich auch ihre Hochköpfigkeit weit über das normale Maß. Auch in dieser Beziehung bestätigen und ergänzen die neuen Messungen unsere älteren.

Ich habe in der I. Abhandlung S. 15 (643) die Einzelwerte der Längenhöhen-Indices in ähnlicher Weise nach je 5 Indexstufen seriiert, wie das schon allgemein für die Längenbreiten-Indices geschieht (s. oben).

Die Mittelgruppe bilden für die Längenhöhen-Indices die Orthocephalen mit Index 70—74. Nach unten schließen sich an die Chamaecephalen I. Stufe mit Index 69—65; II. Stufe mit Index 64—60 . . . Nach oben reihen sich an die Orthocephalen die Hysicephalen I. Stufe 75—79, II. Stufe 80—84, III. Stufe 85—89, IV. Stufe 90—94 . . .

Unter den brachycephalen Altbayern, welche wir wieder als den Typus einer normalen geschlossenen Bevölkerung heranziehen, kommen Chamaecephalen überhaupt nur recht selten vor, den Hauptstock bilden die Orthocephalen und die Hypsicephalen der I. Stufe, solche der II. Stufe finden sich nur vereinzelt, die höheren Stufen fehlen ganz.[3])

In der Gesamtserie unserer 70 Altperuaner-Schädel beginnt die Indexreihe des Längenhöhenverhältnisses mit Index 68,88 I. Stufe der Chamaecephalie und reicht bis 98,53, V. Stufe der Hypsicephalie. Die folgende Tabelle stellt die beobachteten Einzelwerte zusammen.

---

[1]) J. Ranke, Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern. II. Abschnitt, S. 23.

[2]) J. Ranke, Über Altperuanische Schädel etc. I. Abhandlung, 1900. Abh. d. K. B. Akad. d. W. II. Kl. XX. Bd. III. Abt., S. 79 (707), Tafel 8.

[3]) J. Ranke, l. c., Tabelle IV, S. 15 (643).

Tabelle II.

Längenhöhen-Index und Längenbreiten-Index von 70 Altperuaner Schädeln von Ancon und Pachacamác.

A = Ancon; P = Pachacamác; die unbezeichneten Schädel sind unbestimmt, von welchem der beiden Fundplätze. Bezeichnung wie in Tabelle I.

	Längen-höhen-Index	Schädel von Ancon und Pachacamác	Fundort	Längen-breiten-Index
Chamaecephale:	65	—		
I. Stufe	66	—		
Index 65—69	67	—		
	68	68,88	A	69,44
	69	*69,40*		71,13
Orthocephale:	70	*70,65*		80,53
Index 70—74		70,83	A	80,35
	71	71,51	A	80,23
		71,85	A	80,84
	72	*72,19*		80,55
		72,25		68,21
		72,62	P	73,33
	73	—		
	74	*74,86*		68,85
Hypsicephale:	75	75,27	P	79,57
I. Stufe		75,68	A	81,09
Index 75—79	76	76,40	P	79,77
		76,47	P	86,47
		76,47	A	85,29
		76,61	P	84,21
	77	*77,85*		93,04
	78	*78,16*		71,55
		78,21		73,18
		78,57	A	82,14
	79	79,00	P	87,27
		79,01	A	72,84
		79,75	A	74,68
II. Stufe	80	80,00	P	84,24
Index 80—84		80,00	A	87,86
		80,00	P	91,82
		80,24	P	76,34
		80,47	P	84,61
		80,63		103,52
		80,98		85,27
	81	*81,01*	P	74,01
		81,18	A	85,39
		81,22		79,22
		81,58	P	103,29
		81,67		84,28
		81,93	P	106,15

	Längen-höhen-Index	Schädel von Ancon und Pachacamác	Fundort	Längen-breiten-Index
Hypsicephale:	82	82,71	P	91,30
II. Stufe	83	83,00	A	100,00
Index 80—84		*83,01*		106,53
		83,13		78,13
		83,23	P	104,34
		83,33	P	101,92
		83,64		83,03
		83,89	P	99,32
	84	84,17	A	92,35
		84,29	P	85,47
		84,77		84,11
III. Stufe	85	*85,12*		83,33
Index 85—89		85,18	P	88,89
	86	86,42	P	86,42
		86,42		91,36
		86,58	P	95,30
		(86,93)	P	(112,48)
	87	*87,09*	P	91,61
		87,36	P	95,96
	88	88,38	A	89,03
		88,57		101,43
	89	89,33	A	98,66
		89,47	A	94,73
		89,58	P	102,77
IV. Stufe	90	*90,13*	P	83,88
Index 90—94	91	*91,39*		100,00
	92	—		
	93	93,03	P	89,24
V. Stufe		*93,13*		88,13
Index 95—99	94	—		
	95	95,17		101,30
		95,52	P	100,00
	96	—		
	97	—		
	98	*98,10*		93,04
		98,53		102,16
	99	—		
	100	—		

In Tabelle II stelle ich neben den Längenhöhen-Index auch den Längenbreiten-Index. Die Vergleichung beider läßt auf den ersten Blick kaum eine Übereinstimmung erkennen, wie man eine solche doch im allgemeinen erwarten müßte.

Bei der Berechnung der Mittelwerte der einzelnen Indexstufen, wobei ich die beiden letzten Stufen der Hypsicephalie, um auch hier eine etwas größere Anzahl der Einzelwerte zu erhalten, zusammengefaßt habe, ergibt sich aber doch das vorauszusetzende Resultat freilich nur auf Kosten der Unterdrückung der störenden individuellen Variation.

Hilfs-Tabelle.

Mittelwerte der Längenhöhen-Indices und Längenbreiten-Indices der 70 Altperuaner Schädel.

		Längenhöhen-Index	Längenbreiten-Index
2	Chamaecephale	69,14	70,28
7	Orthocephale	72,39	76,05
13	Hypsicephale I.	77,64	81,14
24	„ II.	81,92	90,52
12	„ III.	87,46	93,29
8	„ IV. V.	94,37	84,71

Als Resultat ergibt diese Zusammenstellung der Mittelwerte der einzelnen Stufen des Längenhöhen-Index mit den Mittelwerten der darauf treffenden Längenbreiten-Indices ein gleichartiges Ansteigen beider Werte von der Chamaecephalie bis zur extremsten Hypsicephalie. Mit der durch die Deformation hervorgerufenen Verbreiterung der Schädel hält sonach auch eine entsprechende Erhöhung derselben im allgemeinen gleichen Schritt und vice versa. Ein Resultat, welches bei der relativen Unzusammendrückbarkeit des Gehirns resp. des ganzen Schädelinhalts theoretisch vorauszusehen war. Die Deformation in der einen Richtung wird durch Deformation in der anderen kompensiert. Dadurch erklärt sich ja auch der geringe oder vielmehr fehlende Einfluß der rein mechanischen Deformation auf das Gehirn und seine Funktionen, die sich nur einstellen, wenn eigentlich pathologische Momente mit ins Spiel kommen.

3. Der Innenraum des Hirnschädels.

Über die aus meiner ersten Untersuchung sich ergebende auffallende Kleinheit der deformierten Altperuaner-Schädel und ihres Innenraumes der Gehirnkapsel habe ich dort ausführlich berichtet und den Gedanken zurückweisen können, als erkläre sich diese Kleinheit der Schädel aus den Einflüssen der Deformation.

Wie Morton so war auch R. Virchow die Kleinheit aufgefallen.[1]) Unter den 134 Schädeln aus Ancon u. v. a. „sind, sagt letzterer, ausgemachte Nannocephalen ohne alle Deformation sehr häufig“, so „3 Schädel aus Pachacamác zu 1060, 1100 und 1192 ccm Rauminhalt. Daraus geht hervor, daß es gänzlich untunlich ist, bei einem deformierten Schädel die etwa vorgefundene Kleinheit ohne weiteres der Deformation zuzuschreiben“.

Ich kam nach Skelettmessungen zu dem Schluß: „die Kleinheit des Hirnraumes der Schädel erklärt sich aus der geringen Körpergröße der betreffenden Bevölkerung“.

Nach den Knochenmessungen kam ich nach Humphry-Topinards[2]) Methode der Berechnung der Körpergröße aus der Länge der langen Skelettknochen (hier Femur) zu nahezu zwerghaften Maßen, für

1 Mann 1463 mm.
1 Weib 1161 „ beide erwachsen.

---

[1]) J. Ranke, Über Altperuanische Schädel etc., S. 112 (740).

[2]) P. Topinard, Eléments d'Anthropologie générale. Paris 1885. S. 474.

Ich habe nach den neuen Untersuchungen dem dort Gesagten nichts hinzuzufügen. Die folgende Tabelle III vereinigt wieder die Resultate der Kapazitätsbestimmungen aller 70 zur Vergleichung verfügbaren Schädel, soweit die Bestimmung ausführbar war, zu einer Gesamtreihe. Die Bezeichnungen entsprechen den beiden ersten Tabellen. Von einer Trennung nach den Geschlechtern sehe ich für diese Zusammenstellung ab.

R. Virchow bezeichnete die Schädel mit einer Kapazität über 1600 ccm als Kephalone; Schädel mit einer Kapazität von 12—1600 ccm als Euricephale; mit einer Kapazität unter 1200 ccm als Nannocephale.

Tabelle III.

Der Schädelinhalt von 60 Altperuaner Schädeln aus Ancon und Pachacamác.

Nr. der Schädel	Schädelinhalt in ccm	Fundort
	24 Euricephale 1600—1200	
16	1510	P
1	1430	P
2	1350	P
33	1350	A
(7)	*1340*	
(8)	*1330*	
(19)	*1325*	
26	1320	A
4	1315	P
(23)	*1300*	
17	1290	P
8	1280	P
(11)	*1270*	P
13	1265	P
24	1265	A
(26)	*1265*	A
10	1260	P
6	1230	P
(29)	*1225*	
25	1220	A
15	1215	P
23	1215	A
(25)	*1215*	
5	1205	P
19	1200	A
	38 Nannocephale, darunter 9 Kinder 1199—965	
12	1190	P
28	1190	A
20	1190	A Kind
(13)	*1190*	P
(36)	*1190*	P Kind
7	1185	P
3	1180	P
(37)	*1180*	
(12)	*1175*	
11	1175	P
(9)	*1170*	
(20)	*1170*	
(21)	*1170*	P
(10)	*1165*	P
14	1130	P
(5)	*1130*	P Kind
(24)	*1130*	P
(27)	*1130*	
9	1125	P
(22)	*1125*	P
(3)	*1120*	Kind
(33)	*1105*	P Kind
(30)	*1105*	Kind
(32)	*1095*	A Kind (schwerpathologisch)
31	1090	A
18	1080	A
30	1070	A
29	1060	A
27	1050	A
(28)	*1040*	
(31)	*1035*	A Kind
(2)	*1025*	
22	1000	A
(35)	*999*	Kind
(14)	*965*	

Unter den 60 Schädeln sind nur

25 Euricephale

von 1200—1510 ccm Kapazität. Im Mittel beträgt ihre Kapazität nur ca. 1300 ccm; nur 10 Schädel messen 1300 und darüber und 1430 und 1510 nur je einer.

Von den

35 Nannocephalen

gehören 23 zu der Gruppe 1100 (1190—1105), 12 Schädel bleiben mit ihrer Kapazität unter 1100, die Gruppe 1000 (1095—1000) umfaßt 10 Schädel; unter 1000 finden sich noch 2 Schädel.

Unter den Nannocephalen sind 9 Kinderschädel, 2 davon stehen mit 1190 ccm an der Spitze dieser Gruppe; 5 andere stehen mitten zwischen den nannocephalen Schädeln Erwachsener, nur 2 gegen das Ende der Reihe. Die Kapazität der Schädel Erwachsener bleibt sonach vielfach unter der Kapazität, welche Kinderschädel des gleichen Volkes während des Zahnwechsels schon erreicht haben.

Die Tabelle III: Gesamttabelle der Schädelkapazität zeigt wieder, daß sich die Schädel der Gaffron-Sammlung vollkommen einordnen in unsere älteren Reihen, so daß unser Resultat, welches wir aus jenen ableiteten, auch in dieser Beziehung keine Änderung erleidet.

Nach Prozenten berechnet haben wir

Euricephale 42%
Nannocephale 58%,

darunter 9 Kinder im Zahnwechsel.

Unsere Alt-Peruaner von Ancon und Pachacamác scheinen sonach eine kleinschädelige und kleinhirnige Rasse gewesen zu sein, entsprechend ihrer schon in der ersten Abhandlung konstatierten auffallend geringen Körpergröße.

3.

Einzelbeschreibung der 37 Schädel der Gaffronschen Sammlung.

Zum rascheren Verständnis der folgenden Schädelbeschreibungen wiederhole ich zunächst R. Virchows klassische Formanalyse der deformierten amerikanischen Schädel.[1]) In seiner Crania ethnica Americana beschreibt er folgende Hauptformen der Schädeldeformation.

I. *Künstliche Kurzköpfe, Brachycephali artificiales,* vier verschiedene Formen.

1. Die rein occipitale Deformation, Abflachung des Hinterkopfes und dadurch Verkürzung des Schädels. Die gewöhnliche Form von Ancon, sagte R. Virchow, findet in der brachycephalen Abplattung des Hinterkopfes ihre Erklärung. Die Abflachung betrifft manchmal fast die ganze Oberschuppe des Hinterhauptsbeins oder wenigstens einen großen Teil desselben. öfter ist aber nur die Spitze der Schuppe (der Lambdawinkel) abgeplattet, dann greift die Abplattungsfläche auch auf die benachbarten Partien der Scheitelbeine über, welche manchmal fast ausschließlich betroffen sind.

Im strengen Sinne des Wortes habe ich bei den mir vorliegenden Schädeln sowohl aus Ancon wie aus Pachacamác, überhaupt an keinem unserer Altperuaner-Schädel, eine reine occipitale Deformation konstatieren können. Es zeigen sich mit der Abflachung des Hinterkopfs stets, wenn auch manchmal nur in geringem Grade, Deformationen am Vorderkopf beziehungsweise an der Stirn und meist in etwas höherem Grade in der Gegend der Kranznaht. Zu der Abplattung der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins in ihren sehr wechselnden Graden gesellt sich bei mehreren Schädeln auch ein gleichzeitiges Flachliegen der Unterschuppe. Ober- und Unterschuppe liegen bei solchen Schädeln fast in ihrer ganzen Ausdehnung annähernd in einer Ebene, ohne die normale Abknickung der beiden Abschnitte gegeneinander zu zeigen. Ist gleichzeitig die Stirnpartie stark abgeflacht, so verlaufen Stirn- und Hinterhaupt einander nahezu parallel und die Schädel erhalten damit, wenn man sie auf das im ganzen abgeflachte Hinterhaupt legt, die Form eines ziemlich flachen Kuchens. Nach der deutschen Horizontale aufgestellt, erscheinen diese Schädel in der Seitenansicht nach oben zugespitzt.

2. Die rein frontale Deformation, Abflachung der Stirn. Anstatt der normalen Wölbung des Stirnbeins erscheint das letztere über den Augenbrauenbogen ab-

[1]) J. Ranke, Über altperuanische Schädel etc., S. 4 (632) f.

geflacht, in extremen Fällen sind auch die Stirnhöcker abgeplattet. Diese Form ist weit seltener als die erste und dritte.

Auch diese Form Virchows habe ich bisher niemals rein beobachtet, sondern stets mit anderen Deformationszeichen verbunden.

3. Occipital-frontale Deformation, gleichzeitige Abplattung des Hinterhaupts und der Stirn und dadurch Verkürzung des Schädels. Hier ergeben sich zwei resp. drei Unterformen.

a) Künstliche Hochköpfe, Thurmköpfe, Hypsicephali artificiales. Durch den Druck von vorn und hinten in occipital-frontaler Richtung erscheint der Schädel verkürzt und verbreitert durch Hervorbuchtung der Schläfengegend, und die Scheitelgegend ist mehr oder weniger turmartig in die Höhe gepreßt.

b) Künstliche Hochköpfe, Zuckerhutköpfe, Oxycephali artificiales.

c) Künstliche (brachycephale) Flachköpfe, Chamaecephali (brachycephali) artificiales. Die Schädel erscheinen durch Druck in occipital-frontaler Richtung (wie a) verkürzt und verbreitert, außerdem aber noch durch einen annähernd senkrecht nach unten wirkenden Druck auf den Scheitel erniedrigt. Solche Schädel sind unter den heutigen Indianerstämmen, namentlich der Nordwestküste, verbreitet und unter dem Namen Flachköpfe, Flatheads, bekannt und beschrieben.

II. *Künstliche Langköpfe, Dolichocephali artificiales*, Langköpfe, Longheads.

Auch diese künstlichen Langköpfe sind nach der Beschreibung R. Virchows chamaecephal, sie unterscheiden sich aber von den Flatheads nicht nur durch künstliche Brachycephalie und Dolichocephalie, sondern den Longheads fehlen die für die Flatheads charakteristischen Druckflächen auf dem Scheitel; bei jenen ist das Schädeldach nicht sowohl für sich abgeflacht als im Zusammenhang mit der allgemeinen künstlichen Zylinderform des Hirnschädels erniedrigt, so daß ihre Gesamtform extrem gesteigerter Dolichocephalie entspricht.

Die I 3b erwähnte Zuckerhutform, die künstliche Oxycephalie, ist zwar, wie R. Virchow ausführt, mit künstlicher Brachycephalie verbunden, „erscheint aber der künstlichen Dolichocephalie insofern verwandt, als der Hirnschädel — wenn auch nicht zylindrisch von vorn nach hinten — so doch *gerundet konisch nach oben* in die Scheitelpartie verlängert resp. erhöht ist".

Die Ähnlichkeit der beiden Formen führt R. Virchow auf die Ähnlichkeit der hypothetischen Deformierungsmethoden zurück, beide sollen durch *Druckbinden*, welche *durch kreisförmig von vorn nach hinten vorschreitende Umschnürung* wirken, hervorgebracht werden.

Mit Ausnahme der „Zuckerhutform" habe ich alle die Virchowschen Typen der Deformation in unseren Schädelserien aus Ancon und Pachacamác konstatieren können, aber freilich nicht als reine Typen. Stets war eine Mannigfaltigkeit der deformierenden Einwirkungen nachzuweisen, wodurch die individuelle Schädelform mehr oder weniger ausgesprochene Abweichungen von dem „reinen" Typus erkennen ließ. Am wenigsten stimmen meine Beobachtungen mit dem einfachen Schema der künstlichen Erzeugung der Scheitelabflachung der Flatheads und „kreisförmig von vorn nach hinten vorschreitende Umschnürung durch Druckbinden" habe ich niemals konstatieren können.

Die im folgenden gegebenen Einzelbeschreibungen der Schädel werden am besten zeigen inwiefern meine Ergebnisse von denen Virchows und fast aller früheren Autoren abweichen.

Zur Erklärung einiger bei den folgenden Schädelanalysen nur kurz angegebenen Verhältnisse, welche sich fast für jeden Schädel wiederholen, möchte ich die bei der Schädelbeschreibung von mir gewissermaßen als Termini technici verwendeten Ausdrücke vorausgehend etwas näher besprechen.

Zunächst die Koronalrinne, welche ich bei keinem der Schädel vollkommen vermisse. In typisch ausgebildeten Fällen zieht sich den beiden Seitenhälften der Koronalnaht entlang, die Bregma-Partie, d. h. das vordere Ende der Pfeilnaht vom Drucke in der Breite von ein bis zwei Fingern meist sehr deutlich freilassend, eine mehr oder weniger tiefe, etwa fingerbreite Rinne nach abwärts, die Koronalrinne. Ihr „vorderer Wall“ wird im wesentlichen von der oberen Kantenpartie des Stirnbeins gebildet, der „hintere Wall“ von den entsprechenden vorderen Randpartien der Scheitelbeine. Die Kranznaht selbst läuft meist nicht in der Tiefe der Rinne, sondern ist auf der Innenseite des „vorderen Walls“ gelagert. In der Lage entspricht die Koronalrinne den Einbuchtungen der europäischen Sattelköpfe.

Mit der Koronalrinne verbinden sich besonders deutlich bei den künstlichen Dolichocephalen und vor allem bei den „dreigelappten“ Schädeln, welche ich Schädel mit zweigelapptem Hinterhaupt nenne, noch weitere Druckfurchen, deren Verlauf bei den folgenden Schädelbeschreibungen im einzelnen dargestellt werden muß.

Die Koronalrinne charakterisiert sich zweifellos als eine Druckwirkung. Durch den sie erzeugenden Druck werden gewissermaßen die vom Druck freigebliebenen Schädelpartien „wallartig“, wie eben beschrieben, in die Höhe gewölbt, was sich dann mit den Wirkungen benachbarter Deformationen in etwas verschiedener Weise kombiniert. Das gilt namentlich für das Stirnbein.

Nach meinen Beobachtungen besteht, wie ausnahmslos nachzuweisen, die frontale Deformation aus zwei getrennten Druckflächen auf den oberen seitlichen Partien des Stirnbeins. Nach unten erreichen sie vielfach die Stirnhöcker nicht, in manchen Fällen werden letztere an ihren oberen Rändern vom Druck berührt, selten werden sie ganz in die Druckflächen einbezogen. In der Mitte der Stirn nähern sich die beiden seitlichen Druckflächen mehr als oben; auf diese Weise bleibt in ganz charakteristischer Weise ein Teil der Stirn vom Drucke frei. Die nicht eingedrückten Partien heben sich dadurch, wie gesagt, gewissermaßen über die eingedrückten und abgeflachten Stellen. Die ganze obere Randpartie des Stirnbeins vor der Koronalrinne „wölbt“ sich dadurch als künstlicher Stirnwulst über beide Druckflächen hervor. Nach abwärts bleibt in der Mitte der Stirn eine annähernd dreieckige Stelle, mit ihrer Basis mit dem Stirnwulst verbunden, uneingedrückt: ich bezeichne sie als künstliches Stirnbeindreieck. Das letztere sendet einen der Stirnmitte in sagittaler Richtung entsprechenden, ebenfalls vom Druck freien Ausläufer, mehr oder weniger schmal, nach abwärts, welcher sich zwischen den sich hier stärker nähernden Druckflächen als künstlicher Stirnbeingrat gewissermaßen erhebt. Stirnbeingrat, Stirnbeindreieck und Stirnbeinwulst sind danach die zusammenhängende, von der frontalen Deformation nicht betroffene obere und mittlere Stirnbeinpartie. Ihre Erhebung ist nur eine relative über das Niveau der abgeplatteten Stellen. Da einmal

der Stirngrat, ein andermal das Stirnbeindreieck oder der Stirnwulst energischer hervortritt, habe ich an der schon in der ersten Abhandlung gebrauchten Einzelbezeichnung der drei Abschnitte der undeformierten Stirnbeinpartie festgehalten.

In einem Fall berühren sich in der Mitte der Stirn die beiden Druckflächen, so daß der untere Abschnitt des Stirnbeingrates etwas mit abgeplattet und hier sonach eine gemeinsame mittlere Druckfläche erzeugt wird, zu welcher von beiden Seiten her sich die typischen frontalen Druckflächen zusammenneigen.

In wenigen Fällen überschreiten die frontalen Druckflächen an den Seiten den Stirnbeinwulst, so daß sie sich mit der Eintiefung der Koronalrinne vereinigen.

Die speziellen Deformationen, entsprechend dem Ende der Sagittalnaht und den beiden seitlichen Schenkeln der Lambdanaht mit mehr oder weniger breiter Einbeziehung der den Nähten anliegenden Knochenpartien, sind ohne die Einzelbeschreibung der betroffenen Schädel kaum verständlich, ich verzichte daher an dieser Stelle auf ihre nähere Beschreibung. Nur das sei noch hervorgehoben, daß bei sehr vielen Schädeln eine deutliche, öfters starke und breite Druckfurche, Schnürfurche, von den hinteren unteren Seitenpartien rechts und links über die Mitte des Hinterhaupts horizontal hinzieht, letzteres also umfassend.

Nr. 1.

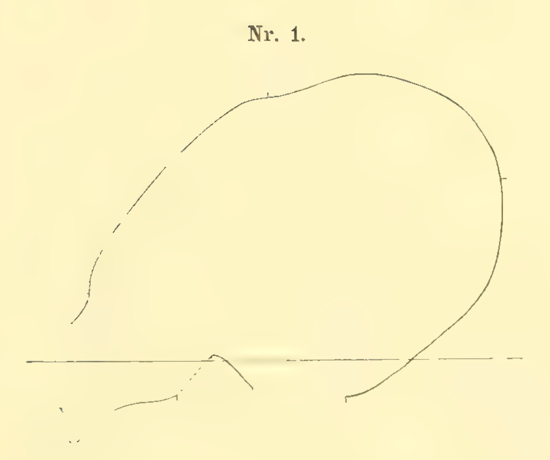


Fig. 1. Mit Tafel 1.

Kindlicher Schädel ohne Unterkiefer. Gut ausgeprägte Koronalrinne; sie entsendet eine schwächere Fortsetzung nach vorwärts und unten, eine stärkere nach hinten, welche über den hinteren unteren Winkel des Scheitelbeins auf die Hinterhauptsschuppe jederseits übergreift. Hier vereinigen sich beide Rinnen, so daß der Schädel horizontal in dieser Richtung ganz umgriffen erscheint. Der Scheitel und das Hinterhaupt sind nach hinten und oben gewölbt, die Ober- und Unterschuppe schief aufwärts gerichtet, die normale Knickung zwischen beiden fehlt fast vollkommen, so daß beide streckenweise nahezu in einer Fläche verlaufen. Die Partie um die Spitze der Oberschuppe mit den angrenzenden Scheitelbeinen zeigt eine Abplattung, occipitale Deformation. Die Stirnbeinabflachung ist ziemlich stark und ganz typisch. Auf den beiden Seitenhälften des Stirnbeins zeigen sich flache Druckflächen, welche die Stirnhöcker frei lassen, ebenso die mittleren und oberen Stirnbeinpartien. Die nicht abgeflachten Stellen erheben sich über die abgeflachten, dadurch entsteht ein über die Mitte des Stirnbeins sich erhebender sagittaler Mittelgrat: Stirnbeingrat, nach unten schmal, nach oben sich verbreiternd: Stirnbeindreieck. Letzteres geht in den vom Koronalrand des Stirnbeins gebildeten vorderen Wall der Koronalrinne über, welche im Hinblick auf das Stirnbein als Stirnbeinwulst erscheint. Typisch sind sonach zwei Druckflächen rechts und links auf dem Stirnbein, dazwischen der Stirnbeingrat, welcher in das Stirnbeindreieck und dieses in den Stirnbeinwulst resp. die relativ undeformierten Partien des Stirnbeins übergehen: frontale Deformation.

Die Nähte und die Sphenobasilarfuge offen, wenig, kleine Schaltknochen in der Lambdanaht und jederseits ein solcher in der Gegend der hinteren Seitenfontanelle.

Schädelform an der Grenze der Brachycephalie, Längenbreiten-Index 80,55; Längenhöhen-Index 72.19 = orthocephal.

Die Schädelkapazität unbestimmbar = — ccm; der Horizontalumfang 465; der ganze Sagittalbogen 337 mm. Der Schädel ist schwach prognath 80°.

Die Gesichtsbildung ist zart, mittelbreit, Index 50,00 = mesoprosop. Fossa canina flach, die Wangenbeine und die zarten Jochbogen angelegt; die Nase hoch und schmal, Index 41,72 = leptorrhin, Nasenstachel kräftig; das Nasendach ziemlich schmal und lang, ziemlich gerade. Augenhöhlen weit, gerundet, Index 97.22 = hypsikonch. Ohröffnungen hoch-oval. Gesicht schief. Gaumen mäßig tief und kurz, schief, Index 81,39 = mesostaphylin. Alveolarfortsatz kurz. Die Zähne sind noch im Zahnwechsel begriffen, vom Dauergebiß sind schon vorhanden: die Schneidezähne und jederseits der erste Prämolar und der erste Molar, die zweiten Molaren sind im Durchbrechen, die Eckzähne noch tief in den Alveolen. Alter ca. 9 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	162 mm	Obergesichtshöhe	56
„ Breite	130,5	Jochbreite	112
Gerade Höhe	122	Gesichtsbreite (Virchows)	89
Ohrhöhe	106	Augenhöhlen-Höhe	35
Horizontale Länge des Hinterhaupts	127	„ -Breite	36
Basilare Länge des Vorderhaupts	64	Nasen-Höhe	47
Horizontalumfang	465	„ -Breite	19,6
Sagittalumfang des Stirnbeins	109	Gaumen-Länge	43
„ der Scheitelbeine	112	„ -Breite	35
„ „ Hinterhauptsschuppe	116	Gesichtswinkel	80⁰
Ganzer Sagittalbogen	337		
Kleinste Stirnbreite	88		
Länge der Schädelbasis	76		
Breite „ „	93		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	80,55	Obergesichts-Index	50,00 (61,79)
Längenhöhen-Index	72,19	Augenhöhlen-Index	97,22
Ohrhöhen-Index	62,72	Nasen-Index	41,72
Hinterhaupts-Index	75,15	Gaumen-Index	81,39

Allgemeine Analyse:

brachycephal, orthocephal, mesoprosop (chamaeprosop), hypsiconch, leptorrhin, mesostaphylin, prognath.

Nr. 2.

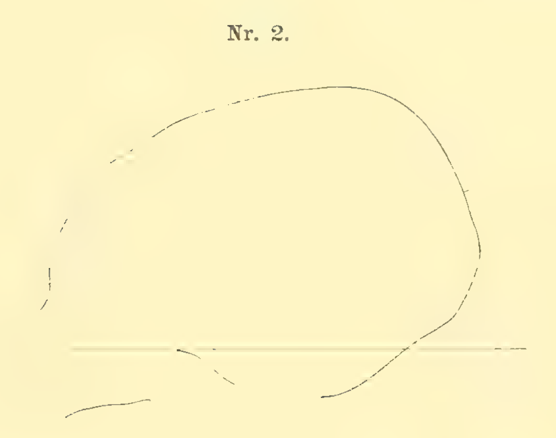


Fig. 2.

Erwachsener, wahrscheinlich weiblicher Schädel ohne Unterkiefer. Die Deformationen sind relativ wenig ausgesprochen. Auffallend erscheint eine gewisse Flachheit der Scheitelgegend des im allgemeinen recht niedrigen Schädels, rechts und links von der ersten Hälfte der Sagittalnaht zeigt sich je eine ca. zwei Finger breite Abflachung, wie sie, freilich weit stärker, bei den Schädeln mit zweigelapptem Hinterhaupt sich zeigt. Die Koronalrinne ist im ganzen schwach; die Stirnabflachung ist rechts stärker als links. Das Hinterhaupt erscheint trotz einer deutlichen occipitalen Abflachung noch ziemlich gerundet. Die Unterschuppe des Hinterhauptbeins ist mit in die Höhe gewendet, so daß sie in der Norma occipitalis großenteils sichtbar ist. Zwischen Ober- und Unterschuppe des Hinterhauptbeins verläuft eine gut ausgeprägte Querfurche (s. die oben erwähnten Schädel).

Die Nähte sind alle offen und fast vollkommen normal, nur in den hinteren Seitenfontanellen kleine Schaltknochen. Die Sphenobasilarfuge verknöchert; die Zitzenfortsätze auffallend gering ausgebildet.

Der Schädel ist dolichocephal, Längenbreiten-Index 71,13; Längenhöhen-Index 69,04 = chamaecephal. Die Kapizität beträgt 1025 ccm; der Horizontalumfang 462, der ganze Sagittalbogen 332 mm. Der ganze Gesichtswinkel beträgt 81° = schwach prognath, stärkere alveolare Prognathie.

Das Gesicht ist schmal, Index 54,83 = leptoprosop. Jochbeine und Jochbogen angelegt; Fossa canina relativ tief. Augenbrauenbogen sehr schwach. Augenhöhlen hoch und gerundet, Index 102,79 = überhypsiconch. Die Nase ist im ganzen schmal, Index 42,71 = leptorrhin; Nasenrücken gut gewölbt, Nasenbeine ziemlich schmal. Ohröffnung rundlich.

Während des Lebens waren alle Zähne des Dauergebisses vorhanden, der 3. Molar jederseits sehr klein, stiftartig.

Lebensalter zwischen 20 und 30 Jahren.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1025 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	168 mm	Obergesichtshöhe	63,5
„ Breite	119,5	Jochbreite	116
Gerade Höhe	116	Gesichtsbreite (Virchows)	89
Ohrhöhe	100	Augenhöhlen-Höhe	37
Horizontale Länge des Hinterhaupts	106	„ -Breite	36
Basilare Länge des Vorderhaupts	67	Nasen-Höhe	48
Horizontalumfang	462	„ -Breite	20,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	111	Gaumen-Länge	49
„ der Scheitelbeine	106	„ -Breite	33,5
„ „ Hinterhauptsschuppe	115	Gesichtswinkel	81°
Ganzer Sagittalbogen	332		
Kleinste Stirnbreite	83		
Länge der Schädelbasis	84		
Breite „ „	95		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	71,13	Obergesichts-Index	54,83 (71,38)
Längenhöhen-Index	69,04	Augenhöhlen-Index	102,79
Ohrhöhen-Index	59,53	Nasen-Index	42,71
Hinterhaupts-Index	63,09	Gaumen-Index	68,37

Allgemeine Analyse:

♀?, dolichocephal, chamaecephal, leptoprosop, hypsiconch, leptorrhin, leptostaphylin, schwach prognath (vorwiegend Alveolarprognathie).

Nr. 3.

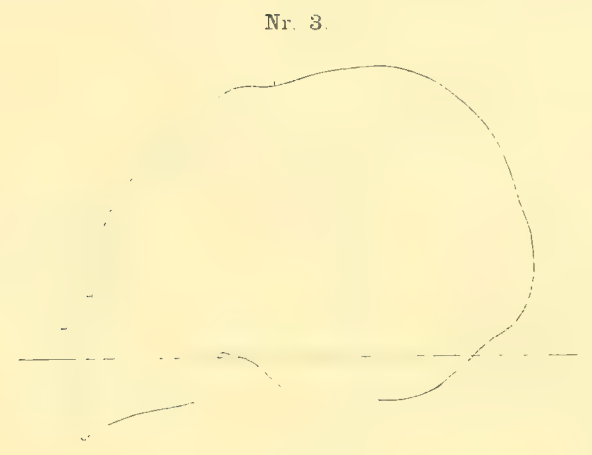


Fig. 3.

Kindlicher Schädel, ohne Unterkiefer. Koronalrinne gut ausgebildet, etwa daumenbreit, wie gewöhnlich verläuft die Kranznaht etwas gehoben in der Hinterwand des Vorderwalles der Koronalrinne. Letztere geht ungeteilt jederseits bis zur Mitte der Kranznaht, hier gabelt sie sich, jederseits geht ein schwacher Eindruck gegen die vordere untere Ecke des Scheitelbeins, nach unten und vorn, ein zweiter flacherer, der sich nach hinten verbreitert und vertieft, läuft über den unteren, hinteren Winkel des Scheitelbeins und über die untere Hälfte der Lambdanaht, diese in einer Breite von ca. zwei Fingern überschreitend. In der Mitte der Hinterhauptsschuppe treffen von beiden Seiten her die Furchen zusammen, eine einheitliche, breit rinnenartige horizontale Vertiefung bildend. Von beiden Seiten her und von unten erscheint dadurch das Hinterhaupt zusammengepreßt und der Schädel nach hinten verlängert. Die frontale Deformation zeigt zwei breite Druckflächen, welche den oberen Rand des Stirnbeins in Daumenbreite freilassen, welcher dadurch stark hervorgewölbt erscheint. Die beiden Stirnbein-Druckflächen lassen eine mittlere Partie des Stirnbeins unter dem Stirnbeinwulst ziemlich frei und reichen bis an die Stirnhöcker, von denen der rechte noch etwas abgeplattet ist. Unter den Stirnhöckern ist die Mitte der Stirn nicht deformiert, dagegen scheinen sich seitlich die Abflachungen bis zum oberen Augenhöhlenrand fortzusetzen. Die occipitale Abplattung ist gut ausgesprochen als eine etwa zwei Finger breite Fläche an der Spitze der Oberschuppe des Hinterhauptbeins und die angrenzenden Scheitelbeinpartien. Die obere Grenze des Musculus temporalis resp. die ihr entsprechende halbkreisförmige Linie zieht nur etwa ein Finger breit über der Schuppennaht hin, der Muskel war sonach noch sehr klein und wenig entwickelt.

Die Nähte sind alle offen und gut ausgebildet. Schwache, rinnenförmige Stenokrotaphie der Schläfengegend. Ein kleiner Schaltknochen je in der hinteren Seitenfontanellgegend. Im rechten Teil der Lambdanaht mehrere kleine Wormsche Knochen und fünf kleine Schaltknochen in der Mastoidealnaht. Die Sphenobasilarfuge ist offen, die Kondylen des Hinterhauptbeins noch nicht vollkommen verknöchert. Zitzenfortsätze entsprechend unentwickelt.

Der Schädel ist dolichocephal, Längenbreiten-Index 68,21; Längenhöhen-Index 72,25 = orthocephal.

Das Gesicht ist schmal, Index 53,27. Wangenbeine und Jochbogen angelegt; Augenhöhlen sehr hoch, gerundet, Index 100 = extrem hypsiconch. Nase ziemlich schmal, Index 50.56 = mesorrhin, mit bemerkenswert breiten und gut gewölbten Nasenbeinen. Ohröffnung rundlich oval. Gaumen-Index 79,54 = leptostaphylin.

Die Kapazität beträgt 1020 ccm; der Horizontalumfang 464; der ganze Sagittalbogen 352; der Gesichtswinkel 82° = an der Grenze der Prognathie.

Das Milchgebiß besteht noch vollständig; dazu ist der erste bleibende Molar schon ausgebildet, das Lebensalter ist sonach etwas mehr als 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1020 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	173 mm	Obergesichtshöhe	57
„ Breite	118	Jochbreite	107
Gerade Höhe	125	Gesichtsbreite (Virchows)	79
Oberhöhe	106	Augenhöhlen-Höhe	36
Horizontale Länge des Hinterhaupts	113	„ -Breite	36
Basilare Länge des Vorderhaupts	67	Nasen-Höhe	44,5
Horizontalumfang	464	„ -Breite	22,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	118	Gaumen-Länge	44
„ der Scheitelbeine	121	„ -Breite	35
„ „ Hinterhauptsschuppe	113	Gesichtswinkel	82°
Großer Sagittalbogen	352		
Kleinste Stirnbreite	84,5		
Länge der Schädelbasis	85		
Breite „ „	86		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	68,21	Obergesichts-Index	53,27 (72,28)
Längenhöhen-Index	72,25	Augenhöhlen-Index	100,00
Ohrhöhen-Index	61,27	Nasen-Index	50,56
Hinterhaupts-Index	65,32	Gaumen-Index	79,54

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, orthocephal, leptoprosop, hypsiconch, mesorrhin, leptostaphylin, prognath (an der Grenze der Prognathie).

Nr. 4.

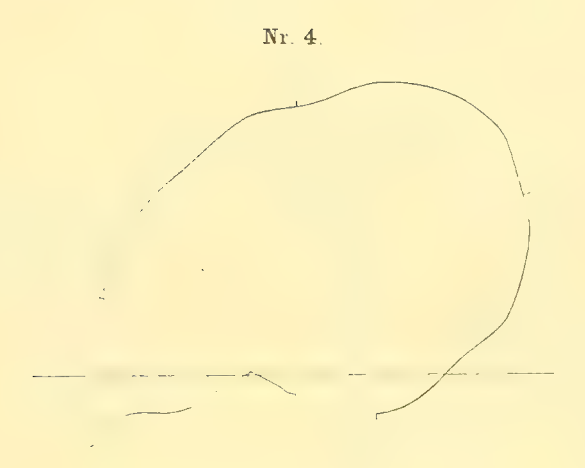


Fig. 4.

Kindlicher Schädel im Zahnwechsel, ohne Unterkiefer, Gesicht zum Teil zerbrochen. Starke Koronalrinne, welche sich beiderseits bis auf die unteren, hinteren Ecken der Scheitelbeine und von da auf die Unterschuppe des Hinterhauptbeins, wo sich beide Rinnenschenkel vereinigen, verfolgen läßt. Dadurch wird eine das ganze Hinterhaupt umgreifende Furche gebildet, wodurch dieses nach hinten und oben bombenförmig vorgewölbt erscheint. In der Gegend des unteren Drittels der Kranznaht geht eine schwache Fortsetzung der Koronalrinne als Abflachung über die Naht auf den hinteren Abschnitt des Stirnbeins über. Die kräftige Stirnabflachung erstreckt sich jederseits auch auf die Stirnhöcker und wölbt den vorderen Wall der Koronalrinne, den Stirnwulst, seinerseits stärker in die Höhe. Ein Mittelgrat des Stirnbeins ist nur schwach ausgebildet. Die Hinterhauptsabflachung ist ebenfalls nur unbedeutend an der Lambdaspitze und den angrenzenden Ecken der Scheitelbeine.

Die Sphenobasilarfuge und alle Nähte sind offen, rechts und links Reste der fötalen Hinterhauptsquernaht. Je ein Schaltknochen in der Gegend der fötalen hinteren Seitenfontanelle. Zitzenfortsätze entsprechend unausgebildet.

Der Schädel ist schwach brachycephal, Längenbreiten-Index 80,53; Längenhöhen-Index 70,65 = orthocephal. Die Kapazität beträgt — ccm; der Horizontalumfang 489; der ganze Sagittalbogen 341 mm.

Der Profilwinkel beträgt 83°, der Schädel ist sonach orthognath. Das Gesicht zeigt kindliche Formen, es ist niedrig, Index 50,00 = chamaeprosop. Wangenbeine angelegt; die Jochbogen sind zerbrochen. Die Nase ist hoch, Index 45,45 = leptorrhin. Der Unterrand der Apertura piriformis ist flach, breit, gerade verlaufend, die untere Begrenzung der Apertur erscheint dadurch fast eckig. Nasenstachel kräftig. Das zerbrochene Nasendach war breit. Die Augenhöhlen sind weit und sehr hoch, Index 102,79, extrem hypsiconch. Augenbrauenbogen fehlen. Ohröffnung rundlich. Alveolarfortsatz niedrig; Gaumen kindlich kurz, fast viereckig.

Das Milchgebiß war während des Lebens noch vollständig erhalten, dazu waren schon die ersten Molaren des Dauergebisses ausgebildet. Das Lebensalter hatte sonach das 7. Jahr überschritten.

Uebersicht der Maasse.

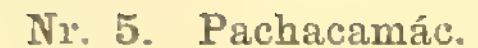
Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	167 mm	Obergesichtshöhe	55
„ Breite	134,5	Jochbreite	110
Gerade Höhe	118	Gesichtsbreite (Virchows)	88
Ohrhöhe	106	Augenhöhlen-Höhe	37
Horizontale Länge des Hinterhaupts	116	„ -Breite	36
Basilare Länge des Hinterhaupts	66	Nasen-Höhe	44
Horizontalumfang	489	„ -Breite	20
Sagittalumfang des Stirnbeins	112	Gaumen-Länge	43
„ der Scheitelbeine	113	„ -Breite	37
„ „ Hinterhauptsschuppe	116	Gesichtswinkel	83°
Ganzer Sagittalbogen	341		
Kleinste Stirnbreite	92		
Länge der Schädelbasis	80		
Breite „ „	96		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	80,53	Obergesichts-Index	50,00 (62,50)
Längenhöhen-Index	70,65	Augenhöhlen-Index	102,79
Ohrhöhen-Index	63,47	Nasen-Index	45,45
Hinterhaupts-Index	69,46	Gaumen-Index	86,05

Allgemeine Analyse:

brachycephal, orthocephal, orthognath, chamaeoprosop (mesoprosop), leptorrhin, hypsiconch, brachystaphylin.



Nr. 5. Pachacamác.

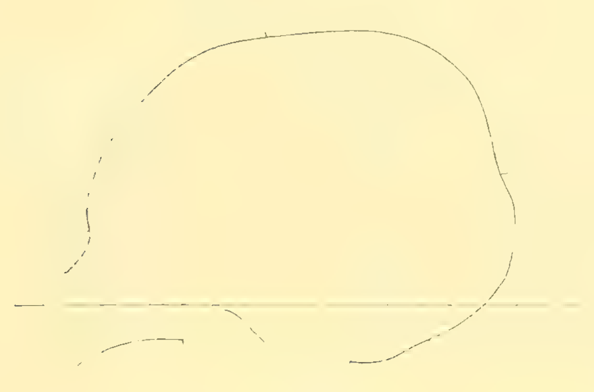


Fig. 5.

Kindlicher Schädel im Zahnwechsel, ohne Unterkiefer, frontal und occipital deformiert. Er zeigt eine breite, flache Koronalrinne, welche beiderseits eine Fortsetzung erkennen läßt zu den unteren, hinteren Eckpartien der Scheitelbeine zur Unterschuppe des Hinterhauptbeins, wo die Rinnen von beiden Seiten her sich vereinigen. Die Stirnabplattung ist typisch mit Mittelgrat, Stirnbeindreieck und Stirnbeinwulst. Die Stirnhöcker sind etwas in den Bereich der Abplattung einbezogen. Die occipitale Deformation ist ziemlich stark, sie betrifft die Lambdaspitze des Hinterhauptbeins und vor allem die angrenzenden Scheitelbeinpartien; trotz dieser Abplattung ist aber der Schädel kaum verkürzt, da die Hinterhauptsschuppe durch die beschriebene umgreifende „Druckrinne“ etwas nach hinten vorgewölbt erscheint.

Die Sphenobasilarfuge und Nähte sind vollkommen offen, in der Lambdanaht zwei kleine Schaltknöchelchen.

Der Schädel ist dolichocephal, Längenbreiten-Index 73,33; Längenhöhen-Index 72,62 = orthocephal. Die Kapazität beträgt 1130 ccm; Horizontalumfang 462; der ganze Sagittalbogen 350 mm.

Der Gesichtswinkel beträgt 81° = schwache Prognathie. Das Gesicht zeigt kindliche Formen, schmal aber niedrig, Index 48,11 = chamae- bezw. mesoprosop. Die Nase ist schon gut entwickelt, Index 44,29 = leptorrhin. Die Nasenbeine oben ziemlich schmal, trotzdem das Nasendach bemerkenswert gewölbt. Augenhöhlen weit, gerundet, Index 100,00 = extremhypsiconch. Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Ohröffnung schmal oval. Gaumen ziemlich tief, Index 81,81 = mesostaphylin.

Während des Lebens war wohl noch das ganze Milchgebiß vorhanden, aber schon stark abgekaut. Die ersten Molaren des Dauergebisses sind schon vollkommen entwickelt und etwas abgekaut. Das Lebensalter betrug sonach etwa 7 bis 8 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1130 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	165 mm	Obergesichtshöhe	51
„ Breite	221	Jochbreite	106
Gerade Höhe	122	Gesichtsbreite (Virchows)	78,5
Ohrhöhe	109	Augenhöhlen-Höhe	33
Horizontale Länge des Hinterhaupts	110	„ -Breite	33
Basilare Länge des Vorderhaupts	64	Nasen-Höhe	42
Horizontalumfang	462	„ -Breite	19
Sagittalumfang des Stirnbeins	113	Gaumen-Länge	44
„ der Scheitelbeine	124	„ -Breite	36
„ „ Hinterhauptsschuppe	113	Gesichtswinkel	$81^1/_4{}^0$
Ganzer Sagittalbogen	350		
Kleinste Stirnbreite	82		
Länge der Schädelbasis	82		
Breite „ „	94		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	73,33	Obergesichts-Index	48,11
Längenhöhen-Index	72,62	Augenhöhlen-Index	100,00
Ohrhöhen-Index	64,88	Nasen-Index	44,29
Hinterhaupts-Index	65.47	Gaumen-Index	81,81

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, orthocephal, chamaeprosop (mesoprosop), hypsiconch, leptorrhin, mesostaphylin, prognath.

Nr. 6.

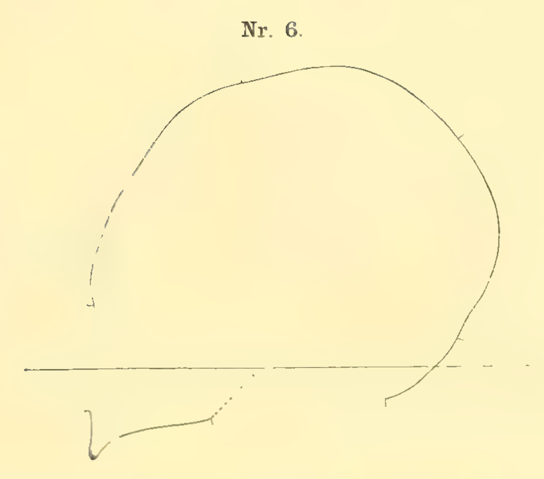


Fig. 6.

Kindlicher Schädel ohne Unterkiefer. Die Koronalrinne ist breit und seicht, sie teilt sich etwa entsprechend der Mitte der Kranznaht in einen schwächeren sich nach vor- und abwärts wendenden Schenkel und in einen zweiten, welcher beiderseits nach rückwärts zieht über die Unterhälfte der Scheitelbeine, wo er breit entwickelt ist, zur Hinterhauptsschuppe. Die Partien um die untere Hälfte der Lambdanaht erscheinen stark zusammengepreßt. Durch diese starke seitliche „Pressung" wird das Hinterhaupt im ganzen vorgebuchtet und in seinen unteren hinteren Partien verschmälert. Die typische frontale Deformation zeigt wieder eine rechte und eine linke Druckfläche auf beiden Stirnbeinseiten, dabei bleibt ein „Mittelgrat", „Stirnbeindreieck" und ein etwa daumenbreiter „Stirnbeinwulst" vom Druck frei und treten dementsprechend über die Fläche des Knochens vor. Die occipitale Deformation zeigt sich als eine wenig ausgedehnte Abplattung der Partien um die Spitze der Lambdanaht.

Sphenobasilarfuge und alle Nähte offen und vollkommen normal ohne Nahtknochen. Schwache, rinnenförmige Stenokrotaphie der Schläfengegend. Die Zitzenfortsätze sind für das kindliche Alter ziemlich groß (Geschlecht vielleicht männlich).

Der Schädel. ist mesocephal, Längenbreiten-Index 78,13; Längenhöhen-Index 83,13 = trypsicephal.

Die Kapazität beträgt — ccm; der Horizontalumfang 465; der ganze Sagittalbogen 334 mm.

Der Gesichtswinkel beträgt 85⁰ = orthognath. Die Gesichtsform ist kindlich, schmal, Index 50,00 = Grenzwert zwischen Lepto- und Chamaeprosopie resp. Mesoprosopie. Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Die Fossa canina, der kindlichen Form entsprechend, wenig ausgebildet. Alveolarfortsatz kurz. Nase schon wohl entwickelt, Index 51,22 = platyrrhin. Die zerbrochenen Nasenbeine waren verhältnismäßig breit und gut gewölbt. Die Augenhöhlen im Vergleich mit anderen Schädeln dieser Serie nicht besonders hoch, der Index ist aber doch hypsiconch: 87,15. Ohröffnung rund. Gaumen kindlich, ziemlich flach und schmal, Index 72,92 = leptostaphylin.

Das Milchgebiß war während des Lebens wohl noch großenteils erhalten. Jetzt stecken im Kiefer noch links der erste Molar gut erhalten und kaum abgekaut, rechts ein Bruchstück desselben Zahnes. Auch der zweite Molar scheint schon im Kommen gewesen zu sein. Das Lebensalter war sonach über 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	160 mm	Obergesichtshöhe	57
„ Breite	125	Jochbreite	114
Gerade Höhe	133	Gesichtsbreite (Virchows)	83
Ohrhöhe	115	Augenhöhlen-Höhe	30,5
Horizontale Länge des Hinterhaupts	97	„ -Breite	35
Basilare Länge des Vorderhaupts	66	Nasen-Höhe	41
Horizontalumfang	465	„ -Breite	21
Sagittalumfang des Stirnbeins	114	Gaumen-Länge	48
„ der Scheitelbeine	95	„ -Breite	35
„ „ Hinterhauptsschuppe	125	Gesichtswinkel	85°
Großer Sagittalbogen	334		
Kleinste Stirnbreite	88		
Länge der Schädelbasis	(86)		
Breite „ „	92		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	78,13	Obergesichts-Index	50,00 (68,67)
Längenhöhen-Index	83,13	Augenhöhlen-Index	87,15
Ohrhöhen-Index	71.87	Nasen-Index	51,22
Hinterhaupts-Index	60,63	Gaumen-Index	72,92

Allgemeine Analyse:

mesocephal, hypsicephal, chamaeprosop (mesoprosop), hypsiconch, an der Grenze der Platyrrhinie, leptostaphylin, orthognath.

Nr. 7.

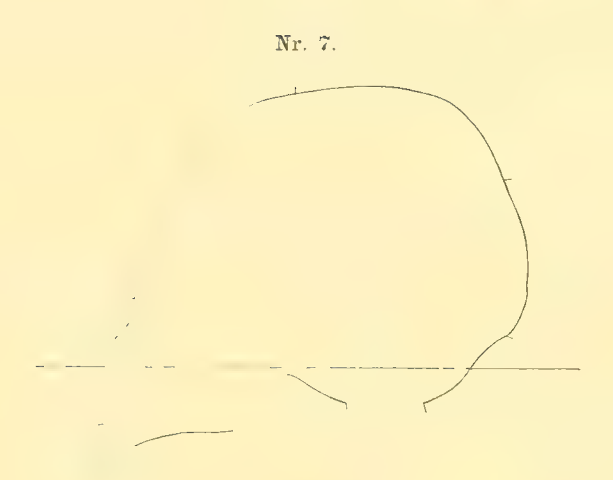


Fig. 7.

Ziemlich schwerer, jugendlicher Schädel, Geschlecht unbestimmbar, ohne Unterkiefer, oxycephal mit abgeflachtem Scheitel. Er entspricht in Form und Deformation ziemlich dem Schädel Nr. 3. Er zeigt flache, breite Koronalrinnen, welche sich zuerst jederseits ziemlich schwach über die unteren Partien der Scheitelbeine fortsetzen, die hinteren unteren Ecken der letzteren aber in breiter Fläche eindrücken. Diese Druckrinnen gehen beiderseits auf die Schuppe des Hinterhauptbeins über und vereinigen sich unter der Protuberantia occipitalis externa zu einer fingerbreiten, ziemlich tiefen Furche. Die Stirnabplattung zeigt rechts und links auf dem Stirnbein die typischen zwei Druckflächen. Sie lassen die Stirnhöcker fast ganz uneingedrückt, bilden in der sagittalen Mittellinie einen kleinfingerbreiten „Mittelgrat" und lassen wie diesen auch die oberen Partien des Stirnbeins vom Drucke frei. Die occipitale Deformation ist ziemlich beträchtlich, die Abplattung betrifft die Spitze der Oberschuppe, hat aber ihre Hauptausdehnung auf den beiden Scheitelbeinen. Trotz der erwähnten Rinne unter dem äußeren Hinterhauptshöcker sind dieser selbst und die benachbarten Muskelansatzstellen über der Rinne relativ gut ausgebildet. Die occipitale Rinne ist sonach während der ersten Jugendzeit entstanden vor der erst später erfolgenden vollen Ausbildung der Nackenmuskulatur.

Die Sphenobasilarfuge und alle Nähte sind offen. In der Gegend der hinteren Seitenfontanelle sind links zwei, rechts ein Schaltknochen, in der sonst gut ausgebildeten Lambdanaht finden sich einige Wormsche Knöchelchen. Beiderseits in der Schläfengegend schwache, rinnenförmige Stenokrotaphie mit inkompleten Stirnfortsätzen der Schläfenschuppe. Die Zitzenfortsätze sind bemerkenswert klein.

Die Schädelform ist die dolichocephale, Längenbreiten-Index 73,18; Längenhöhen-Index 78,31 = hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1340 ccm, der Horizontalumfang 508, der ganze Sagittalbogen 361 mm.

Der Gesichtswinkel ist 77° = prognath. Das Gesicht erscheint im allgemeinen ziemlich kurz, der Index beträgt 48,40 = chamaeprosop (bzw. mesoprosop). Jochbogen und Jochbeine angelegt, erstere in der Mitte schwach ausgewölbt. Die Nase ist schmal, Index 46,74 = leptorrhin, aber nicht besonders groß. Der Unterrand der Apertura piriformis abgeplattet, im ganzen gerade verlaufend, die Ecken ziemlich scharf, winkelig, ähnlich wie bei Nr. 4. Das relativ schmale Nasendach erhebt sich einige Millimeter unter der Wurzel aquilin. Die Augen-

höhlen sind weit, gerundet, Index 97,22 = hypsiconch. Augenbrauenbogen schwach, Stirnnasenwulst. Ohröffnung ziemlich schmal-oval. Gaumen mäßig tief, Index 79,24 = leptostaphylin.

Während des Lebens waren alle Zähne gut erhalten, rechts war der dritte Molar wohl schon durchgebrochen, links war er nahe am Erscheinen. Die noch im Schädel vorhandenen Zähne (beiderseits die ersten beiden Molaren, rechts der zweite Prämolar) sind noch wenig abgekaut. Danach kann das Lebensalter, auch im Hinblick auf die noch offene Sphenobasilarfuge, auf kaum mehr als 16 Jahre angesetzt werden.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1340 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	179 mm	Obergesichtshöhe	60,5
„ Breite	132	Jochbreite	125
Gerade Höhe	140	Gesichtsbreite (Virchows)	99
Ohrhöhe	114	Augenhöhlen-Höhe	35
Horizontale Länge des Hinterhaupts	113	„ -Breite	36
Basilare Länge des Vorderhaupts	72	Nasen-Höhe	46
Horizontalumfang	508	„ -Breite	21,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	126	Gaumen-Länge	53
„ der Scheitelbeine	120	„ -Breite	42
„ „ Hinterhauptsschuppe	115	Gesichtswinkel	77°
Ganzer Sagittalbogen	361		
Kleinste Stirnbreite	86		
Länge der Schädelbasis	93		
Breite „ „	102		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	73,18	Obergesichts-Index	48,40 (61,11)
Längenhöhen-Index	78,21	Augenhöhlen-Index	97,22
Ohrhöhen-Index	63.69	Nasen-Index	46.74
Hinterhaupts-Index	63,13	Gaumen-Index	79,24

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, hypsicephal, chamaeprosop (mesoprosop), hypsiconch, leptorrhin, leptostaphylin, prognath.

Nr. 8.

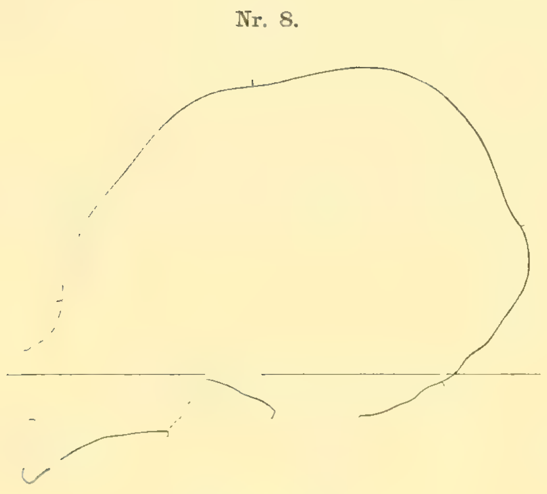


Fig. 8. Tafel 8.

Erwachsener Schädel, ohne Unterkiefer, Geschlecht unbestimmbar. Die Form des Hirnschädels ist den vorbeschriebenen, z. B. Nr. 3, sehr ähnlich. Die Koronalrinne ist gut ausgebildet, breit, sie beginnt erst ca. 1 cm rechts und links von dem anderen Ende der Sagittalnaht, verläuft dann bis unter die Mitte der Kranznaht. Von da wendet sie sich in einem ganz schwachen Ast nach vorwärts und abwärts, ihre Hauptfortsetzung findet sie aber in der Richtung nach hinten und unten, wo sie ca. zwei Finger breit über die untere Partie der Scheitelbeine zur Hinterhauptsschuppe verläuft. An der Grenze beider Knochen ist der Schädel stark eingedrückt. Von hier verläuft dieser Teil der Fortsetzung der Koronalrinne als etwa fingerbreite Furche unter dem äußeren Hinterhauptshöcker, entsprechend Nr. 7. Durch die so hervorgerufene Vorwölbung der Oberschuppe des Hinterhauptbeins erscheint das Hinterhaupt etwas verlängert. Das Stirnbein zeigt auf seiner rechten und linken Seite die oft beschriebenen beiden, hier ziemlich breiten, Abflachungen; in typischer Weise erscheinen an der Grenze die vom Drucke nicht betroffenen Stirnbeinpartien über die Druckflächen entsprechend erhoben: die oberen Randabschnitte als „Stirnbeinwulst", der sich nach unten zwischen die Druckflächen als „Stirnbeindreieck" fortsetzt, dessen verlängerte Spitze der „Stirnbeingrat" ist. Die Stirnhöcker bleiben vom Drucke ziemlich frei. Die occipitale Deformation zeigt sich als eine ziemlich schwache, etwa drei Finger breite Druckfläche auf den hinteren oberen Partien der Scheitelbeine, gegen welche sich der Oberrand der Oberschuppe des Hinterhauptbeins etwas vorwölbt. Die occipitale Druckfläche liegt, wie gesagt, ausschließlich auf den Scheitelbeinen, nur noch einen ziemlich großen Wormschen Knochen rechts von der Spitze der Lambdanaht einbeziehend. Beinahe die ganze Hinterhauptsschuppe erscheint, gleichmäßig flachgelegt, also ohne die normale Abknickung zwischen Ober- und Unterschuppe, in der Ansicht der Norma basilaris, nur der Oberrand der Oberschuppe in der Norma occipitalis.

Die Spenobasilarfuge ist verknöchert, die Schädelnähte alle offen. In der Gegend der fötalen Schläfenfontanelle links ein, rechts drei Schaltknochen, auch in der Gegend der hinteren Seitenfontanelle zeigt sich je ein solcher; auch die rechte Schuppennaht besitzt zwei. Die Lambdanaht hat außer dem schon genannten größeren Wormschen Knochen in ihrem rechten Schenkel rechts und links noch eine Anzahl kleinerer. Die Zitzenfortsätze sind schmal und zierlich.

Der Schädel ist stark dolichocephal, Längenbreiten-Index 68,85; Längenhöhen-Index 74,86 = orthocephal. Kapazität 1330 ccm; Horizontalumfang 510, ganzer Sagittalbogen 373 mm.

Gesichtswinkel 77° = prognath; das Gesicht schmal, Index 55,28 = leptoprosop; Wangenbeine angelegt. Die Apertura piriformis ist schmal, nach unten schön herzförmig ausgebuchtet mit schwach abgerundetem Rande. Nasenstachel kräftig. Die Nasenbeine sind breit und aquilin gewölbt, das Nasendach hoch; Nasen-Index 50,00 = mesorrhin. Die Augenhöhlen sehr hoch, Index 105,41 = extrem hypsiconch. Der Gaumen tief, Index 68,96 = leptostaphylin. Ohröffnung oval, oben weit.

Während des Lebens waren alle Zähne des Dauergebisses vorhanden, die dritten Molaren klein, noch kaum abgekaut, Lebensalter etwa 20 Jahre.

Die Form des erwachsenen Schädels entspricht sehr vollkommen der des kindlichen Schädels Nr. 3: es tritt sonach eine Veränderung der im kindlichen Alter durch Deformation erworbenen Form nicht mehr ein, die Schädel behalten die in der Jugend ausgebildete Form bis ins spätere Alter.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1330 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	183 mm	Obergesichtshöhe	68
„ Breite	126	Jochbreite	123
Gerade Höhe	137	Gesichtsbreite (Virchows)	98
Ohrhöhe	114	Augenhöhlen-Höhe	39
Horizontale Länge des Hinterhaupts	115	„ -Breite	37
Basilare Länge des Vorderhaupts	77,5	Nasen-Höhe	46
Horizontalumfang	510	„ -Breite	23
Sagittalumfang des Stirnbeins	123	Gaumen-Länge	58
„ der Scheitelbeine	138	„ -Breite	40
„ „ Hinterhauptsschuppe	112	Gesichtswinkel	77°
Ganzer Sagittalbogen	373		
Kleinste Stirnbreite	89		
Länge der Schädelbasis	94		
Breite „ „	97		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	68,85	Obergesichts-Index	55,28 (69,39)
Längenhöhen-Index	74,86	Augenhöhlen-Index	105,41
Ohrhöhen-Index	62,29	Nasen-Index	50,00
Hinterhaupts-Index	62,84	Gaumen-Index	68,96

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, orthocephal, leptoprosop, hypsiconch, mesorrhin, leptostaphylin, prognath.

Nr. 9.

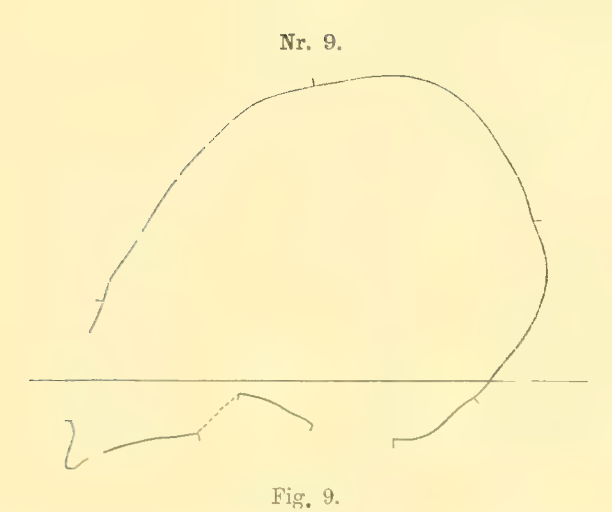


Fig. 9.

Erwachsener (alter?) Schädel ohne Unterkiefer, Geschlecht unbestimmbar: fronto-occipitale Deformation, Oxycephalus, Stirn in fliehende Form deformiert, Hinterhauptschuppe im ganzen aufgerichtet. Eine Koronalrinne ist nur schwach, flach, ausgebildet; das obere Ende der Sagittalnaht zeigt, wie das gewöhnlich deutlich konstatiert werden kann, keine Druckwirkung. Letztere läßt sich bis zur Mitte der Koronalnaht verfolgen, eine Fortsetzung nach unten und vorne ist nicht deutlich. Dagegen zieht sich beiderseits eine ca. drei Finger breite Druckfläche jederseits von den typischen Druckflächen der Stirn über den unteren Teil der Scheitelbeine zu deren unteren hinteren Ecken und überschreitet hier die Lambdanaht, wo sie undeutlich wird. Die breiten Druckflächen pressen die Umgebung der Lambdanaht etwas zusammen und wölben die Hinterhauptschuppe etwas nach hinten vor. Die Stirnabflachung ist bedeutender als bei den bisher geschilderten, insofern als sie auch die Stirnhöcker einbezieht und das Stirnbein, wie es scheint, etwas verschmälert. Die oberen Partien des Stirnbeins zeigen keine Druckwirkung, es zeigen sich, wenn auch nicht stärker sich erhebend, die typisch vom Druck freibleibenden Stirnbeinteile als: Mittelgrat mit Stirnbeindreieck und Stirnbeinwulst. Auffallend treten durch die bedeutende Abflachung der unteren Stirnbeinpartie die Augenbrauenbogen hervor. Eine schwächere occipitale Abplattung betrifft die Lambdaspitze der Hinterhauptschuppe und die nächstangrenzenden Scheitelbeinpartien.

Obwohl die Sphenobasilarfuge vollkommen verknöchert ist, sind doch noch alle Nähte offen und im wesentlichen normal, nur ein kleiner Schaltknochen in der Gegend der fötalen vorderen Seitenfontanelle in der Mitte der Kranznaht, weitere kleine Schaltknöchelchen in der Lambda- und Schuppennaht. Die Zitzenfortsätze sind schmal und klein. In der Schläfengegend rinnenförmige Stenokrotaphie, rechts stärker als links.

Der Schädel ist dolichocephal, Längenbreiten-Index 71,55; Längenhöhen-Index 78,16 = hypsicephal. Die Kapizität beträgt 1170 ccm; der Horizontalumfang 499, der ganze Sagittalbogen 356 mm.

Der Gesichtswinkel beträgt 75° = prognath, mit alveolarer Prognathie. Das Gesicht ist schmal, Index 53,26 = leptoprosop. Wangenbeine (links zerbrochen) angelegt; Fossa canina ziemlich tief. Die Nase ist ziemlich schmal, Index 49,35 = mesorhin; die Apertura piriformis mit ulmenblattförmigem Unterrand. Nasendach, etwas zerbrochen, gut gewölbt, Nasenbeine oben

ziemlich schmal. Augenhöhlen hoch, gerundet, Index 100,00 = extrem hypsiconch. Ohröffnung schmal-oval. Gaumen relativ seicht und schmal, Index 74,51 = leptostaphylin.

Während des Lebens waren schon zu Verlust gegangen: rechts der erste Prämolar, links alle drei Molaren, rechts ist die Alveolarpartie der letzteren zerbrochen. Die beiden Eckzähne und der linke erste Prämolar waren kariös.

Das Lebensalter war sonach wohl schon ein höheres.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1170 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	174 mm	Obergesichtshöhe	65
„ Breite	124,5	Jochbreite	122
Gerade Höhe	136	Gesichtsbreite (Virchows)	91
Ohrhöhe	114	Augenhöhlen-Höhe	39
Horizontale Länge des Hinterhaupts	108	„ -Breite	39
Basilare Länge des Vorderhaupts	69	Nasen-Höhe	49
Horizontalumfang	499	„ -Breite	22,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	124	Gaumen-Länge	51
„ der Scheitelbeine	116	„ -Breite	38
„ „ Hinterhauptsschuppe	116	Gesichtswinkel	75°
Ganzer Sagittalbogen	356		
Kleinste Stirnbreite	76		
Länge der Schädelbasis	96		
Breite „ „	101		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	71,55	Obergesichts-Index	53,26 (71,43)
Längenhöhen-Index	78,16	Augenhöhlen-Index	100,00
Ohrhöhen-Index	65,52	Nasen-Index	49,35
Hinterhaupts-Index	60,92	Gaumen-Index	74,51

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, hypsicephal, leptoprosop, hypsiconch, mesorrhin, leptostaphylin, prognath.



Nr 10 Pachacamác.



Fig. 10.

Erwachsener, ziemlich zarter männlicher Schädel mit Unterkiefer; frontal und occipital deformiert. Koronalrinne gut ausgebildet, breit, die vordere Partie der Sagittalnaht nicht einbeziehend. Etwas unter der Mitte der Stirnnaht tritt eine Gabelung der Koronalrinne ein. Schwache Fortsetzung nach vorn und unten, stärkere nach hinten, welche zwei Finger breit auf die untere Hälfte der Lambdanaht übergeht und diese überschreitet. Der Schädel wird dadurch von hinten etwas zusammengedrückt, aber wie es scheint, nicht verlängert. Die Stirn zeigt die beiden seitlichen breiten Druckflächen mit den vorspringenden nicht eingedrückten Partien des Stirnbeins: Stirnwulst mit großem Stirnbeindreieck und Mittelgrat. Auch die unteren Teile des Stirnbeins bleiben uneingedrückt, doch sind die Stirnhöcker vom Drucke berührt. Die occipitale Druckfläche ist gut drei Finger breit und betrifft die Spitze der Oberschuppe und die angrenzenden Teile der Scheitelbeine. Ober- und Unterschuppe des Hinterhaupts zeigen eine deutliche Verschiedenheit in der Lage; während die Oberschuppe aufgebogen ist und vorwiegend in die norma occipitalis zu liegen kommt, liegt die Unterschuppe in der norma basilaris. Die beiden Anschnitte der Schuppen sind durch einen breiten Knochenwulst voneinander abgegrenzt.

Die Sphenobasilarfuge ist verwachsen, die Nähte sind größtenteils noch offen, in der Schläfengegend beginnt die Verwachsung. Die processi mastoidei sind ziemlich klein.

Der Schädel ist mesocephal mit Neigung zur Dolichocephalie, Längenbreiten-Index 76,34. Längenhöhen-Index 80,24, hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1165 ccm, der Horizontalumfang 485 mm, der ganze Sagittalbogen 354 mm.

Profilwinkel 78°, prognath. Das Gesicht ist schmal, Index 56,27 leptoprosop. Jochbogen angelegt, fossa canina flach, Nase relativ kurz und mäßig breit, Index 52,27 = platyrhin; die Nasenbeine an der Wurzel ziemlich flach, dann stark konvex aquilin vorspringend. Augenhöhlen viereckig, weit, Index 94,44 = hypsiconch. Ohröffnung oval. Gaumen schmal, sehr tief, Index 70,59 = leptostaphylin. Die Zähne waren während des Lebens alle vorhanden, der erste linke Prämolar ist kariös, die noch erhaltenen beiden ersten Molaren stark abgerieben.

Unterkiefer zart und niedrig, aber männlich mit steil aufgerichteten Ästen. Kinn gut entwickelt. Zähne klein; während des Lebens fehlte rechts der erste Molar; der rechts vorhandene dritte Molar ist noch ganz wenig abgekaut. An der Alveole des zweiten Molar links in der Vorderwand des Unterkiefers eine ziemlich große rundliche Öffnung in die Alveole als Rest einer Zerstörung durch Wurzelentzündung, Zahnfistel.

Lebensalter zwischen 20 und 30 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

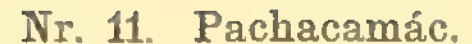
Kapazität	1165 ccm	Ganze Gesichtshöhe	101 mm
Größte horizontale Länge	167 mm	Obergesichtshöhe	65
„ Breite	127,5	Jochbreite	115,5
Gerade Höhe	134	Gesichtsbreite (Virchows)	93
Ohrhöhe	112	Augenhöhlen-Höhe	34
Horizontale Länge des Hinterhaupts	107	„ -Breite	36
Basilare Länge des Hinterhaupts	66	Nasen-Höhe	44
Horizontalumfang	485	„ -Breite	23
Sagittalumfang des Stirnbeins	121	Gaumen-Länge	51
„ der Scheitelbeine	123	„ -Breite	36
„ „ Hinterhauptsschuppe	110	Gesichtswinkel	78°
Ganzer Sagittalbogen	354		
Kleinste Stirnbreite	85		
Länge der Schädelbasis	82		
Breite „ „	93		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	76,34	Obergesichts-Index	56,27 (69,89)
Längenhöhen-Index	80,24	Augenhöhlen-Index	94,44
Ohrhöhen-Index	67.07	Nasen-Index	52,27
Hinterhaupts-Index	64,07	Gaumen-Index	70,59

Allgemeine Analyse:

♂, mesocephal, hypsicephal, leptoprosop, hypsiconch, platyrhin, leptostaphylin, prognath.



Nr. 11. Pachacamác.

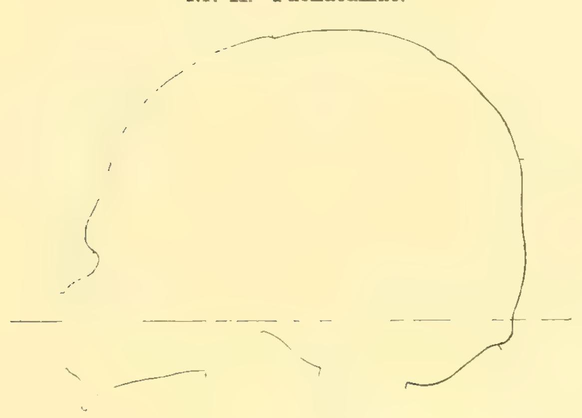


Fig. 11. Tafel 9.

Schwerer männlicher Schädel mit Unterkiefer, von vorgeschrittenem Lebensalter, ohne deutlich erkennbare Deformation. Der Scheitel erscheint flach dachförmig; starke Augenbrauenbogen aber mit planum orbitale. Eine schwache rinnenförmige Einziehung läuft über dem gut ausgebildeten torus occipitalis, wie es scheint etwas auf die Scheitelbeine übergreifend, vielleicht Spur einer Deformation im Kindesalter. Starke krankhafte Knochenveränderungen, auf der rechten Seite der Oberschuppe des Hinterhauptbeins eine tiefe, ca. drei Finger breite unregelmäßige Einbuchtung mit entsprechender Vorwölbung nach innen bildend. Die Knochenoberfläche der eingebuchteten Stelle stark porös mit kleinen Wucherungen der Glastafel. Von der äußeren Einbuchtung geht oben rechts eine lineare, der Sagittalnaht fast parallele, ca. 2 mm breite, 7 cm lange, durch zahlreiche Poren charakterisierte, schwache Knochenfurche aus, in der Mitte des Scheitelbeins nach vorn verlaufend; vielleicht entspricht das Ganze einem geheilten Trauma.

Die Nähte sind zum Teil verwachsen und verstrichen. In der Lambdanaht, soweit diese erhalten, zahlreiche Schaltknochen. Sphenobasilarfuge verwachsen. Processi mastoidei kräftig, groß. Durch starke Muskelansätze ist die Unterschuppe des Hinterhauptbeins kräftig profiliert.

Der Schädel brachycephal, Index 85,47; Längenhöhen-Index 84,29 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1270 ccm, der Horizontalumfang 513 mm, der ganze Sagittalbogen 365 mm.

Profilwinkel 84°, orthognath. Das Gesicht ist breit und niedrig, Index 46,95 chämoprosop; Fossa canina ziemlich flach, Wangenbeine vorspringend, Jochbogen ausladend. Nase mit starken Pränasalgruben, platyrrhin, Index 51,58; Nasenstachel lang; Nasenbeine breit und steil gegeneinander gestellt, das Dach an der Wurzel eingezogen, Nasenwurzel tief, der Rücken aquilin vorspringend. Augenhöhlen viereckig, Index 78,57 chamaeconch. Der obere Rand erscheint gewissermaßen durch Knochenauflagerung im ganzen verdickt, wodurch er nach vorne über den Stirnfortsatz des Wangenbeins vorspringt und die Augenhöhlen erniedrigt; beiderseits ein Foramen supra orbitale, rechts und links 6 mm vom Rande entfernt. Ohröffnung oval, hoch. Gaumen flach und kurz, Index 94,00 brachystaphylin. Alveolarrand senil, die vorhandenen Zähne klein und schlecht, ziemlich abgekaut. Es fehlten im Leben die Schneidezähne, die drei Molaren, rechts der erste, links beide Prämolaren. Alter über 50 Jahre.

Unterkiefer: Körper niedrig, Kinn gut entwickelt; Äste mäßig steil gestellt. Von den Zähnen fehlte im Leben rechts der erste, links der zweite und dritte Molar.

Der Schädel unterscheidet sich durch sein ganzes Ansehen wesentlich, gewissermaßen rassenhaft, von den im vorausgehenden beschriebenen.

Uebersicht der Maasse

Kapazität	1270 ccm	Ganze Gesichtshöhe	101 mm
Größte horizontale Länge	172 mm	Obergesichtshöhe	61,5
„ Breite	147	Jochbreite	131
Gerade Höhe	145	Gesichtsbreite (Virchows)	107
Oberhöhe	116	Augenhöhlen-Höhe	33
Horizontale Länge des Hinterhaupts	98	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	73	Nasen-Höhe	47,5
Horizontalumfang	513	„ -Breite	24,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	122	Gaumen-Länge	50
„ der Scheitelbeine	121	„ -Breite	47
„ „ Hinterhauptsschuppe	122	Gesichtswinkel	84°
Ganzer Sagittalbogen	365		
Kleinste Stirnbreite	99		
Länge der Schädelbasis	100		
Breite „ „	114		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	85,47	Obergesichts-Index	46,95 (57, 48)
Längenhöhen-Index	84,29	Augenhöhlen-Index	78,57
Ohrhöhen-Index	67,44	Nasen-Index	51,58
Hinterhaupts-Index	56,98	Gaumen-Index	94,00

Allgemeine Analyse:

♂, brachycephal, hypsicephal, orthognath, chamaeprosop, platyrrhin, chamaeconch, brachystaphylin.

Nr. 12.

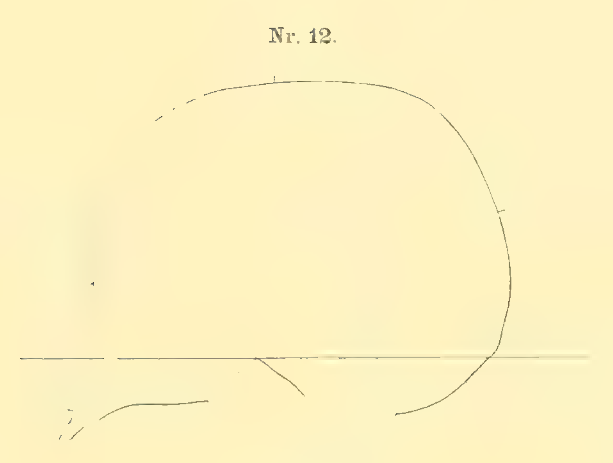


Fig. 12.

Wenig deformierter, kräftiger männlicher (?) Schädel mit Unterkiefer, erwachsenen Alters, mit offener Stirnnaht. Eine schwache Druckspur scheint oberhalb der Augenbrauenbogen über die Stirn zu verlaufen. Eine schwache Abplattung zieht über die hinteren unteren Ecken der Scheitelbeine und greift auf die Hinterhauptsschuppe über. Eine occipitale Abplattung zeigen die Partien um die Spitze der Lambdanaht.

Die Nähte sind alle offen und stark gezackt. Die Lambdanaht enthält eine Anzahl kleiner Schaltknochen. Die Sphenobasilarfuge ist verwachsen, die Kondylen und Zitzenfortsätze sind kräftig und groß.

Der Schädel ist ausgesprochen brachycephal, Index 85,27; Höhen-Index 80,98, hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1175 ccm, der Horizontalumfang 486 mm, der ganze Sagittalbogen 342 mm.

Profilwinkel 78° prognath, vorwiegend alveolar. Das Gesicht ist ziemlich breit, Index 48,86 = chamaeprosop und kräftig profiliert; fossa canina ziemlich tief, Wangenbeine vortretend, Jochbogen etwas ausladend. Nase ziemlich lang, Index 50,98 = mesorhin; der Nasenstachel ist abgebrochen, war aber anscheinend kräftig; Unterrand der stark ulmenblattförmigen Apertura piriformis flach gerundet. Nasendach an der Wurzel breit und flach, dann vorspringend. Augenhöhlen rundlich-viereckig, mittelhoch, Index 85,00 = mesoconch. Augenbrauenbogen schwach, breiter flacher Stirnnasenwulst. Ohröffnung oval. Gaumen tief, ziemlich lang, Index 77,96 = leptostaphylin. Alveolarfortsatz mäßig lang und stark prognath. Während des Lebens fehlten links der erste und dritte Molar. Die vorhandenen Zähne sind ziemlich stark abgekaut, Unterkiefer relativ niedrig, Kinn kräftig. Die Äste mäßig schief. Die Zähne waren mit Ausnahme des linken dritten Molar im Leben alle vorhanden. Die Schneidezähne sind auffallend klein; im Oberkiefer waren, nach den Alveolen zu urteilen, die Schneidezähne wesentlich größer.

Lebensalter etwa 30 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

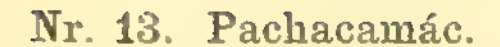
Kapazität	1175 ccm	Ganze Gesichtshöhe	109 mm
Größte horizontale Länge	163 mm	Obergesichtshöhe	64
„ Breite	139	Jochbreite	131
Gerade Höhe	132	Gesichtsbreite (Virchows)	95
Ohrhöhe	113	Augenhöhlen-Höhe	34
Horizontale Länge des Hinterhaupts	94	„ -Breite	40
Basilare Länge des Vorderhaupts	77	Nasen-Höhe	53
Horizontalumfang	486	„ -Breite	27
Sagittalumfang des Stirnbeins	122	Gaumen-Länge	59
„ der Scheitelbeine	114	„ -Breite	46
„ „ Hinterhauptsschuppe	106	Gesichtswinkel	78°
Ganzer Sagittalbogen	342		
Kleinste Stirnbreite	96		
Länge der Schädelbasis	95		
Breite „ „	103		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	85,27	Obergesichts-Index	48,86 (67, 37)
Längenhöhen-Index	80,98	Augenhöhlen-Index	85,00
Ohrhöhen-Index	69,32	Nasen-Index	50,94
Hinterhaupts-Index	57,67	Gaumen-Index	77,96

Allgemeine Analyse:

♂ (?), brachycephal, hypsicephal, prognath, chamaeprosop, mesorhin, mesoconch, leptostaphylin.



Nr. 13. Pachacamác.



Fig. 13.

Sehr schwerer männlicher Schädel ohne Unterkiefer. Er ist durch Deformation in seiner ursprünglichen Form offenbar relativ wenig beeinflußt. Koronalabplattung flach mit sehr stark entwickelter breiter Krista. Über die Stirn zieht sich auf beiden Seiten eine Druckspur, über welcher in der Mitte des Stirnbeins ein starker Mittelgrat und ein großes Stirnbeindreieck hervorragt. Die Abplattung greift auf die beiden Scheitelbeine über. Da die Sagittalnahtgegend in ihrer vorderen Hälfte unverändert ist, erscheint die Scheitelpartie ausgesprochen dachförmig. Der untere Teil des Stirnbeins zeigt keine bemerkenswerte Deformation; die Augenbrauenbogen sind stark entwickelt. Eine geringe Abplattung besteht in der Gegend der hinteren Hälfte der Sagittalnaht. Über die Lambdanaht, diese nur schwach überschreitend, verläuft von der hinteren unteren Ecke der beiden Scheitelbeine je eine etwa zwei Finger breite rinnenförmige Eintiefung. Dadurch erscheinen die seitlichen Ränder in der Norma occipitalis etwas konkav eingedrückt. Starke Crista occipitalis.

Die Nähte sind großenteils verwachsen; offen ist noch die ganze Kranznaht und die Nähte um den großen Keilbeinflügel. Verwachsen und fast ganz verstrichen ist die Pfeilnaht, ebenso die Lambdanaht mit Ausnahme einer kleinen Strecke rechts und die ganze Nahtverbindung der Schläfenbeine mit den Scheitelbeinen. Es scheint beiderseits processus frontalis der Schläfenbeinschuppe bestanden zu haben. Die Sphenobasilarfuge ist völlig verwachsen, das Hinterhauptsloch ist etwas schief wie der ganze Schädel; die Zitzenfortsätze sind groß und stark.

Der Schädel ist dolichocephal, Längenbreiten-Index 74,01; Längenhöhen-Index 81,01, hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1190 ccm, der Horizontalumfang 507 mm, der ganze Sagittalbogen 373 mm.

Profilwinkel 80°, prognath. Das Gesicht ist gegen die Basis etwas schiefgestellt mit leichter Wendung nach links. Es ist breit und niedrig, Index 47,79 = chamaeprosop. Fossa canina mäßig profiliert. Jochbeine und Jochbogen ziemlich weit ausladend; Alveolarfortsatz kurz. Nase leptorhin, Index 46,29, mit abgerundetem unterem Rand der Apertura piriformis; Nasenbeine zum Teil zerbrochen, gut ausgebildet, Nasendach gewölbt, nach unten vorspringend. Augenhöhlen hoch und weit, Index 85,71 = hypsiconch. Ohröffnung rund und weit. Gaumen oval, Index 79,31 = leptostaphylin, tief. Die Zähne waren während des Lebens wahrscheinlich alle vorhanden.

Der Schädel charakterisiert sich durch die Dicke seiner Knochen, durch seine Schwere und sein ganzes Aussehen als eine besondere Form.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1190 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	177 mm	Obergesichtshöhe	65
„ Breite	131	Jochbreite	136
Gerade Höhe	145	Gesichtsbreite (Virchows)	104
Ohrhöhe	114	Augenhöhlen-Höhe	36
Horizontale Länge des Hinterhaupts	104	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	80	Nasen-Höhe	54
Horizontalumfang	507	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	125	Gaumen-Länge	58
„ der Scheitelbeine	127	„ -Breite	46
„ „ Hinterhauptsschuppe	121	Gesichtswinkel	80°
Ganzer Sagittalbogen	373		
Kleinste Stirnbreite	100		
Länge der Schädelbasis	107		
Breite der Schädelbasis	102		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	74,01	Obergesichts-Index	47,79 (62, 50)
Längenhöhen-Index	81.01	Augenhöhlen-Index	85,71
Oberhöhen-Index	63.69	Nasen-Index	46,29
Hinterhaupts-Index	58,10	Gaumen-Index	79,31

Allgemeine Analyse:

♂, dolichocephal, hypsicephal, chamaeprosop, hypsiconch, leptorhin, leptostaphylin, prognath.

Nr. 14

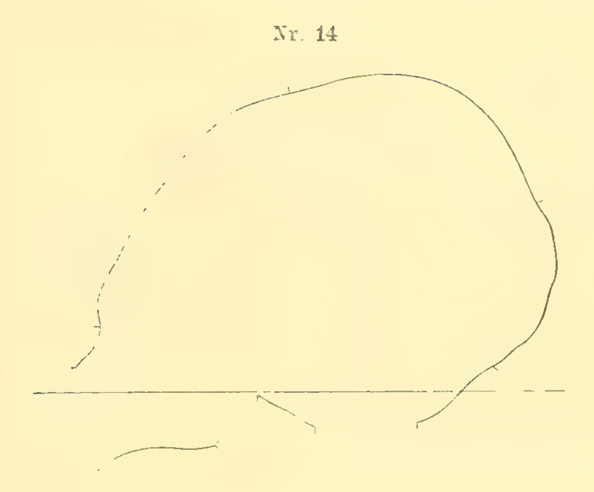


Fig. 14.

Weiblicher (?) stark deformierter Schädel mit Unterkiefer; einige Reste der Kopfhaut sind noch erhalten. Oxycephalus mit flachem Scheitel; er entspricht in seiner Form teilweise dem folgenden Nr. 15, doch sind die Druckwirkungen zum Teil geringer. Die Koronalrinne ist am vorderen Ende der Sagittalnaht nicht eingedrückt; die Fortsetzung nach vorn und unten ist undeutlich, die Fortsetzung nach hinten über das untere Ende der Scheitelbeine bis etwas über die Lambdanaht breit und flach, wodurch der Schädel in der Gegend der unteren Hälfte der Lambdanaht zusammengedrückt erscheint; eine Fortsetzung der Eintiefung über das Hinterhaupt ist nicht deutlich. Die starke Stirnbeinabplattung läßt ein breites Stirnbeindreieck uneingedrückt, welches sich unten bis über die Mitte des Stirnbeins zugespitzt als Grat erstreckt. Die beiden seitlichen Stirnabplattungen haben die Stirnhöcker nicht vollkommen eingedrückt. Die occipitale Abplattung ist ziemlich bedeutend, sie erstreckt sich über die Oberschuppe und die angrenzenden Teile der Scheitelbeine; die Oberschuppe ist gegen die Unterschuppe abgeknickt; die Scheitelbeine sind etwas bombenförmig gewölbt.

Die Nähte sind, soviel man sehen kann, ganz normal und noch offen; die Sphenobasilarfuge ist verwachsen; die processi mastoidei sind klein.

Der Schädel ist brachycephal, Index 84,11. Längenhöhen-Index 84,77, hypsicephal. Die Kapazität beträgt 965 ccm, der Horizontalumfang 466 mm, der ganze Sagittalbogen 312 mm.

Profilwinkel 71°, starke Prognathie. Das Gesicht ziemlich lang, Index 54,76 = leptoprosop. Wangenbeine und Jochbogen etwas ausladend; fossa canina nicht profiliert. Nase breit, Index 53,92 = platyrrhin; der untere Rand der apertura piriformis abgerundet, vorderer Nasenstachel schwach; Nasenbeine breit; das Dach an der Wurzel flach und etwas eingezogen, nach unten sich aquilin vorwölbend. Augenbrauenbogen schwach, Augenhöhlen weit, Index 87.18 = hypsiconch. Ohröffnung schmal, oval. Gaumen ziemlich tief, schmal und lang, Index 78.57 = leptostaphylin. Alveolarfortsatz ziemlich lang, prognath. Während des Lebens war der dritte Molar rechts, wie es scheint, zu Verlust gegangen, links alle drei Molaren. Der rechte erste Prämolar kariös zerstört.

Unterkiefer: Kinn gut entwickelt, die Äste schief, weiblich. Der linke dritte Molar war sehr klein, die rechten fehlten während des Lebens alle. Zähne zum Teil stark abgekaut.

Lebensalter über 30 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	965 ccm	Ganze Gesichtshöhe	107 mm
Größte horizontale Länge	151 mm	Obergesichtshöhe	69
„ Breite	127	Jochbreite	126
Gerade Höhe	128	Gesichtsbreite (Virchows)	101
Ohrhöhe	110	Augenhöhlen-Höhe	34
Horizontale Länge des Hinterhaupts	86	„ -Breite	39
Basilare Länge des Vorderhaupts	79	Nasen-Höhe	51
Horizontalumfang	466	„ -Breite	27.5
Sagittalumfang des Stirnbeins	108	Gaumen-Länge	56
„ der Scheitelbeine	95	„ -Breite	44
„ „ Hinterhauptsschuppe	109	Gesichtswinkel	71°
Ganzer Sagittalbogen	312		
Kleinste Stirnbreite	91		
Länge der Schädelbasis	92		
Breite „ „	103		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	84,11	Obergesichts-Index	54,76 (68, 32)
Längenhöhen-Index	84.77	Augenhöhlen-Index	87,18
Ohrhöhen-Index	72,85	Nasen-Index	53,92
Hinterhaupts-Index	56.75	Gaumen-Index	78,57

Allgemeine Analyse.

♀ (?), brachycephal, hypsicephal, leptoprosop, hypsiconch, platyrrhin, leptostaphylin, prognath.

Nr. 15.

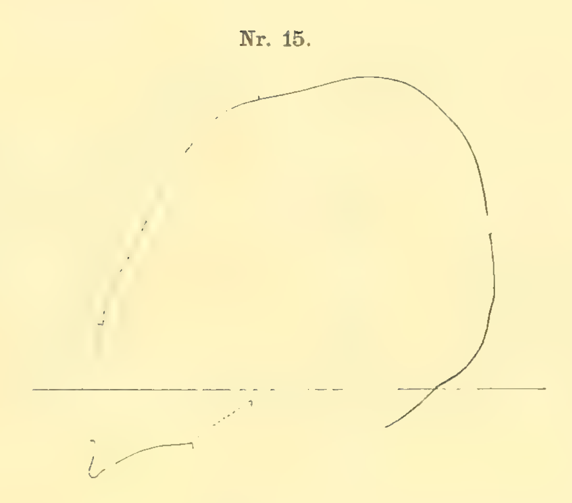


Fig. 15.

Ziemlich zerbrochener, erwachsener, wahrscheinlich weiblicher Schädel. Oxycephalus; starke Koronalrinne, die aber das vordere Ende der Sagittalnaht uneingedrückt läßt. Die Rinne setzt sich gut daumenbreit bis etwa zur Mitte der Koronalnaht fort, wendet sich dann in einem schwachen Schenkel nach vorwärts und unten, in einem besser ausgeprägten nach rückwärts, umgreift die untere Partie der Scheitelbeine und läßt sich bis auf die Oberschuppe des Hinterhauptbeins verfolgen, die Kontouren der Norma occipitalis konkav einbuchtend. Der Schädel ist auch occipital durch Druck stark deformiert, wodurch sowohl die Oberschuppe des Hinterhauptbeins als die Unterschuppe in der Norma occipitalis erscheinen; diese occipitale Druckfläche setzt sich gut zwei Finger breit über die Spitze der Lambdanaht hinaus auf die angrenzenden Teile der Scheitelbeine fort. Durch diese kombinierten Druckwirkungen wird der Scheitel konvex in die Höhe gewölbt. Die beiden Frontaldruckflächen erstrecken sich in ziemlich gleichmäßiger Weise fast über das ganze Stirnbein, die Stirnbeinhöcker bis fast zur Unkenntlichkeit eindrückend; auch hier bleibt die obere Koronalrandpartie etwa in Fingerbreite vom Druck frei; ebenso läßt sich ein schwach angedeutetes Stirnbeindreieck und ein schwacher Mittelgrat nachweisen.

Die Nähte sind alle offen und normal; nur in der Lambdanaht befinden sich Reste kleiner Schaltknochen. Der Schädelgrund ist zerbrochen; die processi mastoidei sind klein.

Der Schädel ist mit einem Längenbreiten-Index von 83,88 brachycephal. Längenhöhen-Index 90,13, hypsicephal. Die Kapazität beträgt — ccm, der Horizontalumfang 478 mm (der ganze Sagittalbogen 345? mm).

Der Profilwinkel beträgt 83° = orthognath an der Grenze der Prognathie. Das Gesicht ist breit und niedrig, Index von 50,00 (nicht genau zu messen) mesoprosop; fossa canina flach, Wangenbeine angelegt, Jochbogen etwas ausladend; Alveolarrand kurz. Nase breit und kurz, Index 53,06 = platyrrhin, Nasendach zerbrochen, breit und flach. Unterer Rand der Apertura piriformis breit abgerundet. Augenhöhlen weit und nach unten ausgerundet, der obere Rand gerade verlaufend (Index 100,00 = hypsiconch), wodurch eine gewissermaßen birnförmige Öffnung entsteht, mit der Spitze im oberen, inneren Augenwinkel. Augenbrauenbogen

sehr schwach, auch schwacher Stirnnasenwulst, an welchen die Stirnabplattung noch heranreicht. Ohröffnung oval. Gaumen kurz und wenig tief. Die Zähne waren während des Lebens alle vorhanden, auch die drei Molaren; die vorhandenen sind schwach abgekaut. Lebensalter etwa 25 bis 30 Jahre. Das Gesicht steht deutlich schief zum Hirnschädel, die linke Seite ist etwas vorgebuchtet.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	152 mm	Obergesichtshöhe	61
„ Breite	127,5	Jochbreite	—
Gerade Höhe	137	Gesichtshöhe (Virchows)	94
Ohrhöhe	120	Augenhöhlen-Höhe	35
Horizontale Länge des Hinterhaupts		„ -Breite	35
Basilare Länge des Vorderhaupts	—	Nasen-Höhe	49
Horizontalumfang	478	„ -Breite	26
Sagittalumfang des Stirnbeins	113	Gaumen-Länge	(40)
„ der Scheitelbeine	(123)	„ -Breite	(35)
„ „ Hinterhauptsschuppe	(109?)	Gesichtswinkel	83°
Ganzer Sagittalbogen	(345?)		
Kleinste Stirnbreite	86		
Länge der Schädelbasis	—		
Breite „ „	(105)		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	83,88	Obergesichts-Index	50,00 (64, 98)
Längenhöhen-Index	90,13	Augenhöhlen-Index	100,00
Ohrhöhen-Index	79,47	Nasen-Index	53,06
Hinterhaupts-Index	—	Gaumen-Index	(87,50)

Allgemeine Analyse:

♀?, brachy-, hypsicephal, mesoprosop (chamaeprosop), hypsiconch, platyrrhin, brachystaphylin, orthognath.

Nr. 16.

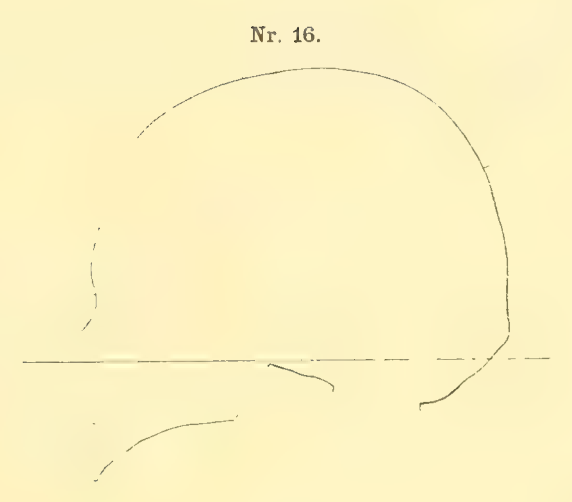


Fig. 16.

Älterer männlicher Schädel mit Unterkiefer. Die Deformation vorwiegend occipital. Jederseits eine breite Abflachung der Scheitelbeine über der oberen Schläfenlinie, wodurch der Scheitel eine dachförmige Gestalt erhält. Vom vorderen Drittel der Sagittalnaht an zieht sich eine flache Eintiefung bis zum Hinterhauptshöcker hinab; an der Lambdaspitze zweigen von ihr zwei weitere flachere Rinnen ab, die der genannten Naht bis zu ihrem Ende folgen. Das ganze Hinterhaupt ist abgeplattet, wodurch der Schädel verkürzt und in seiner hinteren Hälfte verbreitert wird. Oberhalb des Torus occipitalis läuft eine schwache rinnenartige Eintiefung, die auch schwach auf die hinteren unteren Ecken der Scheitelbeine übergreift. Die Seitenpartien des Schädels fallen steil ab und sind durch eine gut markierte Kante entlang der Schläfenlinien von der Scheitelabflachung geschieden. In der Mitte des oberen Teiles des Stirnbeins zeigt sich eine erkrankte Stelle der äußeren Glastafel. An mehreren Stellen ist das Schädeldach zum Teil wohl krankhaft durchbrochen, auch die innere Glastafel ist zerstört und das ganze Schädeldach ist so verdünnt, daß sicher die Einsenkung großenteils als pathologische, vielleicht zum Teil auch Alterserscheinung, zu deuten ist.

Die Nähte sind großenteils verwachsen und teilweise schon verstrichen. Am linken unteren Ende der Lambdanaht befindet sich ein größerer Schaltknochen. Sphenobasilarfuge verwachsen; processi mastoidei breit und kräftig. Pars basilaris des Hinterhauptbeins breit. Ein mäßig starker Torus occipitalis; Augenbrauenbogen nur in ihrer inneren Hälfte besser entwickelt.

Der Schädel ist hyperbrachycephal, Index 91,36. Längenhöhen-Index 86,42 hypsicephal. Die Kapazität beträgt — ccm; der Horizontalumfang 498 mm, der ganze Sagittalbogen 339 mm.

Der Profilwinkel beträgt 85° trotz der starken Alveolarprognathie; der Schädel ist sonach orthognath. Das Gesicht erscheint mäßig breit und ziemlich flach, der Index ist 55,15 leptoprosop; fossa canina sehr seicht. Wangenbeine und Jochbogen schwach ausladend. Nase lang und breit, Index 51,85 platyrrhin, unterer Rand gerundet. Nasenbeine ziemlich groß und breit, schön gewölbtes Nasendach, aquilin. Augenhöhlen ziemlich weit und hoch, Index 83,33 mesoconch. Ohröffnungen oval. Gaumen senil, seicht, Index 81,04 mesostaphylin, vorne rauh. Der Alveolarfortsatz, der für Schneide- und Eckzähne noch gut erhalten ist, ist ziemlich lang und stark prognath. Von den Zähnen des Oberkiefers waren während des Lebens noch erhalten: Die vier Schneidezähne und die zwei Eckzähne, die Prämolaren waren schon während des

Lebens schlecht, die Molaren, deren Alveolarfortsatz beiderseits ganz usuriert ist, haben wohl schon alle gefehlt.

Unterkiefer: Körper mittelhoch, Kinn kräftig, Äste niedrig, breit und steil gestellt. Von den Zähnen waren während des Lebens erhalten: Die beiden Schneidezähne links. Der äußere nur als kariöse Wurzel; dann beide Eckzähne, links der erste, rechts beide Prämolaren, beiderseits die zwei dritten Molare. Die eigentümliche Zerstörung der noch erhaltenen Partien des Alveolarfortsatzes der Oberkiefer wird sich wohl aus kariöser Zahnerkrankung der Prämolaren eventuell ersten Molaren erklären.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	109 mm
Größte horizontale Länge	162 mm	Obergesichtshöhe	75
„ Breite	148	Jochbreite	136
Gerade Höhe	140	Gesichtsbreite (Virchows)	105
Ohrhöhe	117	Augenhöhlen-Höhe	35
Horizontale Länge des Hinterhaupts	86	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	76	Nasen-Höhe	54
Horizontalumfang	498	„ -Breite	28
Sagittalumfang des Stirnbeins	113	Gaumen-Länge	58
„ der Scheitelbeine	111	„ -Breite	47
„ „ Hinterhauptsschuppe	115	Gesichtswinkel	85°
Ganzer Sagittalbogen	339		
Kleinste Stirnbreite	96		
Länge der Schädelbasis	97		
Breite „ „	106		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	91,36	Obergesichts-Index	55.15 (71, 43)
Längenhöhen-Index	86.42	Augenhöhlen-Index	83,33
Ohrhöhen-Index	72.22	Nasen-Index	51.85
Hinterhaupts-Index	53,08	Gaumen-Index	81,04

Allgemeine Analyse:

♂, hyperbrachycephal, hypsicephal, orthognath, leptoprosop, platyrrhin, mesoconch, mesostaphylin, prognath.



Nr. 17. Pachacamác.

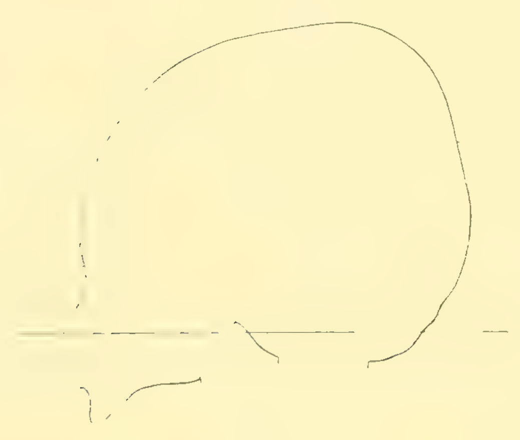


Fig. 17.

Kindlicher Schädel ohne Unterkiefer. Die occipitale Deformation stark ausgebildet. Koronalrinne seicht, flach und breit; eine Fortsetzung nach hinten und unten läßt sich nicht erkennen. Auf dem Stirnbein zwei durch einen daumenbreiten, wenig vorspringenden Mittelgrat getrennte, gut ausgebildete Druckflächen, welche die Stirnhöcker uneingedrückt lassen, ebenso vor der Koronalnaht einen gut fingerbreiten niedrigen Stirnwulst. Die occipitale Abplattung umfaßt nahezu die ganze Oberschuppe und die angrenzenden Partien der Scheitelbeine bis 4 cm oberhalb der Lambdanahtspitze, wo die Hinterhauptsabflachung durch einen deutlichen Knick vom Scheitel getrennt ist. Auf beiden Seiten sind die Partien um die untere Hälfte der Lambdanaht konkav eingedrückt. Durch die Occipitaldeformationen wird der Schädel stark verkürzt und sein Hinterhaupt verbreitert.

Nähte und Sphenobasilarfuge offen; am unteren Ende der Lambdanaht rechts und links kleine Schaltknochen. Zitzenfortsätze klein, kindlich; Kondylen langgestreckt. Der Schädel hat seinem Vorbesitzer zu ärztlichen Trepanationsversuchen gedient, daher rührt im hinteren Teil des rechten Scheitelbeins ein kreisrundes scharf begrenztes Loch von $1^1/_2$ cm Durchmesser, ebenso ein langer Knochendefekt senkrecht zur Mitte des rechten Schenkels der Lambdanaht.

Der Schädel ist hyperbrachycephal, Länge und Breite sind gleich, Index = 100,00. Längenhöhen-Index 91,39, hypsicephal. Die Kapazität beträgt — ccm, der Horizontalumfang 485 mm, der ganze Sagittalbogen 359 mm.

Profilwinkel 88°, orthognath. Das Gesicht erscheint ziemlich schmal, Index 48,82 = mesoprosop bzw. chamaeprosop, gut profiliert, fossa canina auffallend tief; Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Nase hoch und sehr schmal, Index 45,62 = leptorhin; der Unterrand der Apertura piriformis scharf, Nasenstachel kräftig; Nasendach ziemlich hoch, obwohl die Nasenbeine oben schmal sind, Augenbrauenbogen fast fehlend. Augenhöhlen weit gerundet, stark schiefgestellt, Index 94,81 = hypsiconch. Ohröffnungen oval, klein. Gaumen tief und kurz, Index 97,68 = brachystaphylin. Alveolarrand ziemlich lang. Die Milchzähne waren im Leben noch alle erhalten, vom Dauergebiß sind erst die beiden rechten Molaren vorhanden, schwach abgekaut. Lebensdauer ca. 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

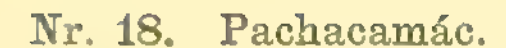
Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	151 mm	Obergesichtshöhe	62
„ Breite	151	Jochbreite	127
Gerade Höhe	138	Gesichtsbreite (Virchows)	89
Ohrhöhe	117	Augenhöhlen-Höhe	37,5
Horizontale Länge des Hinterhaupts	87	„ -Breite	38,5
Basilare Länge des Vorderhaupts	58	Nasen-Höhe	48
Horizontalumfang	485	„ -Breite	21
Sagittalumfang des Stirnbeins	124	Gaumen-Länge	43
„ der Scheitelbeine	117	„ -Breite	42
„ „ Hinterhauptsschuppe	118	Gesichtswinkel	88°
Ganzer Sagittalbogen	359		
Kleinste Stirnbreite	94		
Länge der Schädelbasis	83		
Breite der Schädelbasis	100		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	100,00	Obergesichts-Index	48,82 (69, 66)
Längenhöhen-Index	91,39	Augenhöhlen-Index	94,81
Ohrhöhen-Index	77,48	Nasen-Index	45,62
Hinterhaupts-Index	57,61	Gaumen-Index	97,68

Allgemeine Analyse:

hyperbrachycephal, hypsicephal, orthognath, mesoprosop (bzw. chamaeprosop), leptorhin, hypsiconch, brachystaphylin.



Nr. 18. Pachacamác.

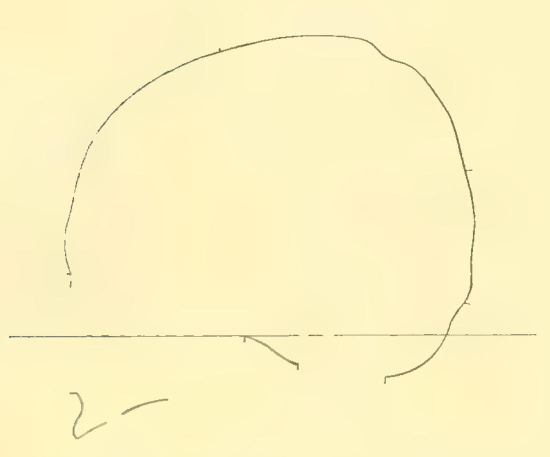


Fig. 18.

Schwerer, männlicher Schädel, erwachsenen Alters, ohne Unterkiefer. Hauptsächlich occipitale Deformation. Schwache Abplattung, die von dem Stirnbeinrand aus jederseits auf die obere Hälfte der Scheitelbeine übergeht. Jederseits gehen konkave Druckflächen von der unteren Ecke der Scheitelbeine auf die Hinterhauptsschuppe über. Vom hinteren Drittel der Sagittalnaht an erstreckt sich eine rinnenartige Einziehung bis zu dem in der Mitte eingebogenen Torus occipitalis über diesen eine pathologisch rundliche Einsenkung, deren Durchmesser ca. 2 zu 3 cm. Lambdanaht etwas eingezogen. Die occipitale Deformation erstreckt sich von der Oberschuppe des Hinterhauptbeins auf die angrenzenden Partien der Scheitelbeine. Durch die Abplattung ist der Schädel verkürzt und verbreitert. Die occipitale Abflachung ist etwas schief, so daß die rechte Seite mehr vorspringt. Am Beginne der zweiten Hälfte der Sagittalnaht befindet sich eine rundliche Grube, Durchmesser ca. 2 cm, pathologisch.

Die Nähte sind mit Ausnahme der Sagittalnaht in der Gegend der letzterwähnten Grube offen. Im unteren Teil der Lambdanaht rechts und links je ein kleiner Wormsscher Knochen. Die Sphenobasilarfuge war verwachsen, zerbrochen. Zitzenfortsätze klein, gerundet.

Der Schädel ist hyperbrachycephal, Index 95,96, Längenhöhen-Index 87,36 hypsicephal. Die Kapazität beträgt — ccm; der Horizontalumfang 510 mm, der ganze Sagittalbogen 340 mm.

Profilwinkel 82° (?) an der Grenze der Prognathie. Das Gesicht ist ziemlich hoch, Index 52,27 leptoprosop. Fossa canina seicht; Wangenbeine und Jochbogen ziemlich angelegt. Nase ziemlich groß, aber breit, Index 54,35 platyrrhin. Nasenbeine an der Wurzel schmal und eingezogen, dann vorspringend, abgebrochen. Augenhöhlen weit und hoch, Index 87,82 hypsiconch. Ohröffnungen oval. Gaumen tief. Alveolarrand ziemlich lang, prognath. Die Zähne waren während des Lebens alle erhalten. Der erste Molar war kariös, auf der rechten Seite fehlt der dritte Molar, vielleicht ist er niemals entwickelt gewesen.

Alter vielleicht 30 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	161,5 mm	Obergesichtshöhe	69
„ Breite	155	Jochbreite	132
Gerade Höhe	141	Gesichtsbreite (Virchows)	94
Ohrhöhe	116	Augenhöhlen-Höhe	36
Horizontale Länge des Hinterhaupt	89	„ -Breite	41
Basilare Länge des Vorderhaupts	70	Nasen-Höhe	46
Horizontalumfang	510	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	117	Gaumen-Länge	—
„ der Scheitelbeine	122	„ -Breite	—
„ „ Hinterhauptsschuppe	101	Gesichtswinkel	(82°)
Ganzer Sagittalbogen	340		
Kleinste Stirnbreite	91		
Länge der Schädelbasis	94,5		
Breite „ „	(108)		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	95,96	Obergesichts-Index	52,27 (73, 51)
Längenhöhen-Index	87,36	Augenhöhlen-Index	87,82
Ohrhöhen-Index	73,06	Nasen-Index	54,35
Hinterhaupts-Index	54,46	Gaumen-Index	—

Allgemeine Analyse:

♂, hyperbrachycephal, hypsicephal, leptoprosop, platyrrhin, hypsiconch, prognath.

Nr. 19.

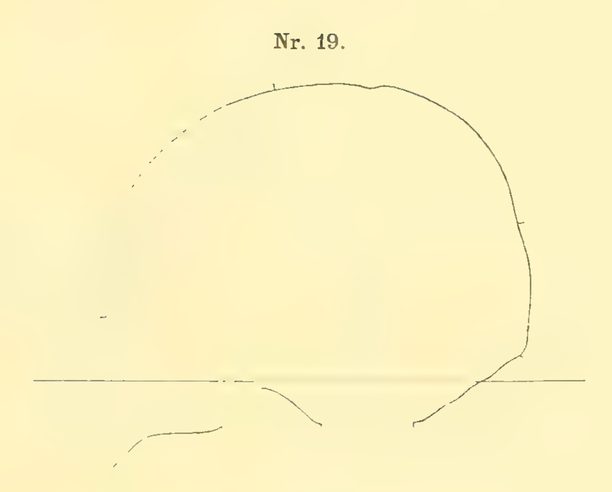


Fig. 19.

Männlicher Schädel mit Unterkiefer. Deformation occipital, schief, d. h. die rechte Seite des Hinterhaupts ist weit mehr verdrückt. Die normale Schädelform scheint in ihrer Gesamtheit durch die Deformation wenig, links so gut wie gar nicht verändert. Koronalrinne und Stirnabflachung ganz minimal. Über dem hinteren unteren Winkel des rechten Scheitelbeins geht eine gut zwei Finger breite, flache Eintiefung, die noch etwas über die Lambdanaht übergreift. Die occipitale Abplattung betrifft die Oberschuppe des Hinterhauptbeins und die oberen hinteren Ecken der beiden Scheitelbeine.

Torus occipitalis; die Muskelansätze sind stark ausgebildet. Die Nähte sind offen mit Ausnahme der Pfeilnaht, welche fast vollkommen verstrichen ist. Als Ursache der vorzeitigen Verwachsung derselben erscheint ein pathologischer Prozeß, als dessen Überbleibsel am Ende des ersten Drittels der Pfeilnaht eine rundliche Grube von ca. 1 cm Durchmesser erscheint, in deren Tiefe die Spongiosa freigelegt ist. In der Lambdanaht sind einige kleine Schaltknochen. Sphenobasilarfuge verknöchert. Am vorderen Rande des Foramen magnum eine Gelenkfläche für den Zahnfortsatz des Epistrophäus; ihre Oberfläche ist nicht glatt. Processus mastoidei mäßig groß und breit.

Der Schädel ist brachycephal, Längenbreiten-Index 83,33; Längenhöhen-Index 85,12 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1325 ccm. Der Horizontalumfang 496 mm, der ganze Sagittalbogen 348 mm.

Der Profilwinkel 82° stellt den Schädel an die Grenze der Orthognathie. Das Gesicht ist ziemlich breit, Index 49,25 chamäprosop bzw. mesoprosop; Fossa canina mäßig tief, Wangenbeine und Jochbogen etwas ausladend. Die Nase ist lang und ziemlich schmal, Index 46,00 leptorrhin. Am unteren Rande der Apertura piriformis Pränasalgruben; das Nasendach gut gewölbt. Augenhöhlen weit und groß, Index 87,18 hypsoconch. Augenbrauenbogen mäßig entwickelt. Ohröffnungen oval. Gaumen tief, breit, mäßig lang, Index 78,43 leptostaphylin. Während des Lebens waren alle Zähne vorhanden; die Molaren sind noch wenig abgekaut.

Unterkiefer etwas schief, rechte Seite zurücktretend. Kinn gut entwickelt; Äste steil. Von den Zähnen war während des Lebens keiner verloren gegangen, rechts ist der dritte Molar vorhanden, aber noch kaum abgekaut, links ist er noch nicht herausgetreten.

Lebensalter zwischen 20 und 30 Jahren.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1325 ccm	Ganze Gesichtshöhe	109 mm
Größte horizontale Länge	168 mm	Obergesichtshöhe	66
„ Breite	140	Jochbreite	134
Gerade Höhe	143	Gesichtsbreite (Virchows)	98
Ohrhöhe	112	Augenhöhlen-Höhe	34
Horizontale Länge des Hinterhaupts	106	„ -Breite	39
Basilare Länge des Vorderhaupts	69	Nasen-Höhe	50
Horizontalumfang	496	„ -Breite	23
Sagittalumfang des Stirnbeins	122	Gaumen-Länge	51
„ der Scheitelbeine	122	„ -Breite	40
„ „ Hinterhauptsschuppe	104	Gesichtswinkel	82°
Ganzer Sagittalbogen	348		
Kleinste Stirnbreite	86		
Länge der Schädelbasis	96		
Breite „ „	109		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	83,33	Obergesichts-Index	49,25 (67,35)
Längenhöhen-Index	85,12	Augenhöhlen-Index	87,18
Ohrhöhen-Index	68,29	Nasen-Index	46,00
Hinterhaupts-Index	64,63	Gaumen-Index	78,43

Allgemeine Analyse:

♂, brachycephal, hypsicephal, chamaeprosop (mesoprosop), hypsiconch, leptorrhin, leptostaphylin, prognath, fast orthognath.

Nr. 20.

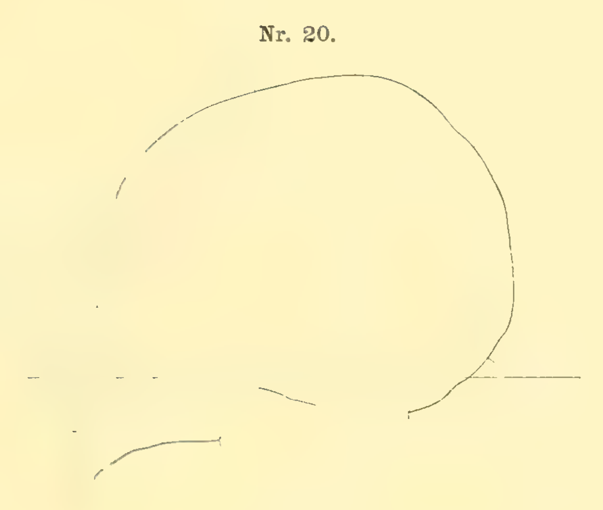


Fig. 20.

Massiver, männlicher Schädel mit Unterkiefer. Stark occipital schief, vorwiegend links abgeplattet. Koronalrinne sehr schwach. Auf dem Stirnbein zeigt sich auf den mittleren Partien beiderseits nur eine ganz schwache Druckfläche, die die Stirnhöcker unberührt läßt. Eine gut zwei Finger breite Abflachung geht über die unteren hinteren Partien der beiden Scheitelbeine gegen das Hinterhaupt zu und ist besonders links stark ausgebildet. Die occipitale Abplattung betrifft die ganze Oberschuppe, welche dadurch steil aufgerichtet ist, und erstreckt sich dann weit auf die Scheitelbeine, mehr als ein Drittel der Pfeilnaht einbeziehend. Rechts sind sowohl die Oberschuppe als die Scheitelbeine in etwas geringerer Breite verdrückt.

Die Nähte sind alle offen; in der linken Lambdanaht befindet sich ein kleiner Wormsscher Knochen. Sphenobasilarfuge verknöchert; zwischen der Pars basilaris des Hinterhauptbeins und dem Keilbeinkörper zeigt sich eine einspringende Rinne, als wäre die erstere gegen das Keilbein abgedrückt, vielleicht als Folge eines occipitalen Druckes. Processi mastoidei ziemlich groß und stark.

Der Schädel ist brachycephal, Längenbreiten-Index 83,03, Längenhöhen-Index 83,64 = hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1170 ccm, der Horizontalumfang 489 mm, der ganze Sagittalbogen 340 mm.

Profilwinkel 79° = prognath. Das Gesicht ist hoch, erscheint aber relativ breit, Index 52,21 = leptoprosop; Fossa canina mäßig tief; Wangenbeine angelegt, nach unten etwas ausladend, Jochbogen schwach vortretend. Nase lang und ziemlich schmal, Index 48,08 = mesorrhin, mit abgerundetem, breitem unteren Rande der Apertura piriformis einen wahren Clivus nasalis bildend; vorderer Nasenstachel gut entwickelt; Nasendach gut gewölbt, nach vorwärts aquilin vorspringend, die Nasenbeine ziemlich breit. Augenhöhlen weit, aber etwas mehr eckig, Index 84,52 = mesoconch. Augenbrauenbogen in ihren inneren Partien gut entwickelt. Ohröffnung rundlich-oval. Gaumen tief, oval, Index 76,78 = leptostaphylin. Die Zähne, namentlich die Schneidezähne, auffallend klein; der rechte mittlere Schneidezahn kariös(?). Die Zähne waren während des Lebens alle vorhanden und erhalten, die dritten Molaren noch nicht abgerieben.

Unterkiefer: Körper ziemlich hoch; das Kinn gut ausgebildet; die Äste breit und steil. Die dritten Molaren waren noch nicht erschienen. Lebensalter annähernd 20 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

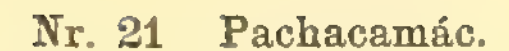
Kapazität	1170 ccm	Ganze Gesichtshöhe	111 mm
Größte horizontale Länge	165 mm	Obergesichtshöhe	71
„ Breite	137	Jochbreite	136
Gerade Höhe	138	Gesichtsbreite (Virchows)	108
Ohrhöhe	118	Augenhöhlen-Höhe	35,5
Horizontale Länge des Hinterhaupts	99	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	72	Nasen-Höhe	52
Horizontalumfang	489	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	115	Gaumen-Länge	56
„ der Scheitelbeine	110	„ -Breite	43
„ „ Hinterhauptsschuppe	115	Gesichtswinkel	79°
Ganzer Sagittalbogen	340		
Kleinste Stirnbreite	93		
Länge der Schädelbasis	94		
Breite „ „	109		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	83,03	Obergesichts-Index	52,21 (65,74)
Längenhöhen-Index	83,64	Augenhöhlen-Index	84,52
Ohrhöhen-Index	71,52	Nasen-Index	48,08
Hinterhaupts-Index	60,00	Gaumen-Index	76,78

Allgemeine Analyse:

♂, brachycephal, hypsicephal, leptoprosop (mesoprosop), mesoconch, mesorrhin, leptostaphylin, prognath.



Nr. 21 Pachacamác.

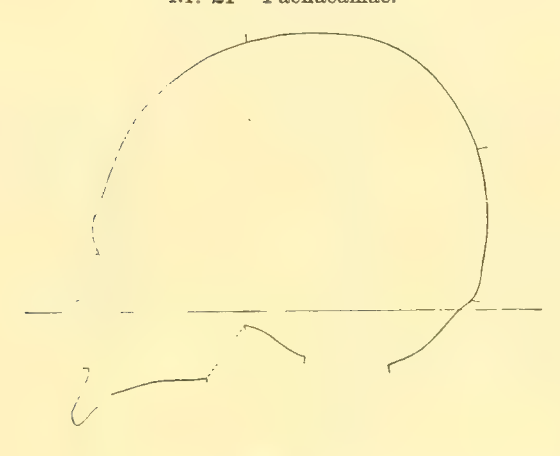


Fig. 21.

Männlicher Schädel erwachsenen Alters mit Unterkiefer. Schädeldach dünn, an vielen Stellen stärker durchscheinend. Vorwiegend occipitale Deformation. Schwache Koronalrinne, die, wie das gewöhnlich der Fall ist, das vordere Ende der Sagittalnaht freiläßt. Eine geringe, beiderseitige Abflachung der Stirnbeinwölbungen. Das zweite Drittel der Sagittalnaht etwas schwächer, die Lambdanaht etwas stärker eingezogen. Über die hinteren unteren Ecken der Scheitelbeine verläuft eine ca. zwei Finger breite flache Eintiefung, die sich als schmale, seichte Rinne über den mäßig starken Torus occipitalis mit der Eintiefung der anderen Seite verbindet.

Die Nähte sind alle offen; in der Lambdanaht befinden sich eine Anzahl Wormsscher Knochen; Sphenobasilarfuge verwachsen. Augenbrauenbogen in ihren inneren Abschnitten gut ausgebildet.

Der Schädel ist hyperbrachycephal, Index 91,61, Längenhöhen-Index 87,09 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1170 ccm, der Horizontalumfang 488 mm, der ganze Sagittalbogen 340 mm.

Profilwinkel 80°, prognath mit vorwiegend alveolarer Prognathie. Das Gesicht erscheint relativ breit, Index 49,04 meso- bzw. chamaeprosop. Fossa canina ziemlich flach. Wangenbeine ausladend, Jochbogen angelegt. Nase kurz und verhältnismäßig breit. Index 53,33 platyrrhin; unterer Nasenrand abgerundet; Nasendach verhältnismäßig gut gewölbt, schwach aquilin. Augenhöhlen mehr eckig als gerundet, niedrig, Index 78,57 chamaeconch. Ohröffnungen oval. Gaumen tief und lang, Index 76,36 leptostaphylin. Alveolarrand, wie gesagt, ausgesprochen prognath. Die Zähne waren während des Lebens alle erhalten und schon etwas abgekaut.

Unterkiefer: Körper niedrig, Kinn gut entwickelt, Äste breit und steil. Von den Zähnen war während des Lebens der rechte dritte Molar zu Verlust gegangen; der erste Molar links ist etwas kariös. Der dritte Molar links steckt schief (nach innen gerichtet) im Kiefer. Lebensalter etwa 30 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1170 ccm	Ganze Gesichtshöhe	109 mm
Größte horizontale Länge	155 mm	Obergesichtshöhe	64
„ Breite	142	Jochbreite	130.5
Gerade Höhe	135	Gesichtsbreite (Virchows)	107
Ohrhöhe	114	Augenhöhlen-Höhe	33
Horizontale Länge des Hinterhaupts	90	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	71	Nasen-Höhe	45
Horizontalumfang	488	„ -Breite	24
Sagittalumfang des Stirnbeins	110	Gaumen-Länge	55
„ der Scheitelbeine	113	„ -Breite	42
„ „ Hinterhauptsschuppe	117	Gesichtswinkel	80°
Ganzer Sagittalbogen	340		
Kleinste Stirnbreite	93		
Länge der Schädelbasis	88		
Breite „ „	100		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	91,61	Obergesichts-Index	49,04 (59,81)
Längenhöhen-Index	87,09	Augenhöhlen-Index	78,57
Ohrhöhen-Index	73,55	Nasen-Index	53,33
Hinterhaupts-Index	58,07	Gaumen-Index	76,36

Allgemeine Analyse:

♂, hyperbrachycephal, hypsicephal, prognath, meso- bzw. chamaeprosop, platyrrhin, chamaeconch, leptostaphylin.

Nr. 22. Pachacamác.



Fig. 22.

Ziemlich schwerer, männlicher Schädel ohne Unterkiefer mittleren Alters. Deformation vorwiegend occipital. Flache breite Koronalrinne, die beiderseits nicht bis zur Sagittalnaht reicht. Beiderseits schwache Abplattung des Stirnbeins, die Stirnhöcker berührend, die oberen und sagittalen Partien des Stirnbeins wie gewöhnlich freilassend. Über die hinteren und unteren Winkel der Scheitelbeine ziehen sich je gut zwei Finger breite Abflachungen gegen die Lambdanaht, diese etwas überschreitend. Die Hinterhauptsabplattung erstreckt sich in breiter Fläche fast auf die ganze Oberschuppe des Hinterhauptbeins und die anliegenden Scheitelpartien. Schwache sagittale Eintiefung gegen den gut entwickelten Torus occipitalis. Der Scheitel erscheint durch eine die oberen vorderen Teile der Scheitelbeine umfassende Abflachung etwas erniedrigt.

Die Nähte sind fast alle offen; rechts vollkommen, links fast vollkommen trennende Schaltknochen der Schläfenfontanelle. Sphenobasilarfuge verwachsen; Zitzenfortsätze schmal und ziemlich klein. Eine rundliche kleine Exostose zeigt sich an der Knickstelle des linken Scheitelbeins gegen die occipitale Deformationsfläche.

Der Schädel ist hyperbrachycephal. Längenbreiten-Index 95,30, Längenhöhen-Index 86,58 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1125 ccm, der Horizontalumfang 480 mm, der ganze Sagittalbogen 338 mm.

Der Schädel ist prognath, Profilwinkel 78°. Das Gesicht erscheint ziemlich breit, Index 49,23 meso- bzw. chamaeprosop. Fossa canina mit mittlerer rinnenförmiger Vertiefung. Wangenbeine und Jochbogen wenig ausladend, Nasen-Index 52,83 platyrrhin mit scharfem unteren Rand der Apertura piriformis, Nasenstachel kräftig, Nasendach gut gewölbt, etwas zerbrochen, nach unten schwach aquilin vorspringend. Augenbrauenbogen schwach, Augenhöhlen weit, rundlich-viereckig, Index 81,25 mesoconch. Ohröffnungen rundlich. Gaumen tief und sich nach hinten stark verbreiternd, Index 92,31 brachystaphylin. Alveolarfortsatz mäßig lang und etwas prognath. Die Zähne waren während des Lebens alle erhalten und wenig abgekaut; der rechte erste Molar ist kariös.

Lebensalter zwischen 20 und 30 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1125 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	149 mm	Obergesichtshöhe	64
„ Breite	142	Jochbreite	130
Gerade Höhe	129	Gesichtsbreite (Virchows)	99
Ohrhöhe	108	Augenhöhlen-Höhe	32,5
Horizontale Länge des Hinterhaupts	88	„ -Breite	40
Basilare Länge des Vorderhaupts	69	Nasen-Höhe	48
Horizontalumfang	480	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	115	Gaumen-Länge	52
„ der Scheitelbeine	111	„ -Breite	48
„ „ Hinterhauptsschuppe	112	Gesichtswinkel	78°
Ganzer Sagittalbogen	338		
Kleinste Stirnbreite	89		
Länge der Schädelbasis	94		
Breite „ „	106		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	95,30	Obergesichts-Index	49,23 (64,65)
Längenhöhen-Index	86,58	Augenhöhlen-Index	81,25
Ohrhöhen-Index	72,48	Nasen-Index	52,83
Hinterhaupts-Index	59,06	Gaumen-Index	92,31

Allgemeine Analyse:

♂, hyperbrachycephal, hypsicephal, prognath, meso- bzw. chamaeprosop, platyrrhin, mesoconch, brachystaphylin.

Nr. 23.

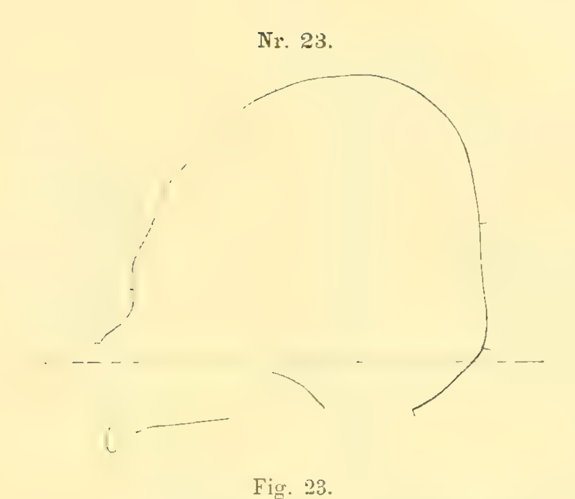


Fig. 23.

Kräftiger, männlicher Schädel vorgeschritteneren Alters, ohne Unterkiefer. Turmkopf mit vorwiegend occipitaler Abplattung, welche eine starke Verkürzung des Schädels bewirkt. Seichte Koronalrinne, welche eine ca. zwei Finger breite Partie der vorderen Sagittalnahtgegend freiläßt. Beiderseits geringe Abflachung des Stirnbeins bis zu den Stirnhöckern. Über die hinteren unteren Winkel der Scheitelbeine zieht sich eine gut drei Finger breite, konkave Abflachung auf die Lambdanaht und schwach auf die Oberschuppe des Hinterhauptbeins übergreifend. Die ganze Oberschuppe mit Ausnahme kleiner seitlicher Partien rechts und links, von dem Torus occipitalis an abgeplattet. Die Abplattung greift stark auf die angrenzenden Scheitelbeinpartien über. Die abgeplattete Partie ist etwa 9 cm hoch und 7 cm breit. Die Scheitelbeine sind durch die Deformation in ihren hinteren Abschnitten stark in die Höhe gewölbt.

Die Sagittalnaht ist teilweise in ihrem hinteren Abschnitt verwachsen, vielleicht als Folge des Druckes. Die übrigen Nähte sind offen. Im unteren Teil der Lambdanaht rechts kleiner Wormscher Knochen, in beiden Schläfenfontanellen je ein fast trennender Schaltknochen. Sphenobasilarfuge verwachsen. Zitzenfortsätze kräftig. Torus occipitalis gewissermaßen verdrückt. Sehr starke, fast neandertholoide Augenbrauenwülste.

Der Schädel ist hyperbrachycephal, Index 88,13. Längenhöhen-Index 93,13 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1300 ccm. Der Horizontalumfang 496 mm, der ganze Sagittalbogen 360 mm.

Der Profilwinkel beträgt 81°, schwache Prognathie. Das Gesicht erscheint breit, Index 50,37 meso- bzw. leptoprosop. Fossa canina ziemlich flach. Wangenbeine und Jochbogen grob, ausladend. Nase lang und breit, schwach platyrrhin, Index 51,88. Nasenstachel ziemlich lang. Nasenbeine zerbrochen, verwachsen, Nasendach stark gewölbt, aquilin vorspringend. Der Unterrand der Apertura piriformis stark abgeflacht gegen den Alveolarfortsatz in einer schiefen Fläche abfallend. Augenhöhlen viereckig, niedrig, Index 75,00 chamaeconch. Ohröffnungen oval. Gaumen ziemlich schmal und lang, Index 75,00 leptostaphylin, mit rauher Oberfläche. Alveolarfortsatz sehr kurz, großenteils zerbrochen, macht aber einen schon seneszierenden Eindruck. Die Zähne waren übrigens zum Teil während des Lebens noch erhalten.

Lebensalter nicht genau bestimmbar, jedenfalls über 40 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1300 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	160 mm	Obergesichtshöhe	67
„ Breite	141	Jochbreite	(133)
Gerade Höhe	149	Gesichtsbreite (Virchows)	101
Ohrhöhe	124	Augenhöhlen-Höhe	33
Horizontale Länge des Hinterhaupts	92	„ -Breite	44
Basilare Länge des Vorderhaupts	77	Nasen-Höhe	53
Horizontalumfang	496	„ -Breite	27,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	113	Gaumen-Länge	54
„ der Scheitelbeine	130	„ -Breite	40,5
„ „ Hinterhauptsschuppe	117	Gesichtswinkel	81°
Ganzer Sagittalbogen	360		
Kleinste Stirnbreite	92		
Länge der Schädelbasis	103		
Breite „ „	110		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	88,13	Obergesichts-Index	50,37 (66,34)
Längenhöhen-Index	93,13	Augenhöhlen-Index	75,00
Ohrhöhen-Index	77,50	Nasen-Index	51,88
Hinterhaupts-Index	57,50	Gaumen-Index	75,00

Allgemeine Analyse:

♂, hyperbrachycephal, hypsicephal, meso- bzw. leptoprosop, platyrrhin, chamaeconch, leptostaphylin, prognath.



Nr. 24. Pachacamác.

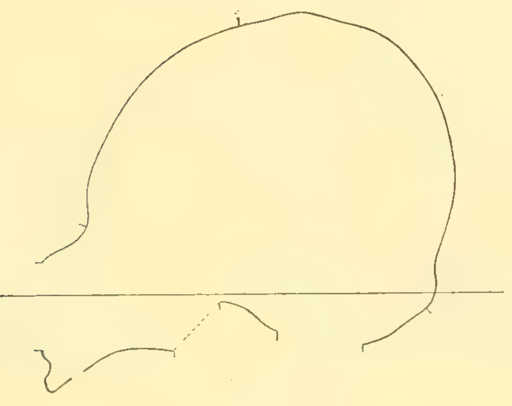


Fig. 24.

Wahrscheinlich männlicher Schädel höheren Alters, ohne Unterkiefer mit vorwiegend occipitaler Deformation. Schwache Koronalrinne in der Mitte über der Sagittalnaht nicht deutlich getrennt. Geringe beiderseitige Stirnabflachung. Über die hinteren unteren Ecken der Scheitelbeine verläuft wie gewöhnlich eine ca. drei Finger breite schwache konkave Abflachung, über die Lambdanaht übergreifend und sich als eine schwache Rinne über dem flachen Torus occipitalis fortsetzend. Die Abflachung des Hinterhaupts ist sehr bedeutend, sie betrifft den größten Teil von Ober- und Unterschuppe des Hinterhauptbeins und die oben angrenzenden Partien der Scheitelbeine. Der Schädel ist dadurch verkürzt. Die Abplattung deutlich schief. Die rechte Seite springt nach hinten etwas stärker vor. In der Mitte des linken Scheitelbeins und über die Protuberantia occipitalis externa befinden sich je eine rundliche kleine pathologische Eintiefung.

Die Nähte sind zum Teil verwachsen und teilweise verstrichen. Sphenobasilarfuge verknöchert. Processi mastoidei klein. Torus occipitalis flach. Augenbrauenbogen in den mittleren Partien gut ausgebildet.

Der Schädel ist extrem brachycephal, Index 101,38, die Breite übertrifft etwas die Länge. Längenhöhen-Index 95,17 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1130 ccm. Der Horizontalumfang 477 mm, der ganze Sagittalbogen 313 mm. Profilwinkel von 76°, ziemlich starke Prognathie. Das Gesicht erscheint ziemlich breit, Index 48,28 chamaeprosop; Fossa canina tief. Wangenbeine und Jochbogen schwach ausladend. Nase ziemlich lang und groß, Index 48,08 mesorrhin, unterer Rand der Apertura piriformis flach gerundet. Nasenstachel gut entwickelt. Nasendach gut gewölbt, schmal, stark aquilin vorspringend. Augenhöhlen weit und ziemlich hoch, Index 83,72 mesoconch. Ohröffnungen oval. Gaumen senil verändert, Index 78. Alveolarfortsatz für die Schneidezähne auffällig kurz. Von den Zähnen fehlten rechts die Molaren und Prämolaren, links der zweite und dritte Molar, der Alveolarfortsatz ist dementsprechend usuriert.

Lebensalter jedenfalls über 50 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1130 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	145 mm	Obergesichtshöhe	62
„ Breite	147	Jochbreite	128
Gerade Höhe	138	Gesichtsbreite (Virchows)	97
Ohrhöhe	112	Augenhöhlen-Höhe	36
Horizontale Länge des Hinterhaupts	86	„ -Breite	43
Basilare Länge des Vorderhaupts	70	Nasen-Höhe	52
Horizontalumfang	477	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	106	Gaumen-Länge	50
„ der Scheitelbeine	207	„ -Breite	39
„ „ Hinterhauptsschuppe	207	Gesichtswinkel	76°
Ganzer Sagittalbogen	313		
Kleinste Stirnbreite	92		
Länge der Schädelbasis	87		
Breite „ „	108		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	101,38	Obergesichts-Index	48,28 (63,92)
Längenhöhen-Index	95,17	Augenhöhlen-Index	83,72
Oberhöhen-Index	77,24	Nasen-Index	48,08
Hinterhaupts-Index	59,31	Gaumen-Index	78,00

Allgemeine Analyse:

♂ (?), Extrem-brachycephal, hypsicephal, prognath, chamaeprosop, mesorrhin, mesoconch, leptostaphylin.

Nr. 25

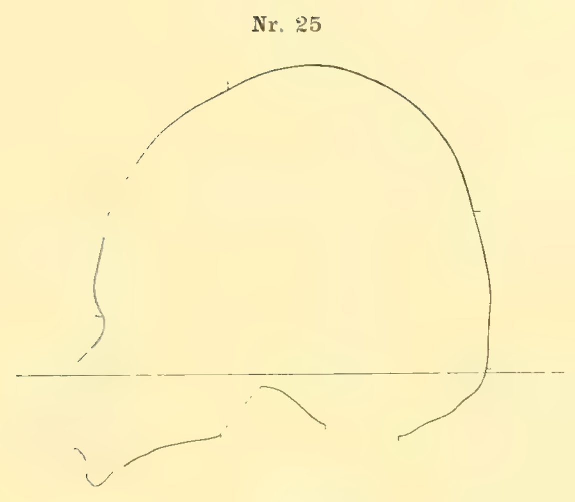


Fig. 25.

Männlicher Schädel höheren Lebensalters, ohne Unterkiefer, vorwiegend occipital deformiert. Schwache seitliche Koronalrinnen, welche die Partie in dem vorderen Ende der Sagittalnaht in fast zwei Fingerbreite unverändert lassen. Beiderseitige schwache Stirnabflachung, welche ein Stirnbeindreieck mit schwachem Mittelgrat unverändert läßt. Über die hinteren unteren Scheitelbeinecken verläuft eine gut zwei Finger breite, leicht konkave Abflachung, welche besonders deutlich links die Lambdanaht als seichte Rinne überschreitet. Die occipitale Abflachung erstreckt sich fast auf die ganze Oberschuppe und die obere Partie der Unterschuppe des Hinterhauptbeins und greift weit auf die hinteren oberen Ecken der Scheitelbeine über. Auf dem linken Scheitelbeinhöcker befindet sich eine seichte, daumenbreite, pathologische Einsenkung, auf dem rechten Scheitelbein, bei dem Foramen parietale, ziemlich tiefe, runde, zum Teil perforierende Grube mit Zeichen eines langdauernden Heilungsprozesses.

Die Nähte sind, mit Ausnahme der im Verstreichen begriffenen Sagittalnaht, offen. In der Lambdanaht sind viele größere und kleinere Wormsche Knochen. Auf dem Hinterhaupt sind die Reste der fötalen Hinterhauptsquernaht, rechts 25, links 20 mm, lang erhalten, als unvollkommenes Os incae. Die Sphenobasilarfuge ist verwachsen; die Processi mastoidei sind mäßig groß.

Der Schädel ist extrem brachycephal, Index 93,04, Längenhöhen-Index 98,10 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1215 ccm, der Horizontalumfang 494 mm, der ganze Sagittalbogen 353 mm.

Der Schädel ist ziemlich stark prognath, Profilwinkel 76°. Das Gesicht erscheint mäßig breit, Index 50,77 lepto- bzw. mesoprosop; Fossa canina seicht, Wangenbeine angelegt, Jochbogen schwach ausladend. Nase ziemlich lang, Index 48,08 mesoconch. Unterer Rand der Apertura piriformis flach abgerundet, Nasenstachel gut entwickelt. Nasendach schmal, gut gewölbt, etwas zerbrochen, aber wohl aquilin vorspringend. Augenhöhlen viereckig, ziemlich niedrig, Index 76,19 chamaeconch. Ohröffnungen eng, oval. Gaumen tief und lang, Index 75,55 leptostaphylin. Alveolarfortsatz kurz; von den links bedeutend stärker abgekauten Zähnen fehlten wahrscheinlich schon während des Lebens die drei Molaren, sowie links der erste Prämolar, rechts der Eckzahn und die beiden Prämolaren. Der linke Eckzahn ist bis auf den Hals abgekaut, aber gesund. Der erste Molar links kariös.

Lebensalter etwa 50 Jahre.

Das Gesicht ist gegen den Hirnschädel etwas schief gestellt, d. h. nach rechts geschoben, wahrscheinlich infolge der Unterkieferverhältnisse.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1215 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	158 mm	Obergesichtshöhe	66
„ Breite	147	Jochbreite	130
Gerade Höhe	155	Gesichtsbreite (Virchows)	99
Ohrhöhe	122	Augenhöhlen-Höhe	32
Horizontale Länge des Hinterhaupts	84	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	75	Nasen-Höhe	52
Horizontalumfang	494	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	110	Gaumen-Länge	55
„ der Scheitelbeine	129	„ -Breite	41,5
„ „ Hinterhauptsschuppe	114	Gesichtswinkel	76°
Ganzer Sagittalbogen	353		
Kleinste Stirnbreite	92		
Länge der Schädelbasis	98		
Breite „ „	108		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	93,04	Obergesichts-Index	50,77 (66,66)
Längenhöhen-Index	98,10	Augenhöhlen-Index	76,19
Ohrhöhen-Index	77,22	Nasen-Index	48,08
Hinterhaupts-Index	53,16	Gaumen-Index	75,55

Allgemeine Analyse:

♂, Ultra-brachycephal, hypsicephal, prognath, lepto- bzw. mesoprosop, mesorrhin, chamaeconch, leptostaphylin.



Nr. 26. Ancon.

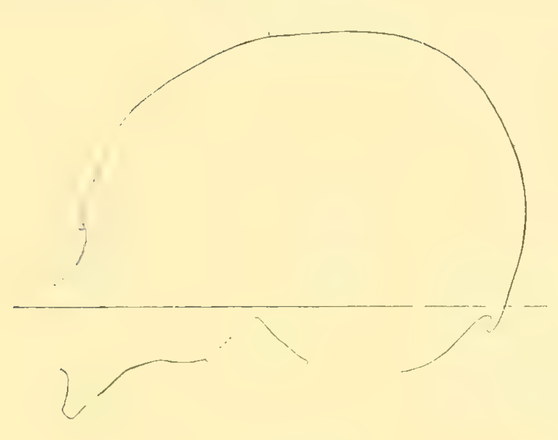


Fig. 26.

Kräftiger, männlicher Schädel mit Unterkiefer, von mittlerem Lebensalter, wenig deformiert. eigentlich nur occipital etwas abgeplattet. Schwache, seitliche Koronalrinnen, welche wie bei Schädel Nr. 25 die Partien um das vordere Ende der Sagittalnaht in fast zwei Fingerbreite unverändert läßt. Ganz schwache beiderseitige Stirnabflachung, welche, wie gewöhnlich, große Teile des Stirnbeins unverändert läßt als Stirnbeingrat, Stirnbeindreieck und Stirnbeinwulst. Dadurch bekommt der Scheitel eine flach dachförmige Gestalt. Die occipitale Abplattung, eine rundliche Fläche von ca. 5 cm Durchmesser, betrifft die Lambdanahtspitze der Oberschuppe des Hinterhauptbeins und greift auf die angrenzenden Scheitelbeinpartien über. Von den unteren hinteren Ecken der Scheitelbeine geht eine ganz schwache, gut zwei Finger breite Eintiefung über die Lambdanaht herüber. Schwacher Torus occipitalis, in der Mitte mit einem zapfenförmigen äußeren Hinterhauptshöcker, unter welchem sich die letztgenannten Eintiefungen als schwache Rinne vereinigen.

Die Sagittalnaht ist nahezu vollkommen verstrichen, die übrigen Schädelnähte sind offen. Die Sphenobasilarfuge ist verknöchert. Zitzenfortsätze stark und breit. Schwache rinnenförmige Stenokrotaphie.

Der Schädel ist stark brachycephal, Index 85,39 schon hyperbrachycephal. Längenhöhen-Index 81,18 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1265 ccm, der Horizontalumfang 518 mm. Der ganze Sagittalbogen 347 mm.

Profilwinkel 81°, sonach schwache Prognathie, vorwiegend durch den vorspringenden Alveolarfortsatz bewirkt. Das Gesicht ist kräftig profiliert und ziemlich breit, Index 51,49 meso- bzw. leptoprosop; Fossa canina mäßig tief, Wangenbeine ebenso wie die Jochbogen etwas ausladend. Nase groß, hoch und schmal, Index 44,64 leptorrhin. Am unteren Rand der Apertura piriformis zeigen sich schwache Pränasalgruben, Nasendach fein und hochgewölbt, nach unten stark aquilin vorspringend. Die Augenbrauenbogen in ihren mittleren Partien kräftig entwickelt, Augenhöhlen weit rundlich-viereckig, hoch, Index 92,50 hypsiconch. Ohröffnungen schmal oval, durch Exostose noch weiter verengt, hoch. Gaumen tief und lang, Index 74,14 leptostaphylin. Alveolarfortsatz ziemlich hoch, prognath. Von den Zähnen haben schon während

des Lebens gefehlt: rechts der zweite, links der erste und zweite Prämolar, rechts der zweite Molar an der Innenseite kariös, ebenso an der benachbarten vorderen Seite der dritte Molar, links ist der erste Molar an seiner hinteren Wand kariös, der zweite Molar war schon während des Lebens durch Wurzelentzündung mit Fisteldurchbruch zerstört, der dritte Molar hat auf der Kaufläche eine kariöse Öffnung.

Unterkiefer: Körper hoch, Kinn gut entwickelt, Äste steil und breit. Die Zähne waren während des Lebens alle erhalten, der dritte Molar rechts ist hohl, kariös, der zweite zeigt beginnende Karies. Der dritte Molar links zeigt wie der gegenüberstehende Zahn des Oberkiefers in der Mitte der Kaufläche eine kleine kariöse Öffnung.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1265 ccm	Ganze Gesichtshöhe	123 mm
Größte horizontale Länge	170 mm	Obergesichtshöhe	69
„ Breite	145	Jochbreite	137
Gerade Höhe	138	Gesichtsbreite (Virchows)	104
Ohrhöhe	111	Augenhöhlen-Höhe	37
Horizontale Länge des Hinterhaupts	100	„ -Breite	40
Basilare Länge des Vorderhaupts	80	Nasen-Höhe	56
Horizontalumfang	518	„ -Breite	25
Sagittalumfang des Stirnbeins	112	Gaumen-Länge	58
„ der Scheitelbeine	118	„ -Breite	43
„ „ Hinterhauptsschuppe	117	Gesichtswinkel	81°
Ganzer Sagittalbogen	347		
Kleinste Stirnbreite	99		
Länge der Schädelbasis	97		
Breite „ „	109		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	85,39	Obergesichts-Index	51,49 (66,34)
Längenhöhen-Index	81,18	Augenhöhlen-Index	92,50
Ohrhöhen-Index	65,29	Nasen-Index	44,64
Hinterhaupts-Index	58,82	Gaumen-Index	74,14

Allgemeine Analyse:

♂, hyperbrachycephal, hypsicephal, meso- bzw. leptoprosop, leptorrhin, hypsiconch, leptostaphylin, prognath.

Nr. 27.

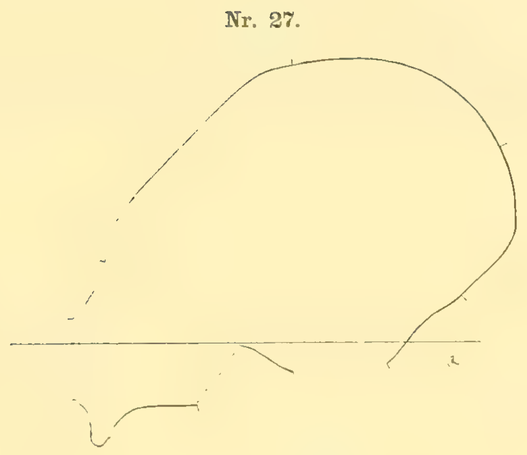


Fig. 27. Mit Tafel 2.

Schädel mittleren Alters mit Unterkiefer, wahrscheinlich weiblich; frontal-occipital stark deformiert. Schwache Andeutung seitlicher Koronalrinne. Das Stirnbein erscheint im ganzen stark flach, es zeigt sich aber wie bei den bisher beschriebenen Schädeln, die obere Partie gegen die Kranznaht in etwa zwei Finger Breite als Stirnwulst von der Deformation nicht betroffen, ebenso daran anschließend ein mittleres, etwa thalergroßes, deutlich umwalltes Stück an Stelle des sonst nachzuweisenden Stirnbeindreiecks und des Stirngrates, in der Mittelpartie zum Teil auch etwas abgeflacht. Seitlich davon erstreckt sich je eine rinnenförmige, stärkere, von dem Mittelstück durch einen deutlichen Wall abgegrenzte Abflachung, beiderseits bis an und zum Teil über die sehr schwach ausgebildeten, fast fehlenden Augenbrauenbogen. Die occipitale Hauptabflachung erstreckt sich nahezu auf die ganze Hinterhauptsschuppe, knapp zwei Finger breit von der Spitze der Lambdanaht beginnend bis zum Hinterrand des Foramen magnum. Ober- und Unterschuppe erscheinen in dieser Ausdehnung in eine Fläche gelegt, welche mit der Stirnfläche fast parallel läuft. Der Schädel erhält dadurch, auf das Hinterhaupt gelegt, eine eigentümlich flach-kuchenförmige Gestalt. Auch die obere Spitze des Hinterhauptbeins mit den angrenzenden Scheitelpartien zeigt eine von der erstbeschriebenen unabhängige, einen fast rechten Winkel mit dieser bildende, drei Finger breite Abflachung. Die hinteren, oberen Partien der Scheitelbeine sind seitlich stark ausgewölbt. An den hinteren, unteren Ecken der Scheitelbeine findet sich eine schwache, breite Abflachung, geringer, aber in der Lage den bei den vorausgehend beschriebenen Schädeln beobachteten Abflachungen der gleichen Stelle entsprechend; sie überschreitet aber, wie es scheint, die Lambdanaht nicht.

Die Nähte sind noch alle offen. Die Kranznaht in der Mitte wenig gezackt, fast schuppenartig. Sphenobasilarfuge verwachsen; Processi mastoidei mäßig groß. Die Schläfenschuppe rückt rechts und links nahe an das Stirnbein heran, auf 3—4 mm entsprechend der Virchowschen einfachen Schläfenenge; die großen Flügel des Keilbeins sind in ihren oberen, hinteren Ecken entsprechend beträchtlich verschmälert.

Der Schädel ist ultra-brachycephal, Index 93,04, Längenhöhen-Index 77,85, hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1130 ccm. Der Horizontalumfang 513 mm, der ganze Sagittalbogen 311 mm.

Der Profilwinkel beträgt 86° ausgesprochene Orthognathie. Das Gesicht erscheint relativ breit, Index 50,56 meso- bzw. leptoprosop; Fossa canina mäßig tief, Wangenbeine und Joch-

bogen ausladend. Nase hoch und im ganzen schmal, Index 44,23 leptorrhin. Nasenstachel kräftig, aber auffallend breit; Unterrand der Apertura piriformis scharf. Nasenbeine groß, Nasenwurzel breit, Nasendach flach gewölbt, nach unten vorspringend. Augenhöhlen weit rundlich, Index 91,67 hypsiconch. Ohröffnung schlitzförmig, Gaumen tief und kurz, Index 100,00. Alveolarfortsatz nicht kurz, dagegen die Zähne sehr klein; während des Lebens waren alle vorhanden und noch wenig abgekaut.

Unterkiefer: Ziemlich niedrig, aber mit gut entwickeltem Kinn, Äste mäßig schief gestellt, Zähne ebenfalls sehr klein; während des Lebens waren noch alle erhalten, die zweiten Molaren rechts oben und unten links zeigen in der Mitte der Kaufläche geringe kariöse Erkrankung.

Lebensalter ca. 30—35 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1130 ccm	Ganze Gesichtshöhe	113 mm
Größte horizontale Länge	158 mm	Obergesichtshöhe	68 „
„ Breite	147	Jochbreite	134,5
Gerade Höhe	123	Gesichtsbreite (Virchows)	99
Ohrhöhe	114	Augenhöhlen-Höhe	38,5
Horizontale Länge des Hinterhaupts	96	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	64	Nasen-Höhe	52
Horizontalumfang	513	„ -Breite	23
Sagittalumfang des Stirnbeins	111	Gaumen-Länge	43
„ der Scheitelbeine	95	„ -Breite	43
„ „ Hinterhauptsschuppe	105	Gesichtswinkel	86°
Ganzer Sagittalbogen	311		
Kleinste Stirnbreite	92		
Länge der Schädelbasis	86		
Breite „ „	107		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	93,04	Obergesichts-Index	50,56 (68,69)
Längenhöhen-Index	77,85	Augenhöhlen-Index	91,67
Ohrhöhen-Index	72,15	Nasen-Index	44,23
Hinterhaupts-Index	60,76	Gaumen-Index	100,00

Allgemeine Analyse:

♀ (?), ultra-brachycephal, hypsicephal, meso- bzw. leptoprosop, leptorrhin, hypsiconch, orthognath.

Nr. 28.

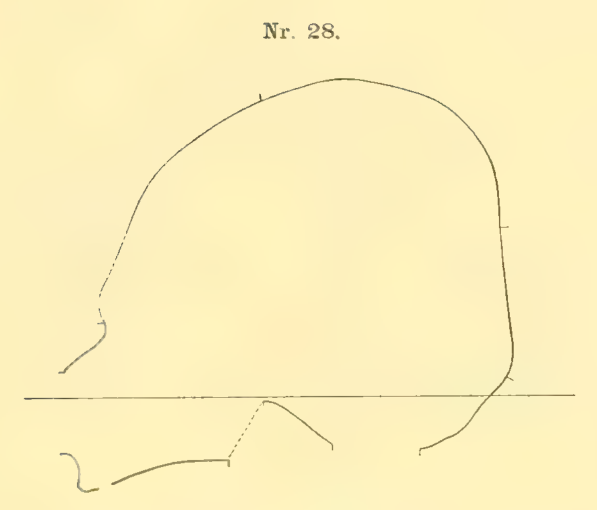


Fig. 28. Mit Tafel 3.

Vielleicht männlicher Schädel mittleren Alters mit Unterkiefer; frontal-occipital deformiert. Schwache Andeutung einer Koronalrinne auf beiden Seiten der Pfeilnaht. Die Stirnabflachung zeigt wenig hervortretenden Koronalwulst, Stirnbeindreieck und Mittelgrat. Die Seitenpartien des Stirnbeins sind abgeflacht, die Stirnhöcker sind unverändert. Über die unteren, hinteren Ecken der Scheitelbeine zieht über die Lambdanaht eine drei Finger breite, flach konkave Eintiefung. Das Hinterhaupt ist stark abgeflacht. Die Druckfläche erstreckt sich über die Oberschuppe des Hinterhauptbeins und weit auf die anliegenden Scheitelbeinpartien, bis über die Hälfte der Sagittalnaht. Der Schädel ist dadurch verkürzt und erhöht.

Die Nähte sind noch alle offen; in der Lambdanaht einige kleine Wormsche Knochen. Processi mastoidei gut ausgebildet. Mäßig starker Torus occipitalis. Die Oberaugenbrauenbogen sind in ihren mittleren Partien gut ausgebildet.

Der Schädel ist extrem brachycephal, Index 102,16. Längenhöhen-Index 98,53 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1040 ccm. Der Horizontalumfang 465 mm, der ganze Sagittalbogen 320 mm.

Profilwinkel 78° = Prognathie. Das Gesicht ziemlich breit und niedrig, Index 47,37 chamaeprosop. Fossa canina flach. Wangenbeine und Jochbogen wenig ausladend. Nase hoch und schmal, Index 45,92 leptorrhin. Nasendach gut gewölbt, aquilin. Augenhöhlen mäßig weit, viereckig, Index 76,19 chamaeconch. Ohröffnungen schlitzförmig. Gaumen ziemlich flach und kurz, Index 86,95 brachystaphylin. Alveolarfortsatz kurz und prognath. Die Zähne waren während des Lebens alle erhalten, aber zum Teil ziemlich abgekaut.

Unterkiefer: Körper niedrig, kräftig. Äußeres Kinn gut ausgebildet. Äste ziemlich steil. Die Zähne waren während des Lebens erhalten.

Lebensalter etwa 30—40 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1040 ccm	Ganze Gesichtshöhe	102 mm
Größte horizontale Länge	139 mm	Obergesichtshöhe	63
„ Breite	142	Jochbreite	133
Gerade Höhe	137	Gesichtsbreite (Virchows)	96
Ohrhöhe	115	Augenhöhlen-Höhe	32
Horizontale Länge des Hinterhaupts	79	„ -Breite	42
Basilare Länge des Vorderhaupts	65	Nasen-Höhe	49
Horizontalumfang	465	„ -Breite	22,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	101	Gaumen-Länge	46
„ der Scheitelbeine	120	„ -Breite	40
„ „ Hinterhauptsschuppe	99	Gesichtswinkel	78°
Ganzer Sagittalbogen	320		
Kleinste Stirnbreite	92		
Länge der Schädelbasis	87		
Breite „ „	101		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	102,16	Obergesichts-Index	47,37 (65,63)
Längenhöhen-Index	98,53	Augenhöhlen-Index	76,19
Ohrhöhen-Index	82,73	Nasen-Index	45,92
Hinterhaupts-Index	56,84	Gaumen-Index	86,95

Allgemeine Analyse:

♂ (?), extrem brachycephal, hypsicephal, prognath, chamaeprosop, leptorrhin, chamaeconch, brachystaphylin.

Nr. 29.

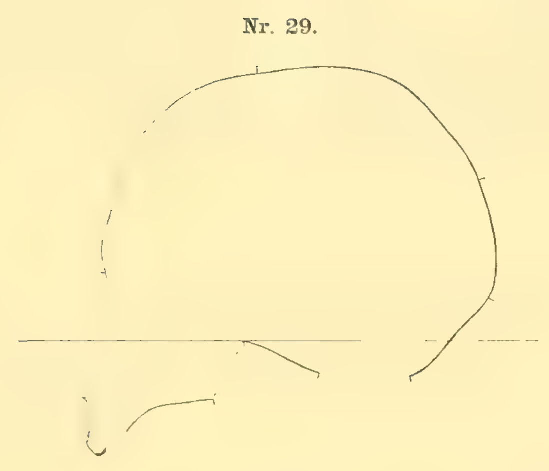


Fig. 29.

Wahrscheinlich männlicher Schädel mittleren Lebensalters mit Unterkiefer, frontal und namentlich occipital stark deformiert, Hinterhaupt „zweilappig“ wie Nr. 33 und 35 (s. auch diese). Schwache breite Koronalrinne resp. konkave Abflachung, welche die Sagittalnahtgegend in gut Daumenbreite freiläßt und sich, stärker auf der linken Seite, gegen die Schläfengegend rinnenförmig vertieft. Die beiden ziemlich breiten Flächen der im ganzen geringen Stirnabflachung lassen einen Mittelgrat, Stirndreieck und einen im allgemeinen schwachen Koronalwulst unverändert. Neben dem Stirnbeindreieck erscheint der Koronalwulst etwas eingetieft, was bei den bisher beschriebenen Schädeln noch nicht beobachtet worden ist. Über die unteren, hinteren Ecken der Scheitelbeine verläuft die oft beschriebene, breite, schwach konkave Eintiefung zur Lambdanaht. Die occipitale Abflachung umfaßt die Mittelpartie der Oberschuppe des Hinterhauptbeins und die angrenzenden Partien der Scheitelbeine. Durch Eintiefung der Sagittalnaht und Lambdaspitze erscheint das Hinterhaupt wie gelappt, indem jedes Scheitelbein sich für sich vorwölbt. Die beiden Scheitelbeine sind jedes für sich nach rechts und links ausgewölbt. Von der Mitte der Koronalrinne aus ziehen sich beiderseits breite Furchen — eine mittlere Partie der Scheitelbeine als „Scheitelbeindreieck“ freilassend, gegen die Mitte der Sagittalnaht. Hier vereinigen sich beide zu einer einzigen, der Sagittalnaht bis zur Spitze der Lambdanaht entlang laufenden Furche, welche sich als ein ziemlich tiefes Tal zwischen die beiden hügelartig vorgewölbten Scheitelbeine erstreckt. An der Lambdaspitze teilt sich die Furche wieder in zwei Schenkel, die der Lambdanaht beiderseits entlang laufen und sich über die hinteren, unteren Ecken der Scheitelbeine in der Richtung gegen die Schläfenschuppe und die vorderen Enden der Koronalrinne fortsetzen. Die Scheitelbeine sind von diesen Furchen fast in der ganzen Erstreckung ihrer Ränder umgriffen und gleichsam eingeschnürt, woraus sich die starke, seitliche Hervorwölbung und damit die zweilappige Form des Hinterhaupts erklärt.

Die Nähte sind alle offen und stark gezackt, die Lambdanaht enthält eine Anzahl Schaltknochen, an der Spitze einen größeren. Die Processi mastoidei sind breit und kurz. Torus occipitalis ziemlich schwach. Augenbrauenbogen in ihren inneren Abschnitten gut hervortretend.

Der Schädel ist extrem brachycephal, Index 106,53. Längenhöhen-Index 83,01 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1225 ccm. Der Horizontalumfang 511 mm, der ganze Sagittalbogen 307 mm.

Profilwinkel 81° leicht prognath. Das Gesicht erscheint hoch und mäßig breit, Index 53,33 leptoprosop; Fossa canina flach; Wangenbeine und Jochbogen ziemlich angelegt. Nase hoch, Index 47,06 mesorrhin; Nasenstachel kräftig; Nasenbeine zum Teil zerbrochen, oben schmal, Nasendach schmal, gut gewölbt; Augenhöhlen weit, bemerkenswert schief gestellt, Index 86,36 hypsiconch. Ohröffnungen rundlich. Gaumen tief und lang, Index 76,47 leptostaphylin. Alveolarfortsatz zum Teil senil verändert. Während des Lebens fehlten rechts der erste Prämolar, der erste und zweite Molar, links die Prämolaren und der erste und zweite Molar.

Unterkiefer: Körper mittelhoch und breit, Kinn kräftig. Äste verhältnismäßig schief. Während des Lebens waren rechts der erste Molar und die beiden Prämolaren verloren gegangen. Die dritten Molaren waren nicht zum Durchbruch gekommen.

Lebensalter wohl über 50 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1225 ccm	Ganze Gesichtshöhe	109 mm
Größte horizontale Länge	153 mm	Obergesichtshöhe	72
„ Breite	163	Jochbreite	(135)
Gerade Höhe	127	Gesichtsbreite (Virchows)	94
Ohrhöhe	108	Augenhöhlen-Höhe	38
Horizontale Länge des Hinterhaupts	90	„ -Breite	44
Basilare Länge des Vorderhaupts	71	Nasen-Höhe	51
Horizontalumfang	511	„ -Breite	24
Sagittalumfang des Stirnbeins	109	Gaumen-Länge	51
„ der Scheitelbeine	103	„ -Breite	39
„ „ Hinterhauptsschuppe	95	Gesichtswinkel	81°
Ganzer Sagittalbogen	307		
Kleinste Stirnbreite	93		
Länge der Schädelbasis	93		
Breite „ „	106		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	106,53	Obergesichts-Index	53,33 (76,59)
Längenhöhen-Index	83,01	Augenhöhlen-Index	86,36
Ohrhöhen-Index	70,59	Nasen-Index	47,06
Hinterhaupts-Index	58,82	Gaumen-Index	76,47

Allgemeine Analyse:

♂(?), extrem brachycephal, hypsicephal, prognath, leptoprosop, mesorrhin, hypsiconch, leptostaphylin.

Nr. 30.

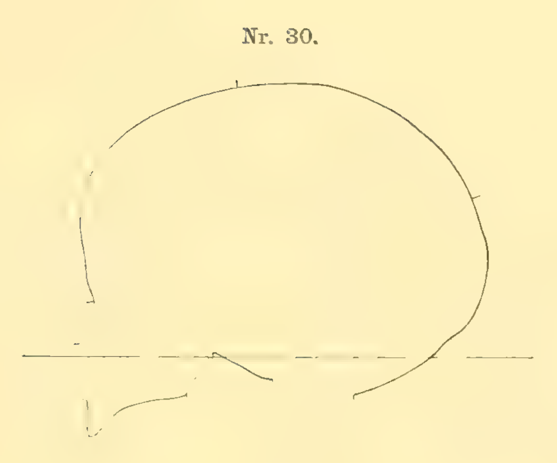


Fig. 30.

Kindlicher Schädel mit Unterkiefer. Es sind nur geringe Spuren von Deformation vorhanden, so daß der Schädel auf den ersten Blick undeformiert erscheinen könnte. Eine minimale, flache Eindrückung seitlich vor der Kranznaht und je eine breite, schwach konkave Abflachung der unteren hinteren Ecken der beiden Scheitelbeine, welche die Lambdanaht überschreiten und als flache, gut daumenbreite, über die obere Partie der Unterschuppe des Hinterhauptbeins verlaufende Furche ineinander übergehen. Eine Stirnabflachung rechts und links von einem schwachen Stirngrat ist nur angedeutet. Stirn- und Scheitelbeinhöcker sind gut ausgebildet. Rechts schwache, rinnenförmige Stenokrotaphie. Die Nähte sind alle offen und gut gezackt; ein Wormscher Knochen befindet sich links in der Lambdanaht. Die Sphenobasilarfuge ist noch weit offen, die Partes condyloidei mit der Pars basilaris noch nicht vollkommen verwachsen. Die Processi mastoidei sind dem Alter entsprechend klein.

Der Schädel ist mesocephal. Längenbreiten-Index 79,22, Längenhöhen-Index 81,17 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1105 ccm. Der Horizontalumfang 448 mm, der ganze Sagittalbogen 335 mm.

Der Profilwinkel 82° steht an der Grenze der Orthognathie. Das Gesicht schmal, aber kurz. Obergesichts-Index 54,56 leptoprosop. Wangenbeine und Jochbogen stark angelegt. Nase kindlich, Index 47,50 mesorrhin. Der Unterrand der oben bemerkenswert breiten Apertura piriformis ist gerundet und verläuft im ganzen gerade mit nur angedeuteten Ausbuchtungen nach unten. Schwacher Nasenstachel; Nasenbeine ziemlich groß und breit, das Nasendach flach gewölbt, die Augenhöhlen sind gerundet und sehr hoch, Index 103,22 hypsiconch.

Gesichtsprofilierung kindlich, Ohröffnungen rundlich oval. Gaumen kindlich, relativ lang, Index 81,58 mesostaphylin.

Unterkiefer: kindlich zart und niedrig; die Äste sind relativ breit und wenig schief gestellt. Das Kinn ist verhältnismäßig schon gut entwickelt. Alle Milchzähne des Gebisses waren während des Lebens noch vorhanden. Der erste Molar ist im Ober- und Unterkiefer im Erscheinen, in letzterem auch die zweiten Schneidezähne des Dauergebisses.

Lebensalter zwischen 7 und 8 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1105 ccm	Ganze Gesichtshöhe	86 mm
Größte horizontale Länge	154 mm	Obergesichtshöhe	53
„ Breite	122	Jochbreite	99
Gerade Höhe	125	Gesichtsbreite (Virchows)	73,5
Ohrhöhe	106	Augenhöhlen-Höhe	32
Horizontale Länge des Hinterhaupts	101	„ -Breite	31
Basilare Länge des Vorderhaupts	55,5	Nasen-Höhe	40
Horizontalumfang	448	„ -Breite	19
Sagittalumfang des Stirnbeins	119	Gaumen-Länge	38
„ der Scheitelbeine	111	„ -Breite	31
„ „ Hinterhauptsschuppe	105	Gesichtswinkel	82°
Ganzer Sagittalbogen	335		
Kleinste Stirnbreite	80,5		
Länge der Schädelbasis	77		
Breite der Schädelbasis	79		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	79,22	Obergesichts-Index	54,56
Längenhöhen-Index	81,17	Augenhöhlen-Index	103,22
Ohrhöhen-Index	68,83	Nasen-Index	47,50
Hinterhaupts-Index	65,58	Gaumen-Index	81,58

Allgemeine Analyse:

mesocephal, hypsicephal, leptoprosop, hypsiconch, mesorrhin, mesostaphylin, schwach prognath.

Nr. 31. Ancon.

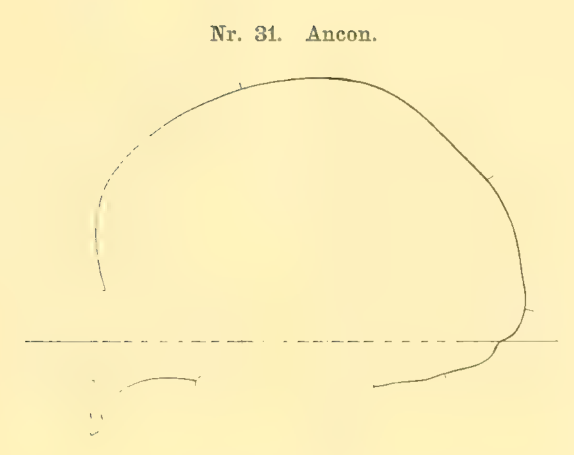


Fig. 31.

Wenig deformierter, kindlicher Schädel ohne Unterkiefer. Er ist ausgezeichnet durch ein vollkommenes Os Incae. Flache, schwache Koronalrinnen, jederseits ca. ein Finger breit von der Kranznaht beginnend. Das Stirnbein zeigt Stirnbeindreieck, Mittelgrat, seitlich von letzterem je eine geringe Abflachung. Über die unteren, hinteren Ecken der Scheitelbeine verläuft eine deutliche, zwei Finger breite, schwach konkave Abflachung, welche, die Lambdanaht etwas überschreitend, sich auf die Unterschuppe des Hinterhauptbeins fortsetzt. Eine schwache, occipitale Abflachung zeigt sich beinahe ausschließlich auf die oberen, hinteren Partien der Scheitelbeine beschränkt, nur die oberste Lambdaspitze des Os Incae einbeziehend. Etwa ein Finger breit unter der Grenznaht des Os Incae befindet sich in der Mitte eine pathologische Grube von rundlicher Form, in der Tiefe derselben erscheint die Spongiosa freigelegt. Die ursprüngliche Form des Schädels ist trotz der Deformation wenig verändert; nur das Hinterhaupt scheint durch die seitlichen Druckwirkungen etwas hervorgewölbt resp. verlängert.

Die Nähte sind alle offen und mit Ausnahme des Os Incae normal. Im unteren Ende der Lambdanaht sind links zwei Schaltknochen. Die basalen Teile des Hinterhauptbeins sind noch nicht vollkommen verknöchert. Die Pars basilaris des Os occipitale fehlt, die Sphenobasilarfuge war noch weit offen. Processi mastoidei kurz, kindlich.

Der Schädel ist dolichocephal, Längenbreiten-Index 72,84; Längenhöhen-Index 79,01 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1035 ccm, der Horizontalumfang 446 mm, der ganze Sagittalbogen 343 mm.

Profilwinkel 82° an der Grenze der Prognathie zur Orthognathie. Gesicht schmal, aber niedrig, Index 51,04 leptoprosop bzw. mesoprosop. Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Nasenform kindlich, der Unterrand der Apertura pyriformis abgerundet und gerade auslaufend, die Nasenbeine fehlen, waren aber breit und das Nasendach flach gewölbt; Nasen-Index 54,05 platyrrhin. Augenhöhlen rund, Index 100,00 hypsiconch; im rechten Augenhöhlendach befindet sich eine ziemlich große kribrose Stelle. Ohröffnung rechts rundlich, links oval. Gaumen kindlich, relativ lang, Index 89,47 brachystaphylin. Alveolarrand kindlich; der erste Molar ist rechts und links durchgebrochen, sonst waren noch alle Milchzähne vorhanden.

Lebensalter ca. 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1035 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	162 mm	Obergesichtshöhe	49
„ Breite	118	Jochbreite	96
Gerade Höhe	128	Gesichtsbreite (Virchows)	75
Ohrhöhe	103	Augenhöhlen-Höhe	31
Horizontale Länge des Hinterhaupts	105	„ -Breite	31
Basilare Länge des Vorderhaupts	60	Nasen-Höhe	37
Horizontalumfang	446	„ -Breite	20
Sagittalumfang des Stirnbeins	109	Gaumen-Länge	38
„ der Scheitelbeine	110	„ -Breite	34
„ „ Hinterhauptsschuppe	124 (49 + 75)	Gesichtswinkel	82°
Ganzer Sagittalbogen	343		
Kleinste Stirnbreite	79		
Länge der Schädelbasis	(82)		
Breite „ „	84		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	72,84	Obergesichts-Index	51,04
Längenhöhen-Index	79,01	Augenhöhlen-Index	100,00
Ohrhöhen-Index	63,58	Nasen-Index	54,05
Hinterhaupts-Index	64,82	Gaumen-Index	89,47

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, hypsicephal, leptoprosop (mesoprosop), hypsiconch, platyrrhin, brachystaphylin, schwach prognath.

Nr. 32. Ancon.

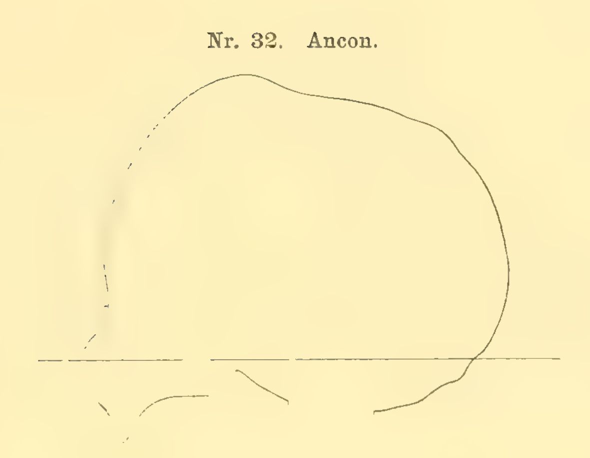


Fig. 32. Mit Tafel 4.

Kindlicher Schädel ohne Unterkiefer, der Schädel ist durch pathologische Prozesse (Syphilis?) stark deformiert. Eine Stirnkrista erhebt sich ungefähr am Ende des Stirnbeins in der Gegend der ehemaligen großen Fontanelle zu einem hohen länglichen Höcker resp. Vorwölbung des Knochens. Das Schädeldach zeigt mehrere große und kleinere kribrose Stellen. Von künstlicher Deformation zeigen sich innerhalb der pathologischen Verunstaltung nur zweifelhafte Spuren. Das Hinterhaupt erscheint wohl durch Druck etwas verschmälert und vorgebuchtet. Sagittal ist eine künstliche Deformation sonst nicht zu erkennen, frontal zweifelhaft.

Von den Nähten des Schädeldaches sind nur noch links die des großen Keilbeinflügels offen, die übrigen sind vollständig verschwunden. Sphenobasilarfuge sowie die Nähte im Gesicht und an der Schädelbasis offen. Die Knochen sind sehr dünn und an mehreren Stellen durchbrochen.

Der Schädel ist dolichocephal, Index 74,68, Längenhöhen-Index 79,75 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1095 ccm, der Horizontalumfang 445 mm.

Profilwinkel 84^0 = Orthognathie. Das Gesicht erscheint kurz, Index 42,99 chamaeprosop. Der Unterrand der Augenhöhlen springt scharf kristenartig vor. Wangenbeine angelegt, Jochbogen etwas ausgewölbt. Nase kindlich, kurz, Index 54,05 platyrrhin, Nasenstachel kräftig, Nasendach schön gewölbt, aquilin. Augenhöhlen weit, Index 89,19 hypsiconch. Ohröffnungen rundlich. Gaumen tief, Index 100,00 brachystaphylin. Während des Lebens war das Milchgebiß vorhanden, der erste bleibende Molar durchgebrochen.

Lebensalter etwa 7 bis 8 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1095 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	158 mm	Obergesichtshöhe	46
„ Breite	(118)	Jochbreite	107
Gerade Höhe	126	Gesichtsbreite (Virchows)	80
Ohrhöhe	105	Augenhöhlen-Höhe	33
Horizontale Länge des Hinterhaupts	102	„ -Breite	37
Basilare Länge des Vorderhaupts	57	Nasen-Höhe	37
Horizontalumfang	445	„ -Breite	20
Sagittalumfang des Stirnbeins	—	Gaumen-Länge	36
„ der Scheitelbeine	—	„ -Breite	36
„ „ Hinterhauptsschuppe	—	Gesichtswinkel	84°
Ganzer Sagittalbogen	(340)		
Kleinste Stirnbreite	91		
Länge der Schädelbasis	78		
Breite „ „	82		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	74,68	Obergesichts-Index	42,99
Längenhöhen-Index	79,75	Augenhöhlen-Index	89,19
Ohrhöhen-Index	66,45	Nasen-Index	54,05
Hinterhaupts-Index	64,56	Gaumen-Index	100,00

Allgemeine Analyse:

dolichocephal, hypsicephal, orthognath, chamaeprosop, platyrrhin, hypsiconch, brachystaphylin.

Nr. 33. Pachacamác.



Fig. 33.

Kindlicher, sehr stark deformierter Schädel ohne Unterkiefer, mit gelapptem Hinterhaupt, ähnlich wie Schädel Nr. 35, Tafel 5. Stark ausgeprägte, breite Koronalrinne, jederseits bis an die Sagittalnaht reichend und besonders in den seitlichen Partien sehr stark vertieft, sich zwischen Stirnbein und Scheitelbein einsenkend, welche sich wallartig über die Furche erheben. Schwache Fortsetzung direkt nach unten, namentlich rechts deutlich. Über die hinteren, unteren Ecken der Scheitelbeine verläuft wieder eine breite, schwach konkave Abflachung, die Lambdanaht gegen die Unterschuppe des Hinterhauptbeins zu etwas überschreitend. Die starke occipitale Abflachung betrifft hauptsächlich die mittleren Abschnitte der Unterschuppe des Hinterhauptbeins etwa fingerbreit von dem Hinterrand des Foramen magnum beginnend und bis zur Grenze der Oberschuppe reichend. Von der Mitte der Kranznaht aus, am Anfang der stärkeren Eintiefung der Koronalrinnen zieht sich beiderseits eine flache Eintiefung, ein breites „Scheitelbeindreieck“ aussparend, nach hinten gegen die Sagittalnaht. Hier vereinigen sich beide Eintiefungen bis zur Lambdanahtspitze, eine einheitliche, flache und breite Sagittalfurche, gewissermaßen ein breites Tal zwischen den beiden rundhügelartig nach den Seiten und nach oben vorgewölbten Scheitelbeinen bildend. Von da trennt sich diese Sagittalfurche wieder in zwei Schenkel, beiderseits der Lambdanaht entlang laufend und von hier aus als flache Druckfläche jederseits den unteren, hinteren Winkel des Scheitelbeins überschreitend mit der Richtung nach vorwärts gegen das untere Ende der Koronalrinne, von welcher sie nur in der Erstreckung der Schläfenbeinnaht getrennt bleibt. Auf diese Weise wird jedes der beiden Scheitelbeine durch die geschilderten Furchen fast vollkommen in seinen vier Rändern umgriffen und eingeschnürt. Jedes Scheitelbein wird dadurch für sich vorgewölbt, wodurch die zweigelappte Form des Hinterhaupts entsteht. Durch die Deformation wird der Schädel stark verkürzt und verbreitert und infolge davon entsprechend erniedrigt.

Sphenobasilarfuge und alle Nähte offen. In der Lambdanaht sind eine Anzahl kleiner und großer Schaltknochen. Rechts ist die Fötalquernaht des Hinterhauptbeins noch offen, darüber ein gut ausgebildetes Os Incae laterale dextrum.

Der Schädel ist extrem brachycephal, Index 112,48, Längenhöhen-Index 86,93 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1015 ccm. Der Horizontalumfang 475 mm, der ganze Sagittalbogen 291 mm.

Profilwinkel 85° = Orthognathie. Das Gesicht erscheint breit und kurz, Index 48,15 chamaeprosop; Wangenbeine angelegt. Jochbogen schwach ausladend; Fossa canina gut profiliert. Nase relativ lang und schmal, Index 42,11 leptorrhin. Unterer Rand der Nasenöffnung gerade, abgeflacht, kleiner spitzer Nasenstachel, Nasenbeine ziemlich breit, flach gewölbt, leicht aquilin vorspringend. Augenbrauenbogen fehlen, schwacher Stirnnasenwulst. Augenhöhlen weit, gerundet, Index 94,31 hypsiconch. Ohröffnungen oval. Gaumen kindlich, Index 83,75 mesostaphylin. Alveolarfortsatz relativ hoch. Es war noch das ganze Milchgebiß vorhanden, der linke erste Milchmolar war kariös. Der erste bleibende Molar rechts und links schon durchgebrochen.

Lebensalter 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1015 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	137 mm	Obergesichtshöhe	52
„ Breite	154	Jochbreite	108
Gerade Höhe	117	Gesichtsbreite (Virchows)	78
Ohrhöhe	101	Augenhöhlen-Höhe	33
Horizontale Länge des Hinterhaupts	81	„ -Breite	35
Basilare Länge des Vorderhaupts	57	Nasen-Höhe	38
Horizontalumfang	475	„ -Breite	18
Sagittalumfang des Stirnbeins	95	Gaumen-Länge	40
„ der Scheitelbeine	90	„ -Breite	33,5
„ „ Hinterhauptsschuppe	106	Gesichtswinkel	85°
Ganzer Sagittalbogen	291		
Kleinste Stirnbreite	90		
Länge der Schädelbasis	79		
Breite „ „	97		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	112,48	Obergesichts-Index	48,15
Längenhöhen-Index	86,93	Augenhöhlen-Index	94,31
Ohrhöhen-Index	73,22	Nasen-Index	42,11
Hinterhaupts-Index	59,13	Gaumen-Index	83,75

Allgemeine Analyse:

extrem brachycephal, hypsicephal, orthognath, chamaeprosop, leptorrhin, hypsiconch, mesostaphylin.

Nr. 34.

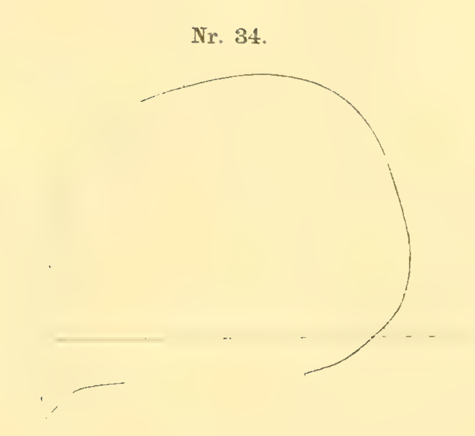


Fig. 34.

Kindlicher, frontal-occipital deformierter Schädel ohne Unterkiefer. Seitliche, in der Gegend der Mitte der Kranznaht ziemlich stark vertiefte Koronalrinnen, durch deren Eindrücke die Nachbarpartien des Scheitel- und Stirnbeins auf beiden Seiten wallartig aufgewulstet erscheinen. Die relativ schwache Stirnabflachung läßt die Stirnhöcker und einen breiten, aber niedrigen Koronalwulst frei mit Stirndreieck und Mittelgrat. Die unteren, hinteren Ecken der Scheitelbeine zeigen in geringem Grad die gewöhnliche, breite Abflachung, welche die Lambdanaht etwas überschreitet. Auf den beiden Scheitelbeinen entlang der Lambdanaht und auf der Oberschuppe sind große „kribröse“ Stellen mit Auftreibung des Knochens; eine kleine „kribröse“ Stelle findet sich auch auf der linken Stirnbeinhälfte, auch sonst kleine „kribröse“ Stellen im Gaumen und an den Schläfenbeinen. Die occipitale Abflachung wird zum Teil durch die genannten „kribrösen“ Knochenauftreibungen verdeckt; sie betrifft die Oberschuppe des Hinterhauptbeins und der benachbarten Teile der Scheitelbeine.

Sphenobasilarfuge und Nähte offen und normal. Zitzenfortsätze kindlich klein.

Der Schädel ist extrem brachycephal, Index 101,43, Längenhöhen-Index 88,57 hypsicephal. Die Kapazität beträgt — ccm. Der Horizontalumfang 443 mm, der ganze Sagittalbogen 304 mm.

Profilwinkel 83°, schwach orthognath. Das Gesicht relativ schmal, Index 48,65 mesoprosop; Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Nase ziemlich lang, Index 50,00 mesorrhin. Unterrand der Apertura pyriformis gerade, flach mit kurzem Nasenstachel. Nasenbeine teilweise zerbrochen. Nasendach relativ gut gewölbt. Augenbrauenbogen noch fehlend. Augenhöhlen weit, Index 100,00 hypsiconch. Ohröffnungen oval; Gaumen kindlich kurz, aber tief, Index 89,47 brachystaphylin. Alveolarfortsatz ziemlich lang. Das Milchgebiß war während des Lebens noch erhalten, erste Molaren noch in den Alveolen.

Lebensalter ca. 6 Jahre.

Der beiliegende Unterkiefer gehört nicht zum Schädel: Äste ziemlich steil gestellt, Kinn kräftig. Das Milchgebiß ist noch erhalten, doch ist schon der erste bleibende Molar jederseits voll entwickelt. Lebensalter ca. 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	— ccm	Ganze Gesichtshöhe	87 mm
Größte horizontale Länge	140 mm	Obergesichtshöhe	51
„ Breite	142	Jochbreite	104
Gerade Höhe	124	Gesichtsbreite (Virchows)	75
Ohrhöhe	103	Augenhöhlen-Höhe	32
Horizontale Länge des Hinterhaupts	89	„ -Breite	32
Basilare Länge des Vorderhaupts	56	Nasen-Höhe	36
Horizontalumfang	443	„ -Breite	18
Sagittalumfang des Stirnbeins	99	Gaumen-Länge	38
„ der Scheitelbeine	100	„ -Breite	34
„ „ Hinterhauptsschuppe	105	Gesichtswinkel	83°
Ganzer Sagittalbogen	304		
Kleinste Stirnbreite	87		
Länge der Schädelbasis	80		
Breite „ „	85		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	101,43	Obergesichts-Index	78,65
Längenhöhen-Index	88,57	Augenhöhlen-Index	100,00
Ohrhöhen-Index	73,57	Nasen-Index	50,00
Hinterhaupts-Index	63,57	Gaumen-Index	89,47

Allgemeine Analyse:

extrem brachycephal, hypsicephal, orthognath, mesoprosop, mesorrhin, hypsiconch, brachystaphylin.

Nr. 35

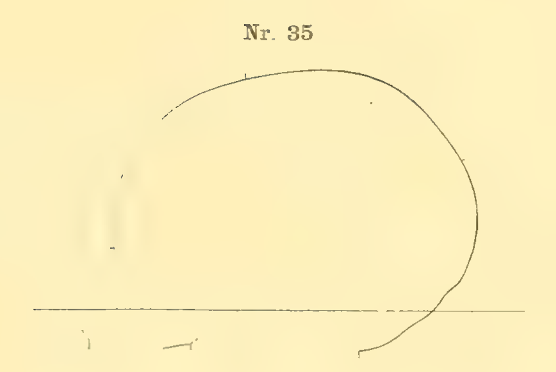


Fig. 35. Mit Tafel 5 und 6.

Kindlicher Schädel, frontal-occipital deformiert, ohne Unterkiefer. Deformation ähnlich wie bei Schädel Nr. 33. Beiderseits eine geringe Stirnabflachung mit Koronalwulst, Stirnbeindreieck und Stirnbeingrat; mit zweilappigem Hinterhaupt. Starke Koronalrinne bis zu den Schläfen herabreichend, das vordere Ende der Sagittalnaht nicht berührend, der Mitte der Kranznaht entsprechend, welche sie stärker vertieft, so daß sich ihre Ränder wallartig erheben. Die occipitale Abflachung erstreckt sich auf beide Schuppenabschnitte des Hinterhauptbeins. Von der Unterschuppe bleibt nur eine kaum fingerbreite Strecke über dem Hinterrand des Foramen magnum undeformiert. Von dem Anfang der stärker vertieften Teile der Koronalrinne, also etwa von der Mitte der Kranznaht ausgehend, zieht jederseits eine breite Furche nach hinten, schief gegen die Mitte der Sagittalnaht. Dadurch wird ein breites, wohlbegrenztes, undeformiertes „Scheitelbeindreieck" abgegrenzt, welches breit an der Kranznaht beginnt und seine Spitze etwas hinter der Mitte der Sagittalnaht besitzt. Hier vereinigen sich die beiden seitlichen von der Koronalrinne jederseits ausgehenden Furchen und ziehen als eine einheitliche, breite Eintiefung: Sagittalrinne, der Sagittalnaht entlang, die Spitze der Lambdanaht etwas überschreitend und hier die occipitale Deformationsfläche berührend. Von der Lambdaspitze aus trennt sich die einheitliche Sagittalrinne wieder in zwei tiefe, relativ breite Rinnen, beiderseits der Lambdanaht entlang über die hinteren unteren Ecken der Scheitelbeine nach vorwärts laufend, sowohl rechts wie links unverkennbar, in der Richtung gegen das untere Ende der stark eingetieften Koronalrinne. Nur ein kaum zwei Finger breites Stück über der Schläfenbeinschuppe, welches keine deutliche Eintiefung zeigt, bleibt zwischen den beiden Rinnen übrig. Die Scheitelbeine werden von den geschilderten Rinnen sonach an ihren vier Rändern fast vollkommen umgriffen und eingeschnürt. Dadurch wird jedes für sich seitlich extrem hervorgewölbt, wodurch die zweilappige Form des Hinterhaupts entsteht.

Pars basilaris des Hinterhauptbeins fehlt; Sphenobasilarfuge und alle Nähte offen; in der Lambdanaht rechts ein kleiner Wormscher Knochen. Zitzenfortsätze kindlich, sehr kurz.

Der Schädel ist extrem-brachycephal, Index 103,52, Längenhöhen-Index 80,63 hypsicephal. Die Kapazität beträgt ca. 990 ccm. Der Horizontalumfang 458 mm, der ganze Sagittalbogen 290 mm.

Alveolarrand größtenteils zerbrochen, daher der Profilwinkel nicht sicher meßbar, etwa 74° = Prognathie. Das Gesicht ist kindlich, breit, Index 48,48 chamae-mesoprosop. Wangenbeine und Jochbogen angelegt; die Nase erscheint ziemlich groß und lang, Index 50,00 mesorrhin.

Die Apertura pyriformis zeigt einen geraden, abgeflachten Unterrand mit relativ gutem Nasenstachel. Nasenbeine groß und breit und mäßig stark vorspringend. Nasendach gut, etwas flach gewölbt, Nasenform wohl schon ausgesprochen aquilin. Augenbrauenbogen fehlen noch. Augenhöhlen hoch und rund, Index 92,65 hypsiconch. Ohröffnungen oval, schlitzförmig. Gaumen und Oberkieferfortsatz zerbrochen. Während des Lebens war das Milchgebiß noch erhalten.

Lebensalter 5 bis 6 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	ca. 990 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	142 mm	Obergesichtshöhe	48
„ Breite	147	Jochbreite	99
Gerade Höhe	114,5	Gesichtsbreite (Virchows)	77,5
Ohrhöhe	93,5	Augenhöhlen-Höhe	31,5
Horizontale Länge des Hinterhaupts	92	„ -Breite	34
Basilare Länge des Vorderhaupts	56	Nasen-Höhe	34
Horizontalumfang	458	„ -Breite	17
Sagittalumfang des Stirnbeins	92	Gaumen-Länge	—
„ der Scheitelbeine	98	„ -Breite	—
„ „ Hinterhauptsschuppe	100	Gesichtswinkel	(74°)
Ganzer Sagittalbogen	290		
Kleinste Stirnbreite	80		
Länge der Schädelbasis	(76)		
Breite „ „	85		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	103,52	Obergesichts-Index	48,48
Längenhöhen-Index	80,63	Augenhöhlen-Index	92,65
Oberhöhen-Index	64,44	Nasen-Index	50,00
Hinterhaupts-Index	64,79	Gaumen-Index	—

Allgemeine Analyse:

extrem-brachycephal, hypsicephal, prognath. chamae-mesoprosop, mesorrhin, hypsiconch.

Nr. 36. Pachacamác.

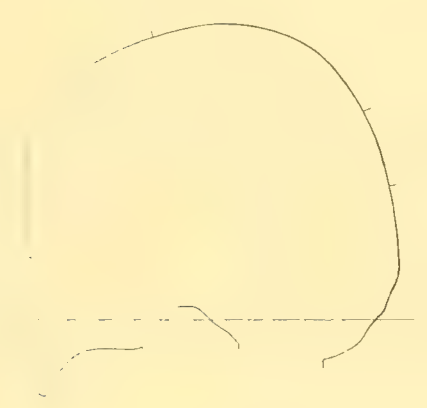


Fig. 36.

Kindlicher Schädel mit Unterkiefer, groß, mit schöner, gerade ansteigender, hoher Stirn und gut ausgebildeten Stirnhöckern. Der Schädel mit Gesicht und Gaumen ist deutlich schief. Vorwiegend occipital deformiert. Koronalrinnen kaum angedeutet, ebenso die Stirnabflachung beiderseits nur über den Stirnhöckern zu erkennen. Die Abflachung durch die Hinterhauptsdeformation ist nur einseitig links, hier aber recht stark; sie hat den Schädel im ganzen erhöht und namentlich links verkürzt. Rechts zieht eine ganz schwache Abflachung (?) über die untere hintere Scheitelbeinecke; links zieht sich eine weit stärkere, zwei Finger breite, konkave Abflachung von der Mitte des Scheitelbeins, über dessen unteren Abschnitt, zur Lambdanaht und geht hier in die occipitale Abflachung über.

Nähte und Sphenobasilarfuge offen. Der obere Teil der Oberschuppe ist durch eine Naht vom übrigen Hinterhauptbein als großer, einheitlicher Spitzenknochen getrennt.

Der Schädel ist extrem-brachycephal, Index 100,00, Längenhöhen-Index 95,52 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1190 ccm, der Horizontalumfang 460 mm, der ganze Sagittalbogen 325 mm.

Der Profilwinkel beträgt 86°, der Schädel ist sonach ausgesprochen orthognath. Das Gesicht zeigt noch kindliche Form, es ist chamaeprosop, Index 42,73. Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Nase relativ lang und mäßig breit, Index 51,25 platyrrhin, unterer Rand der Apertura piriformis flach gerundet, Nasenstachel ziemlich kräftig, Nasendach zum Teil zerbrochen, flach gewölbt mit großen Nasenbeinen. Augenbrauenbogen fehlen noch. Augenhöhlen weit und gerundet, Index 85,00 noch mesoconch resp. an der Grenze der Hypsiconchie. Ohröffnung links oval, rechts schwache Exostose. Gaumen kindlich, kurz, Index 92,31 brachystaphylin und wie der ganze Schädel rechts mehr nach hinten gehend wie links. Alveolarfortsatz mittellang; während des Lebens war noch das ganze Milchgebiß vorhanden. Der erste bleibende Molar war schon vollkommen ausgebildet.

Unterkiefer: Körper ziemlich hoch, Kinn gut entwickelt; Äste ziemlich steil gestellt. Zähne ebenso wie im Oberkiefer.

Lebensalter über 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1190 ccm	Ganze Gesichtshöhe	95 mm
Größte horizontale Länge	145 mm	Obergesichtshöhe	50
„ Breite	145	Jochbreite	117
Gerade Höhe	138,5	Gesichtsbreite (Virchows)	88
Ohrhöhe	112,5	Augenhöhlen-Höhe	34
Horizontale Länge des Hinterhaupts	88	„ -Breite	40
Basilare Länge des Vorderhaupts	58	Nasen-Höhe	40
Horizontalumfang	460	„ -Breite	20,5
Sagittalumfang des Stirnbeins	114	Gaumen-Länge	39
„ der Scheitelbeine	96	„ -Breite	36
„ „ Hinterhauptsschuppe	115	Gesichtswinkel	86°
Ganzer Sagittalbogen	325		
Kleinste Stirnbreite	86		
Länge der Schädelbasis	89		
Breite „ „	99		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	100,00	Obergesichts-Index	42,73
Längenhöhen-Index	95,52	Augenhöhlen-Index	85,00
Ohrhöhen-Index	77,58	Nasen-Index	51,25
Hinterhaupts-Index	60,69	Gaumen-Index	92,31

Allgemeine Analyse:

extrem-brachycephal, hypsicephal, orthognath, chamaeprosop, platyrrhin, mesoconch (an der Grenze der Hypsiconchie), brachystaphylin.

Nr. 37.

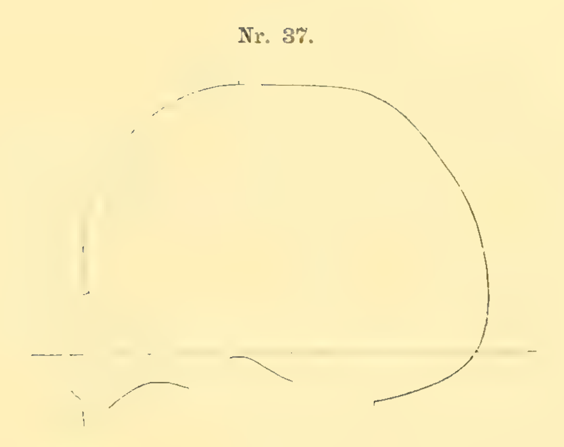


Fig. 37.

Kindlicher Schädel ohne Unterkiefer, wenig deformiert, nur das Hinterhaupt zeigt sich rechts deutlicher abgeplattet, wodurch der ganze Schädel etwas schief geworden ist. Eine Koronalrinne ist kaum, eine Stirndformation nicht nachzuweisen. Über die beiden unteren Ecken der Scheitelbeine ziehen sich gegen die Lambdanaht, diese rechts weiter als links überschreitend, fast drei Finger breite Abflachungen. Das Hinterhaupt erscheint dadurch zusammengepreßt und namentlich nach links vorgewölbt und verlängert. Die occipitale Abflachung umfaßt die Lambdaspitze der Hinterhauptsschuppe und die benachbarten Teile der Scheitelbeine wie gesagt rechts etwas stärker als links.

Sphenobasilarfuge und alle Nähte offen und normal. Alle Verhältnisse sind kindlich.

Der Schädel ist brachycephal, Längenbreiten-Index 84,28, Längenhöhen-Index 81,76 hypsicephal. Die Kapazität beträgt 1180 ccm. Der Horizontalumfang 464 mm, der ganze Sagittalbogen 336 mm.

Der Schädel ist orthognath, Profilwinkel 84°. Das Gesicht ist schmal, Index 50,00 mesoprosop. Wangenbeine und Jochbogen angelegt. Nase lang und schmal, Index 47,43 eben mesorrhin. Nasenstachel groß, Nasenbeine fehlen, das Nasendach war aber breit und offenbar relativ gut gewölbt. Unterrand der Apertura piriformis gerade und flach. Augenhöhlen weit und hoch, Index 91,43 hypsiconch. Augenbrauenbogen fehlen noch. Stirn gut gewölbt mit gut ausgebildeten Stirnhöckern. Ohröffnungen oval. Gaumen ziemlich tief und relativ schmal, Index 82,95 mesostaphylin. Alveolarfortsatz verhältnismäßig lang. Während des Lebens war noch das ganze Milchgebiß vorhanden, der erste bleibende Molar ist schon vollkommen ausgebildet.

Lebensalter ca. 7 Jahre.

Uebersicht der Maasse.

Kapazität	1180 ccm	Ganze Gesichtshöhe	— mm
Größte horizontale Länge	159 mm	Obergesichtshöhe	50
„ Breite	134	Jochbreite	(100)
Gerade Höhe	130	Gesichtsbreite (Virchows)	80
Ohrhöhe	109	Augenhöhlen-Höhe	32
Horizontale Länge des Hinterhaupts	93	„ -Breite	35
Basilare Länge des Vorderhaupts	58	Nasen-Höhe	39
Horizontalumfang	464	„ -Breite	18.5
Sagittalumfang des Stirnbeins	115	Gaumen-Länge	41
„ der Scheitelbeine	100	„ -Breite	34
„ „ Hinterhauptsschuppe	121	Gesichtswinkel	84⁰
Ganzer Sagittalbogen	336		
Kleinste Stirnbreite	86		
Länge der Schädelbasis	87		
Breite „ „	92		

Berechnete Indices.

Längenbreiten-Index	84.28	Obergesichts-Index	(50,00)
Längenhöhen-Index	81.76	Augenhöhlen-Index	91,43
Ohrhöhen-Index	68.55	Nasen-Index	47,43
Hinterhaupts-Index	58,49	Gaumen-Index	82,95

Allgemeine Analyse:

brachycephal, hypsicephal, orthognath, mesoprosop, mesorrhin, hypsiconch, mesostaphylin.

4.

Schlussbetrachtungen.

I. Die Methoden der Schädeldeformation.

Meiner früheren Darstellung der Ursachen der mechanischen Kopfumbildung der Altperuaner von Ancon und Pachacamác[1]) habe ich wenig hinzuzufügen.

Sowohl für die gewöhnlichen Formen der occipitalen Abplattung wie für die der frontalen Deformation ergaben sich keine neuen Gesichtspunkte. Die Befestigung der Kinder auf dem „Kindelbrett“, d. h. auf der „Wiege“ mit mehr oder weniger fester, unnachgiebiger Unterlage für den Kopf, in Verbindung mit dem am Kopfteil der Wiege angebrachten Kopfschutz sind die wesentlichen mechanischen Ursachen der „künstlichen“ Schädeldeformation. „Der verschiedene Bau der Wiegen erklärt (l. c., S. 95 [723]) die große Mehrzahl der scheinbar willkürlichen Deformationen des Kopfes des Kindes, welche um so mehr den Eindruck der Absichtlichkeit hervorrufen, da sie bei den verschiedenen Stämmen verschieden sind, aber der Grund für die verschiedenen Kopfformen liegt in der verschiedenen Form der Wiegen bei den verschiedenen Stämmen.“ Die neuen Untersuchungen haben aber weiter gelehrt, daß für den Erfolg der Deformation auch die ursprüngliche Kopfform ausschlaggebend ist.

Kinder, welche nicht, oder nur kurz in „Wanderwiegen“ befestigt, getragen worden sind, wurden am Hinterkopf nicht oder nur wenig abgeplattet. Trotzdem können aber solche Schädel in extremen Fällen sehr auffallende, anderweitige Umbildungen auch der Occipitalregion aufweisen.

l. c. S. 98 (726) habe ich eingehend die Deformation des einen deformierten dolichocephalen Schädels aus Ancon aus der Sammlung I. K. H. Prinzessin Therese beschrieben und sie auf die Wirkungen eines entsprechenden Kinderhäubchens zurückgeführt, wie ein solches von H. von Schrötter an einem Kinderschädel mit bereits bedeutender Elongation, „Longhead“, aus einem präkolumbischen Gräberfeld in Nord-Chile so anschaulich beschrieben worden ist.[2]) Ich wiederhole die dort gemachten Angaben:

[1]) J. Ranke, Über Altperuaner-Schädel etc. (1900), S. 89 (707) bis S. 100 (728) mit den Abbildungen Fig. 34—41.

[2]) Mitteilungen der Anthropologischen Gesellschaft in Wien, Bd. XXVIII, 1898, S. 46 ff.

Dieser Kinderschädel beansprucht ein hohes Interesse, „da an demselben noch die die Deformation bedingende „Wickelung“ in ihrer ursprünglichen Form erhalten ist, wodurch die etwa noch strittige Auffassung über die Entstehung der peruanischen Langschädel greifbar bewiesen wird“. „Es geht ein aus vielen Schnüren zusammengedrehtes Band in doppelter Tour von der stark deprimierten Stirn und vor den Parietalhöckern unter die Protuberanz des Hinterhaupts, welches von einem netzartig geflochtenen, mit Haaren und Federn geschmückten Korbe umfaßt wurde, der an die Maschen des vorerwähnten Bandes geknüpft war. Der Knoten des Deformationsbandes befindet sich unten am Schädel“.

Es ist, wie ich dargelegt habe, ein Kinderhäubchen aus altperuanischer Zeit, aus dessen Anwendung schon eine stärkere Verlängerung des kindlichen Kopfes, der das Häubchen als Schmuck und Schutz zugleich trug, hervorgegangen war, wie H. von Schrötter sagt: „die Längsdimensionen haben auf Kosten der Querdimensionen zugenommen“.

Ich bezweifle diese Anschauung keineswegs, muß aber das eine hervorheben, daß eine durch ein solches „Kinderhäubchen“ ausgeübte Deformation doch nur dann ein „Longhead“ hervorbringen kann, wenn die Urform des Schädels vor der eintretenden Deformation schon eine dolichocephale gewesen ist.

Bindespuren, welche meist als relativ breite und tiefe Einbuchtungen von der unteren, hinteren Ecke jedes der beiden Scheitelbeine auf das Hinterhaupt übergehen, wie solche nach der obigen Beschreibung der Befestigung des Kinderhäubchens unter der Wölbung des Hinterhaupts des noch weichen Köpfchens entstehen müssen, finden sich, wie die vorstehenden Beschreibungen ergeben, keineswegs nur an „künstlichen Dolichocephalen“, sondern auch an „künstlichen Brachycephalen“. Bei letzteren kommt oft sehr deutlich zu den Druckwirkungen der Wiege noch jene des Häubchens hinzu. Bei den „künstlichen Dolichocephalen“ fehlt die Druckwirkung der Wiege oft ganz oder wenigstens fast ganz, so daß die dolichocephale Grundform des Schädels sich im wesentlichen erhalten konnte.

Die Beschreibung dieses „Kinderhäubchens“ durch Herrn von Schrötter läßt noch manche Frage offen. Ich bin auch jetzt noch der Meinung, daß „wahrscheinlich die Form der die künstliche Dolichocephalie bewirkenden (?) Häubchen bei den alten Bewohnern von Ancon und Pachacamác nicht vollkommen die gleiche war wie jene, welche in Nord-Chile gebraucht wurde“.

Nach dem von mir an meinem Material festgestellten, ausnahmslosen Vorkommen der „Koronalrinne“ ist anzunehmen, daß bei den altperuanischen Kindern unserer Fundplätze auch das freie Kinderhäubchen unter dem Kinn, wie bei unseren deutschen Kindermützchen, gebunden wurde. Bei jenen entstand so die Koronalrinne, bei unseren Kindern der Sattelkopf.

Von dem unter dem Kinn gebundenen Bande des Häubchens ging, nach den Druckspuren unserer Schädel zu urteilen, beiderseits je ein Band aus, ähnlich dem von Herrn von Schrötter beschriebenen, welches unter der Wölbung des Hinterkopfes herumgeführt und wohl hier „unten am Schädel“ mit dem der anderen Seite zusammengebunden wurde.

Wir dürfen annehmen, daß an diesen zwei Bändern, dem „Scheitelkinnband“ und dem „Seitenwand-Hinterhauptsband“, der geflochtene Häubchenkorb befestigt war, dessen Vorderrand das „Scheitelkinnband“ und dessen Unterrand das „Seitenwand-Hinterhauptsband“ bildete.

Bei einigen Schädeln laufen aber nachbarlich annähernd parallel nebeneinander auch von den beiden oberen Enden der seitlichen Schenkel der Koronalrinnen jederseits über die oberen Partien der Scheitelbeine, über den ganzen Scheitel hin, zwei von vorn nach hinten gewendete Druckspuren, welche auf zwei obere, seitliche Verstärkungsbänder des Häubchens zu beziehen sind. Ihre deformierende Wirkung zeigt sich in einer Abflachung resp. Erniedrigung des Schädelgewölbes.

Die Gaffronsche Sammlung hat weiter auch die Erklärung gebracht für die Entstehung der wunderlichsten Deformation der Altperuaner-Schädel: der Schädelform mit zweigelapptem Hinterhaupt.

Ich hatte früher als Ursache der rinnenartigen Vertiefung, über das Ende der Sagittalnaht auf die Hinterhauptsschuppe übergreifend, an einen von der Unterlage des Kopfes auf diesen ausgeübten linearen sagittalen Druck gedacht, wie ein solcher durch einen etwas über die Fläche vorstehenden stärkeren Mittelstab des manchmal aus Stäben zusammengesetzten Bodens der Wiege (s. l. c., Abbildung 37, S. 94 [722]) ausgeübt werden könnte. Die exquisiten Fälle der Zweilappung des Hinterhaupts der neuen Sammlung haben mir nun aber gezeigt, daß auch hier nur die Wirkung von Kinderhäubchen angenommen werden darf. Die Form und der innere Bau dieser Häubchen war von denen der im Vorstehenden besprochenen Häubchen nur wenig verschieden, wie die Druckspuren unverkennbar ergeben.

Von der Mitte der beiden Koronalrinnenschenkel steigt schief nach oben und hinten je eine Druckspur gegen die Mitte der Sagittalnaht in die Höhe. Dabei bleibt eine dreieckige, mit ihrer Spitze nach hinten gewendete, Fläche, aus den vorderen oberen Teilen der Seitenwandbeine gebildet, von der Druckwirkung frei. In der Mitte der Sagittalnaht vereinigen sich die Druckspuren zu einer einzigen, dem Verlauf der hinteren Hälfte der Sagittalnaht folgenden, diese eindrückenden, rinnenartigen Vertiefung. Über dem Hinterhaupt teilt sich diese künstliche „Sagittalrinne" wieder in zwei Schenkel, von denen je einer die hinteren, unteren Enden der Scheitelbeine umgreift und diese kugelig hervorwölbt. Diese Druckspuren vereinigen sich dann mit der nicht fehlenden Druckspur des das Hinterhaupt im Ganzen umgreifenden „Seitenwand-Hinterhauptsbandes".

Als Ursache auch dieser extremen Deformation haben wir sonach an ein „Kinderhäubchen" zu denken. An seinem Vorderrand befindet sich das „Scheitelkinnband", durch welches die Koronalrinne hervorgerufen wurde. Von diesem Band geht wieder als Unterrand des Häubchens das „Seitenwand-Hinterhauptsband" ab, welches unter dem Hinterkopf gebunden wurde. Dazu kommen noch, wie bei der im Vorstehenden zuletzt beschriebenen, die Scheitelpartie abflachenden Form des Häubchens, zwei gegen den Scheitel gerichtete Verstärkungsbänder. Aber während dort diese Bänder nahe am Scheitel abgehen und ohne sich zu vereinigen nach hinten über den Kopf wegziehen, gehen bei der Form mit zweigelapptem Hinterhaupt die beiden Verstärkungsbänder seitlich tiefer von dem „Scheitelkinnband" ab, steigen dann schief nach oben und hinten zum Scheitel empor, vereinigen sich etwa auf dessen Mitte und laufen nun vereinigt der Sagittalnaht entlang. Schon vor deren Ende trennen sich die beiden Verstärkungsbänder wieder, jedes von ihnen umgreift eine Hälfte des noch leicht formbaren Hinterhaupts, und wendet sich dann nach vorne und unten.

Die Zweilappung des Hinterhaupts wird sonach, wie gesagt, durch eine nur leichte

Modifikation im Verlauf der beiden oberen Verstärkungsbänder des Häubchens, denen wir schon bei einer anderen Deformationsform begegnet sind, hervorgerufen.

Auch für diese wunderlichste aller altperuanischen Deformationen der Schädel bedarf es für die Erklärung keiner, „absichtlich" angewendeter künstlicher Druckapparate aus Schienen oder Zirkelbinden. Es genügt dafür, daß das kleine Schmuckhäubchen dem Kopf des Neugeborenen aufgesetzt und hier festgebunden erhalten wird. Der wachsende Schädel fügt sich dem Druckrichtungen der Häubchenbänder an und wölbt sich in seinen von dem Bänderdreieck frei gebliebenen Partien stärker aus.

Die durch die Deformation der Wiege oder des Häubchens erzeugte künstliche Form wird aber bedingt durch die normale Urform des Kopfes ob dolichocephal oder brachycephal. Die Deformation ist, soviel unser Material lehrt, nicht imstande, aus einem Brachycephalen einen Dolichocephalen zu machen. Immerhin kann die ursprünglich normaldolicho- oder mesocephale Kopfform durch Eindrückung des Hinterhaupts durch die Wiege oder durch das „Zweilappung" erzeugende Kinderhäubchen verkürzt und verbreitert werden. Trotzdem wird der primäre Typus der Kopfbildung auch in diesen Fällen nicht unkenntlich gemacht.

II. Die Hauptformen der Schädeldeformation.

I. Aus primär-dolichocephaler beziehungsweise mesocephaler Form der noch undeformierten Köpfe gehen hervor:

Lang-Flachköpfe.

Ungefähr dem, was R. Virchow als künstliche Langköpfe, Dolichocephali artificiales, Langköpfe, Longheads bezeichnete, entsprechend.

Nr. 1 Nr. 2 Nr. 3.

Occipital-frontale Deformation.

Annähernd im R. Virchowschen Sinne, d. h. die Deformation betrifft am Hinterhaupt im wesentlichen die Oberschuppe des Hinterhauptbeins und die, namentlich der Lambdaspitze anliegenden Partien der Scheitelbeine. Die Abflachungen der beiden Stirnbeinseiten sind gut ausgebildet:

Nr. 5 aus Pachacamác Nr. 7 Nr. 8 Nr. 10 aus Pachacamác.

Parallel-Schädel.

Eine extreme Form der occipital-frontalen Deformation. Die Oberschuppe und die Unterschuppe des Hinterhauptbeins, letztere zum größten Teil, sind in eine Ebene flachgelegt, welche dem schief nach hinten geneigten Stirnbein sehr annähernd parallel verläuft. Nur die Spitzenpartie der Oberschuppe, die Lambdaspitze, ist gegen den Scheitel aufgebogen.

Nr. 4 Nr. 6 Nr. 9.

An die Dolichoiden schließen sich an die Nummern 15 (?) und die im allgemeinen nur wenig deformierten Schädel 30, 31, 32. Auch Nr. 13 gehört dem Längenbreiten-

verhältnis nach hierher, obwohl er sich sonst sehr wesentlich unterscheidet. Nr. 13 stammt aus Pachacamác, Nr. 31 und 32, letzterer schwer pathologisch, aus Ancon.

II. **Aus primär-brachycephaler Form** der noch undeformierten Köpfe gehen hervor:

Occipital-frontale Deformation.

Mit deutlich ausgesprochener frontaler Deformation und Deformation der Oberschuppe des Hinterhauptbeins:

Nr. 14 Nr. 15 Nr. 28 Nr. 29 Nr. 34.

Ebenso aber mit Deformation der Ober- und Unterschuppe des Hinterhauptbeins.

Nr. 27 ausgesprochene „Kuchenform“ Nr. 17 Pachacamác.

Die frontale Deformation gering, hauptsächlich besteht occipitale Deformation der Oberschuppe des Hinterhauptbeins:

Nr. 11 Pachacamác Nr. 12 Nr. 16 Nr. 18 Pachacamác Nr. 19
Nr. 20 Nr. 22 Pachacamác Nr. 23 Nr. 24 Pachacamác Nr. 25.
Nr. 26 Ancon Nr. 36 Pachacamác.

Nr. 26 zeichnet sich durch besondere Niedrigkeit aus.

Schädel mit zweigelapptem Hinterhaupt:

Nr. 21 Pachacamác, erste Spuren der Lappung. Nr. 33 Pachacamác, extrem ausgesprochene Lappung. Nr. 35.

Die Stirndeformation ist, wie gesagt, bei allen Schädeln, bei einigen aber nur in Spuren, nachweisbar.

Die aus primär dolichocephaler oder mesocephaler Form hervorgegangenen deformierten Schädel zeigen alle die typische, frontale Abplattung in stärkerem Grade; nur der auch sonst aus dieser Reihe herausfallende Schädel Nr. 13 schwach.

Von den aus primär brachycephaler Form hervorgegangenen Schädel weisen höhere Grade der Stirndeformation auf: Nrr. 17, 21, 24, 28, 29, 33, 34, 35. Hier reihen sich auch die „Übergangsformen“ Nr. 14 und 15 sowie Nr. 22 und 27 an.

III. Die typischen unveränderten Schädelformen der Altperuaner von Ancon und Pachacamác.

Die primär dolichocephalen oder mesocephalen Schädel der Gaffronschen Sammlung, an welche sich auch der einzige Langkopf der Sammlung I. K. H. Prinzessin Therese anreiht, unterscheiden sich von den primär brachycephalen Formen typisch. Die Unterschiede sind so groß, daß man sie als rassenhafte Differenzen betrachten könnte. Ich will sie zunächst als Dolichocephale und Brachycephale von Ancon und Pachacamác bezeichnen.

Die Dolichocephalen stellen einen feinen Typus dar,
die Brachycephalen einen groben Typus.

I. Feiner Schädeltypus.

Abbildung Taf. 7, Fig. 1 und Tafel 8, Fig. 1, 2, 3.

Relativ wenig deformiert darf Schädel Nr. 8 als typischer Vertreter des feinen, primär dolichocephalen Typus gelten, ebenso Nr. 10.

Der Schädel, leider ohne Unterkiefer, stammt Gaffrons Angabe nach, aus Pachacamác, er gehörte einem vollkommen erwachsenen Individuum an. Das Geschlecht ist nicht mit voller Sicherheit zu bestimmen, doch wahrscheinlich männlich. Der Schädel ist im ganzen relativ leicht und zart. Die stark abgeflachte Stirn schmal, stark nach hinten geneigt. Das Gesicht erscheint mit den gut angelegten Wangenbeinen und Jochbogen schmal, der Alveolarfortsatz des Oberkiefers relativ lang und entsprechend schmal mit schwacher, aber deutlicher alveolarer Prognathie. Das Gesicht mit der Fossa canina gut modelliert. Die weiten Augenhöhlen sind im ganzen scharf umrandet. Augenbrauenbogen fehlen. An Stelle der Glabella ein ganz schwacher flacher Stirnnasenwulst, welcher sich über die Nasenwurzel nur in ganz geringem Grade vorwölbt. Der Nasenfortsatz des Stirnbeins bemerkenswert lang. Die Nasenwurzel ist frei, d. h. nicht unter die Stirn eingesenkt, breit-flach gewölbt. Die Nasenbeine sind breit, das Nasendach in der Mitte hoch und entschieden aquilin. Die Apertura piriformis ist ziemlich schmal, der Unterrand derselben nahezu scharf gerandet oder nur ganz schwach abgerundet, ohne Pränasalgruben, Ulmenblatt-förmig. Der vordere Nasenstachel scharf und gut ausgebildet. An dem feinen relativ schmalen Gesicht imponieren am meisten die weit offenen Augenhöhlen und die große, freie Adlernase. Die Schädelbasis ist schmal, ebenso die Pars basilaris des Hinterhauptbeins, die Zitzenfortsätze klein und schwach wie auch das Relief der Muskelansatzfläche an der Hinterhauptsschuppe.

Diese Beschreibung paßt mit geringen Modifikationen auf alle erwachsenen Schädel dieser Gruppe: bei Nr. 2, 5 und 9 sind Jochbeine und Jochbogen noch stärker angelegt, das Gesicht erscheint dadurch noch schmaler; bei Nr. 7 und 8 sind die Jochbeinpartien etwas mehr ausladend; bei Nr. 8 ist der Alveolarfortsatz etwas deutlicher prognath.

Die Schädel Nr. 1, 3, 5 sind kindlich, sie übertreiben gewissermaßen den feinen Typus der Erwachsenen.

Über Geschlechtsverschiedenheiten soll unten einiges beigebracht werden.

II. Grober Typus.

Abbildung Tafel 7, Fig. 2 und Tafel 9, Fig. 1, 2, 3.

1. Männliche Form.

Die wahrscheinlich primär brachycephale Urform dieser Schädelgruppe wird durch den männlichen Schädel Nr. 11, ebenfalls nach Gaffrons Angabe aus Pachacamác stammend wie Nr. 10 der Vertreter des feinen Typus, gut repräsentiert. Der Schädel ist schwer und massig. Der Oberkiefer grob geformt im ganzen und speziell der Alveolarfortsatz kurz, breit. Das breite Gesicht und die Fossa canina nur mäßig profiliert. Die Wangenbeine groß und massig, stark vorspringend; die Jochbogen, namentlich am Jochbeinfortsatz des Schläfenbeins stärker ausgewölbt. Unter der breiten, ziemlich gewölbten Stirn sind die mehr viereckigen Augenhöhlen auffallend grob umrandet. Die stark vorspringenden und geschweiften Augenbrauenbogen bilden auf beiden Seiten nahezu einen vollkommenen Torus supraorbitalis. Der kurze Nasenfortsatz des Stirnbeins wulstet sich,

unter der gut ausgebildeten breiten Glabella, stark nach vorne. Darunter ist die Nasenwurzel tief eingesenkt. Das Nasendach ist etwas kurz, aber schön gewölbt und stark aquilin vorspringend. Die Apertura piriformis ist lang, oben schmal, unten sich ziemlich stark verbreiternd, der Unterrand mit mächtigen Pränasalgruben; der vordere Nasenstachel kräftig. Die Schädelbasis fällt durch bedeutende Breitentwickelung im ganzen auf, die Pars basilaris des Hinterhauptbeins kurz und bemerkenswert breit. Die Warzenfortsätze groß und sehr kräftig; die Muskelansatzfläche an der Hinterhauptschuppe gut profiliert mit mäßigem Torus occipitalis. — Die Unterkiefer des groben Typus sind massig mit gut ausgebildetem Kinn.

2. Weibliche Form.

Während es mir bisher nicht gelungen ist, bei dem feinen Typus mit voller Sicherheit männliche und weibliche Formen zu unterscheiden, wobei der Mangel von Unterkiefern besonders hindernd ist, gelingt das bei dem groben Typus.

Der Schädel Nr. 22 repräsentiert recht gut die weibliche Form des groben Typus.

Der Schädel ist, obwohl im Allgemeinen der groben männlichen Form entsprechend, leichter und im ganzen feiner. Die ausladenden Wangenbeine und Jochbogen lassen das Gesicht breit erscheinen; es ist wegen des ziemlich kurzen, prognathen Alveolarfortsatzes selbst kurz, aber trotzdem mit der Fossa canina relativ gut profiliert. Die Stirn ist breit, die Unterstirn ziemlich geneigt, die Stirnhöcker schwach. Die Oberstirn wölbt sich relativ elegant zum Scheitel. In der Mitte der Unterstirn zeigt sich ein flacher Stirnnasenwulst, welcher sich rechts und links in breite Ansätze zu Augenbrauenbogen fortsetzt, wodurch eine Andeutung einer Glabellareinbuchtung entsteht. Die Augenhöhlen sind weit, etwas eckig, nicht grob unrandet. Die Nasenwurzel ist wenig eingesenkt, breit gewölbt, das Nasendach im ganzen stark aquilin vorspringend. Die mäßig weite Apertura piriformis schief, ziemlich scharf umrandet mit gut ausgebildetem vorderen Nasenstachel. Die Schädelbasis ist im ganzen breit, ebenso die Pars basilaris des Hinterhauptbeins; der Gaumen breit und tief. Die Zitzenfortsätze und das Muskelansatz-Relief am Hinterhaupt schwächer als bei der männlichen Form.

Nr. 16 ist ebenfalls wahrscheinlich eine typisch-weibliche Form. Möglicherweise könnte der Schädel aber auch eine Übergangsform oder Zwischenform zwischen dem groben und feinen Typus darstellen, freilich dem ersteren weit mehr als dem zweiten angenähert. Das Schädeldach ist im ganzen schön gewölbt. Die Unterstirn steigt ziemlich gerade an, die Stirnhöcker sind deutlich. In der Mitte der Unterstirn zeigt sich ein flacher Stirnnasenwulst, welcher nach rechts und links in Anlagen von Augenbrauenbogen übergeht. Die Oberstirn und der Scheitel sind elegant gewölbt. Die Augenhöhlen sind nicht grob umrandet; die Form ihres Eingangs mehr eckig, weit. Nasenwurzel breit-flach gewölbt unter dem Stirnnasenfortsatz nicht eingezogen. Das Nasendach stark, wohl aquilin, vorspringend. Die Apertura piriformis weit, an ihrem Grunde mit flach abgerundetem Rande. Wangenbeine und Jochbogen nicht bemerkenswert ausladend. Der Alveolarfortsatz ist kurz aber nicht sehr breit. Die Schädelbasis ist im ganzen breit, die Pars basilaris des Hinterhauptbeins breit und kurz; Gaumen tief, länger. Der Unterkiefer ist kräftig mit schönem, gut entwickeltem Kinn. — Was sich als Übergang darstellt, sind der relative Mangel der Augenbrauenbogen und die geringe Ausladung der Wangenbeine und der Jochbrücke.

In entschiedenster Weise stellt Schädel Nr. 13 (s. unten) einen Übergang zwischen beiden Typen dar, sodaß er als dolichocephale Form des groben Typus bezeichnet werden darf.

3. Kindliche Form (in der Periode des Zahnwechsels).

Am besten repräsentiert der Schädel Nr. 36 die kindliche Form des groben Typus. Das Schädeldach ist im ganzen schön gerundet. Die Unterstirn steigt senkrecht an, ohne Augenbrauenbogen dagegen mit flachem Stirnnasenwulst. Die Stirnhöcker sind stark ausgebildet. Die Oberstirn und die vordere Scheitelpartie erscheinen elegant gewölbt. Die scharf umrandeten Augenhöhlen sind weit und gerundet. Das Nasendach im ganzen breitflach gewölbt. Die Nasenwurzel unter dem Stirnnasenwulst nicht eingezogen. Wangenbein und Jochbogen noch kindlich angelegt. Gesicht und Fossa canina flach; Alveolarfortsatz des Oberkiefers noch kurz aber der Gaumen tief und breit. Die Schädelbasis im ganzen breit, die Pars basilaris des Hinterhauptbeins auffallend breit und kurz, was im Allgemeinen für den groben Typus ganz charakteristisch ist. Der Unterkiefer ist für das jugendliche Alter bemerkenswert massiv, mit gut ausgebildetem Kinn.

4. Schädelform der Neugeborenen.

Die Schädel des 1. mumifizierten Neugeborenen und des 2. Kopfes eines ebenfalls wahrscheinlich ausgetragenen Kindes und 3. die Mumie einer Frühgeburt sind in die vorstehenden Tabellen nicht aufgenommen. Die Schädelknochen sind zum Teil gegen einander verschoben, so dass die gewonnenen Maße nicht vollkommen sicher sind.

1. Das Neugeborene Nr. 1, welches als vertrocknete Mumie in gestreckter Körperhaltung relativ wohl erhalten ist, gehört durch seine auffallend breiten, gewissermaßen in der Sagittalrichtung gestreckten Scheitelbeine und die Form des Hinterhaupts zweifellos zu einer mesocephalen oder dolichocephalen Schädelgruppe. Auch die Maße sprechen dafür.

Größte Länge des Schädels 99
„ Breite (zwischen 74 und 77) = 75,5 mm.

Danach berechnet sich der Längenbreiten-Index zu 74,7 resp. 77,7, im Mittel 75,8 — ein mesocephales vielleicht sogar dolichocephales Maß.

An der Hinterhauptsschuppe zeigt sich beiderseits eine weit einschneidende Sutura mendosa, rechts 17, links 19 mm lang.

2. Der mumifizierte Kopf des Neugeborenen Nr. 2 hat eine rundliche, entschieden brachicephale Gestalt mit gut gewölbter Schuppe des Hinterhauptbeins,

Größte Länge des Schädels 91
„ Breite „ „ 78

Danach berechnet sich der Längenbreiten-Index zu 85 ein relativ stark brachycephales Maß.

3. Die mumifizierte Frühgeburt Nr. 3 ist im ganzen erhalten, die Beinchen im Knie gebeugt und an den Leib angezogen, die gebeugten Arme an die Brust angelegt, die Händchen rechts und links an dem Gesicht angelegt. Die kleine Mumie könnte ihrer geringen Größe und ihrer Haltung nach eine noch ungeborene Frucht im Mutterleibe gewesen sein. Da das Gesichtchen aber mit roter Farbe (Zinnober?) bemalt ist, wird es als eine Frühgeburt zu bezeichnen sein.

Auch der Schädel dieser Frucht macht durch seine rundliche Gestalt den Eindruck ausgesprochener Brachycephalie. Die Maße bestätigen das:

Größte Länge des Schädels 81
„ Breite „ „ 67

Daraus berechnet sich der Längenbreiten-Index zu 82,71, ein entschieden brachycephales Maß.

Diese kleine Mumie hat ein vollkommenes Os Incae. Bemerkenswert erscheint, daß der Unterrand des Inkaknochens nicht wie bei älteren Kindern und Erwachsenen gerade sondern „amorbogennarbig" gekrümmt verläuft, er sendet in der Mitte eine Spitze, Schneppe, nach unten. Rechts ist noch eine Os Incae laterale dextrum von dem sonst einheitlichen Os Incae abgespalten, der Unterrand des ersteren mißt 16 mm.

Auch bei den noch Ungeborenen und Neugeborenen unserer Totenfelder treten uns sonach zwei typisch verschiedene Schädelformen entgegen

1. eine zur Dolichocephalie neigende Mesocephalie — meinem feinen Typus und

2. eine relativ hochgradige Brachycephalie meinem groben Typus entsprechend. —

Dem feinen Typus gehören an die *erwachsenen* und *alten Schädel* der Nrr. 1, 2, 3, 4, 5 (Pachacamác); 7, 8, 9, 10 (Pachacamác).

Die *jugendliche Form* repräsentiert der Schädel Nr. 37.

Die *kindliche Form* repräsentieren die Schädel Nrr. 30, 31 (Ancon); 32 (Ancon, krank).

Übergangsformen mögen darstellen die Schädel Nr. 14 und 15.

Dem groben Typus gehören an die *erwachsenen* und *alten männlichen Schädel*

Nr. 11 (Pachacamác), 23, 26 (Ancon) und 29

als ganz besonders typisch, dann weiter die

Nrr. 16, 19, 20, 21 (Pachacamác), 24 (Pachacamác), 25, 28.

Die *weibliche Form* des erwachsenen groben Typus — vielleicht zum Teil *Übergangsformen* vom groben zum feinen Typus — repräsentieren die Schädel:

Nrr. 12, 18 (Pachacamác), 22 (Pachacamác) und 27.

Die *jugendliche Form* stellt dar der Schädel Nr. 17 (Pachacamác).

Die *kindliche Form* repräsentieren die Schädel Nr. 33 (Pachacamác), 34, 35 und 36 (Pachacamác).

Schädel Nr. 13.

Eine besondere Beschreibung verlangt der Schädel Nr. 13, welcher mit der Schwere und Grobheit des im allgemeinen brachycephalen, groben Typus, die Dolichocephalie des feinen Typus verbindet.

Er erscheint, wie gesagt, als eine dolichocephale Form des groben Typus.

Auch dieser Schädel stammt nach Gaffrons Bezeichnung von dem Fundplatz Pachacamác. Er macht auf den ersten Blick einen auffallend groben Eindruck, schwer und massig. Die Augenbrauenbogen treten sehr stark, beinahe wulstartig vor und vereinigen sich unter der Glabellareinbuchtung über der Nase zu einem mächtig vorspringenden

Wulst, der sich zwischen die oberen Augenhöhlenränder einschiebt. Darunter ist die Nasenwurzel entsprechend tief eingesetzt. Dies und die im ganzen grob umrandeten weiten Augenhöhlen, die groben, stark vortretenden Wangenbeine mit den ausgewölbten Jochbogen, das dadurch verbreiterte Gesicht mit dem kurzen prognathen Alveolarrand; der breit abgeflachte Unterrand der sonst relativ gut geformten Apertura piriformis mit dem namentlich in seiner rechten Hälfte mangelhaft ausgebildeten vorderen Nasenstachel — Alles das zusammen verleiht dem Schädel geradezu einen wilden Ausdruck. Die genannten Bildungen, auch die groben Zitzenfortsätze und das stark entwickelte Muskelrelief der Hinterhauptsschuppe, durch welche er sich von den übrigen dolichocephalen Schädeln des feinen Typus typisch unterscheidet, reihen den Schädel trotz seiner gestreckten Form ebenso typisch dem brachycephalen groben Typus an. —

So sehr verschieden der feine und der grobe Typus erscheinen, so haben doch beide, wie die Fundumstände und Fundorte ergeben, an den gleichen Orten nebeneinander gelebt.

Weitaus zahlreicher als der feine scheint nach unseren Sammlungen der grobe Typus unter den Alt-Peruanern von Ancon und Pachacamác vertreten gewesen zu sein.

Unter den 33 Schädeln, welche Prinzessin Therese gesammelt hat, ist 1 typisches Exemplar des feinen Typus, der Langkopf Nr. 33 (18) von Ancon. Seinem von dem der übrigen Schädel so auffallend abweichenden, feinen Typus entsprechend habe ich ihn in meiner ersten Publikation wohl fälschlich als einen weiblichen Schädel beschrieben.

Unter den 37 Schädeln der Gaffronschen Sammlung sind wieder zwei, Nr. 31 und 32, als aus Ancon stammend bezeichnet, welche beide dem feinen Typus angehören.

Aber der feine Typus findet sich auch unter den Schädeln von Pachacamác. In der Gaffronschen Sammlung sind von diesem Fundplatz direkt bezeichnet die dem feinen Typus angehörenden Schädel Nr. 5 und 10.

Im ganzen beträgt die Anzahl der Schädel des feinen Typus in der Gesamtreihe aller 70 Schädel 14, wozu noch 2 „Übergangsformen“ kommen. Diesen 14 resp. 16 stehen 54 Schädel des groben Typus gegenüber, oder in Prozenten ausgedrückt:

feiner Typus 23 Prozent
grober „ 77 „

Der Gedanke würde danach vielleicht nahe liegen, den feinen Typus für den der herrschenden aristokratischen Kaste, den groben Typus für den des Volkes zu halten.

Dieser Gedankengang wäre der gleiche, zu welchem betreffs der Schädel der alten Peruaner Gräberfelder ein so ausgezeichneter Kenner wie Dr. J. J. Tschudi durch seine eingehenden Untersuchungen: Über die Ureinwohner von Peru[1]) gelangt ist.

Von seinen vor so langer Zeit schon für Peru aufgestellten „drei scharf geschiedenen Formen von Schädeln“ stimmt nach Abbildung und Beschreibung die erste und zweite Form mit meinem groben und feinen Typus überein.[2]) Tschudi hat, wie ich, versucht, die normale Urform der Schädel, abgesehen von der Deformation, zu finden.

[1]) J. J. Tschudi: Joh. Müllers Archiv für Anatomie und Physiologie, 1844, II, S. 98—109 mit 2 Tafeln.

[2]) Die dritte Form S. 100 und Abbildung Tafel V, 1 ist durch einen so stark deformierten Schädel repräsentiert, daß ich bis jetzt dessen Zugehörigkeit zu einem meiner Typen nicht zu bestimmen vermochte.

Obwohl die gut gelungenen Abbildungen Tschudis für sich schon genügen, diese Übereinstimmung zu konstatieren, so soll doch auch seine Schädelbeschreibung hier wortgetreu wiederholt werden (l. c., S. 99):



Fig. 1.

„Erste Form": „Der Schädel von vorn gesehen, stellt eine abgestutzte Pyramide dar, deren Basis nach oben gekehrt ist. Der Gesichtsteil ist klein, die Augenhöhlen queroval. Der Oberkiefer fällt perpendikular ab. Die Jochfortsätze des Stirnbeins sind beinahe senkrecht nach unten gerichtet und kurz. Die Augenbrauenbogen schwach entwickelt. Die Wölbung des Stirnbeins von der Glabella an ist sanft, beinahe senkrecht bis zu den Augenbrauenbogen und von da bis zur Kronnaht allmählich sich neigend. Die Stirnhöcker sind deutlich ausgeprägt. Die Parietalerhabenheiten der Scheitelbeine sind stark hervortretend, so daß sie die seitlich am meisten vorragenden Punkte des Schädels bilden. Nach den Seiten und nach hinten gehen die Seitenwandbeine fast perpendikulär zur Verbindung mit den Ossa temporalia und dem Os occipitis. Die hintere Wand des Hinterkopfes fällt senkrecht bis zur Linea semicircularis superior ab, und biegt sich dann allmählich schief nach innen und unten zum Foramen magnum."

Die Abbildung Tschudis (unsere Fig. 1) zeigt einen kurzen brachycephalen Schädel meiner jugendlichen oder weiblichen Form des groben Typus entsprechend, mit kurzem Gesicht und kurzem Alveolarfortsatz.

„Zweite Form": „Der Schädel von vorn gesehen, ist oval, von der Seite stellt er ein ziemlich regelmäßiges, etwas gestrecktes Gewölbe dar. Der Gesichtsteil ist groß. Die Augenhöhlen sind mehr viereckig, der vertikale Durchmesser ist gleich dem queren. Der Oberkiefer fällt schief ab. Die Jochfortsätze des Stirnbeins sind sehr stark nach außen gerichtet und kurz. Der Nasenfortsatz des Stirnbeins ist sehr breit und konvex. Das Stirnbein

wölbt sich von der Glabella an, unter ziemlich regelmäßiger, aber stärkerer Neigung als bei der vorhergehenden Form nach hinten. Die Augenbrauenbogen sind verwischt; die Stirnhöcker unmerklich. Die Ossa parietalia neigen sich schon von ihrer Verbindung mit dem Stirnbein nach hinten und unten. Die Scheitelbeinhöcker liegen tief und sind wenig ausgeprägt, so daß sie nicht mehr den größten Querdurchmesser des Kopfes bilden; derselbe geht von der oberen Wurzel des Jochbeinfortsatzes des einen Schläfenbeins zu der des anderen. Der Schuppenteil des Os occipitis steigt von der Lambdanaht ungefähr einen Zoll senkrecht nach unten ab und biegt sich dann plötzlich sehr stark nach vorn um, und setzt sich so mit einer sehr schwachen Neigung zum Horizonte zum Foramen magnum fort."

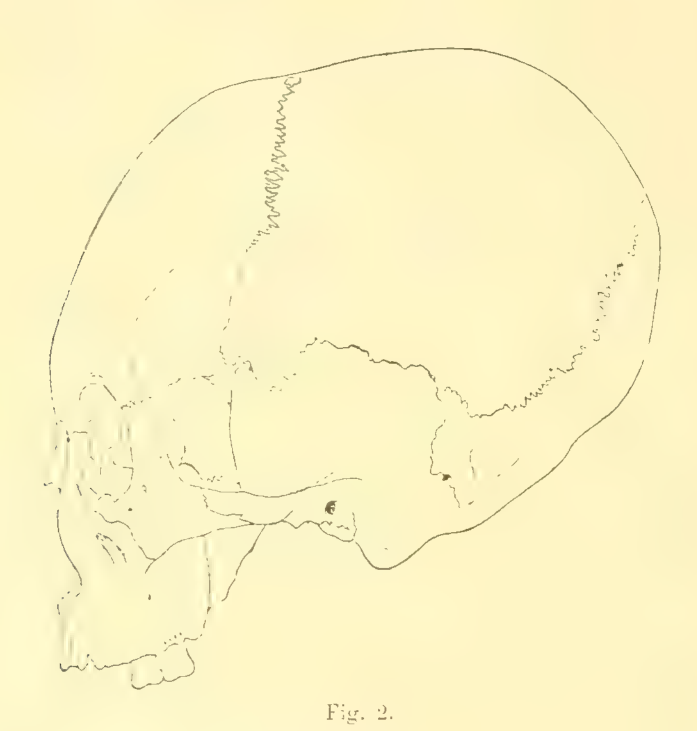


Fig. 2.

Die Abbildung der zweiten Form (unsere Fig. 2) zeigt einen langgestreckten dolichocephalen Schädel mit „großem", d. h. hier hohem Gesicht mit langem Alveolarfortsatz, weiten hohen Augenhöhlen und langer Nase. Besonders charakteristisch sind: das Fehlen der Augenbrauenbogen und der konvexe „Nasenfortsatz des Stirnbeins", d. h. der Stirnnasenwulst an Stelle der Augenbrauenbogen. Tschudis zweiter Form entspricht mein feiner Typus.

Da ich, wie gesagt, die „dritte Form" Tschudis unter meinem Material nicht konstatieren kann, sollen hier nur die noch immer beherzigenswerten Bemerkungen, welche der Forscher über die beiden ersten Formen nach seinen jetzt ca. 70 Jahre zurückliegenden Beobachtungen an Ort und Stelle gemacht hat, im Wortlaut mitgeteilt und so der unverdienten Vergessenheit entrissen werden. l. c., S. 102:

Die geographische Verbreitung der beiden ersten Formen, welche Tschudi als „Rasse“ bezeichnet, war seiner Darstellung nach folgende:

„Die erste (mein brachycephaler grober Typus) nahm die ganze Küstenregion ein, welche nach Norden von Despoblado de Tumbez, nach Süden von der ausgedehnten Sandwüste von Atacama, nach Westen vom Stillen Ozean und nach Osten vom mächtigen Zuge der Küstenkordillera begrenzt ist. Tschudi nennt diese Rasse den Stamm der Chinchas nach der Nation, welche den Küstenstrich zwischen 10 und 14° südl. Breite inne hatte. Die Schädel dieses Stammes werden am häufigsten nach Europa gebracht, da man sie in der Umgegend von fast allen Seehäfen auf meilenlangen Flächen nur von einer dünnen Schicht von Flugsand bedeckt findet.“

„Die zweite Rasse (mein dolichocephaler feiner Typus) bewohnte ursprünglich das ausgedehnte 12000 Fuß über das Meer erhabene peru-bolivianische Plateau südlich vom Gebirgsknoten von Arangara. Tschudi bezeichnet sie mit D'Orbigny als den Stamm der Aymaras; von ihm aus ging die Dynastie der Inkas, welche im Verlauf von wenigen Jahrhunderten alle übrigen Stämme unter ihr Joch brachte.“

Aus Tschudis Beschreibung (l. c., S. 104, 105) der Schädel der „jetzigen Indianer von dem Teil von Peru, welcher früher unter spanischer Herrschaft stand, und die sich noch frei von einer Mischung mit Weißen und Negern gehalten haben“, geht hervor, daß sich eine meinem groben Typus ähnliche Form bei dem größten Teil der Schädel der jetzigen Indianer findet. Ihre Schädelform sei „viereckig“, d. h. doch wohl brachycephal, „der Gesichtsteil stark entwickelt; der Oberkiefer ziemlich schief abstehend; die Augenhöhlen viereckig“. „Der Nasenfortsatz des Stirnbeins ist stark konvex und fällt perpendikulär ab; der obere Orbitalrand ist wulstig aufgeworfen.“ Die Verschiedenheiten in den Formen der jetzigen Indianerschädel wurden von Tschudi aus einer Mischung seiner „Rassen“ erklärt, wobei die eine oder die andere stärker oder weniger stark hervortreten könne. —

Ich möchte bezweifeln, ob ein heutiger Ethnologe und Kenner der betreffenden Gebiete und ihrer Bewohner etwas mehr Zutreffendes als das, was Tschudi als Resultat seiner Forschungen formuliert hat, wird sagen können. Jedenfalls ist es eine lohnende Aufgabe der Lokalforschung, Tschudis Ergebnisse mit allem Ernste nachzuprüfen.

Man hat bis in die neueste Zeit herein Tschudis Angaben verkannt, ich darf wohl sagen, man hat, namentlich von Seite der Kraniologen, dem verdienten Manne unrecht getan.

Ganz allgemein ist bisher die Meinung verbreitet, daß Tschudi die Behauptung aufgestellt habe, die wunderlich deformierten Altperuaner-Schädel entsprächen normalen Rasseformen; er habe die Wirkung der Deformation vollkommen verkannt und das Produkt der künstlichen Schädelplastik für natürliche Formen gehalten.

Diese unrichtige Beurteilung erklärt sich im wesentlichen daraus, daß Tschudi es wie ich gewagt hatte, einer dogmatisch festgestellten Ansicht ausschlaggebender Autoritäten in Beziehung auf das Wesen der peruanischen Schädeldeformation mit Entschiedenheit entgegenzutreten. Da seine Schädelbeschreibungen, noch vor der Retziusschen Ära der Kraniologie veröffentlicht, noch nichts von Brachy- und Dolichocephalie, von Ortho- oder Prognathie berichten konnten, waren sie um so leichter gering zu schätzen.

Tschudi leugnete keineswegs die an vielen Schädeln der altperuanischen Totenfelder sich zeigenden Deformitäten, aber er suchte, und wie wir gesehen haben mit Glück, nach den von diesen nicht vollkommen verdeckten Urformen der Schädelbildung. Dabei ging

er, wie auch ich das getan habe, auf die kindlichen und Neugeborenen-Schädel, ja auf die Schädel ungeborener Früchte zurück. Nicht die Deformationen, sondern die undeformierten Urformen der Schädel erklärt er für erblich und rassenhaft.

l. c., S. 106 wirft er die Frage auf, ob die verschiedenen „Schädelbildungen“ (speziell seine erste Form = mein brachycephaler grober Typus und seine zweite Form = mein dolichocephaler feiner Typus[1]) „vorzüglich durch mechanischen Druck bedingt seien oder nicht“. — „Es ist hinreichend bekannt, daß die meisten Physiologen diese abnormen Formen ausschließlich einer festanliegenden Umhüllung des Schädels durch Binden und Schienen zugeschrieben haben, um so mehr, da ein solches Verfahren bei anderen Nationen nachgewiesen ist, ja sogar für den Chinchastamm in Peru, nach Kirchengesetzen aus den ersten Zeiten der spanischen Herrschaft zu urteilen, mit Gewißheit angenommen werden kann.“

„Dieser Annahme muß ich mich aber durchaus widersetzen. Die Materialien, welche bis jetzt gedient haben, eine solche Hypothese zu verteidigen, sind noch viel zu ungenügend gewesen, denn sie bestanden nur aus Schädeln, die alten Individuen angehört haben. Erst in neuester Zeit wurden zwei Kindermumien nach England gebracht, welche nach der Beschreibung, die Dr. Bellamy davon gibt, zu urteilen, dem Stamm der Aymaras angehörten. Die beiden Schädel zeigen (bei Kindern von kaum einem Jahre) ganz die nämliche Form, wie die erwachsenen Individuen. Bei neugeborenen und ungeborenen Kindern habe ich dasselbe beobachtet. Bei keiner der sehr vielen, vollständig konservierten Kindermumien (sechs davon habe ich nach Europa gebracht), die ich auch mit den vollständig erhaltenen Kleidungsstücken untersucht habe, konnte ich jemals die geringste Anzeige eines Drückungsapparates um den Kopf finden.“

„Ich kann mit Bestimmtheit angeben, erstens: daß der Stamm der Chinchas in einigen Dörfern der Küste sowohl in Nord-Peru als auch in den Tälern der Provinz Yauyos rein vorkommt; zweitens: daß der Stamm der Aymaras in den Hochtälern des südlichen Peru noch häufig unverändert getroffen wird“ — — „bei denen auch nicht die leiseste Andeutung eines Einhüllens oder Drücken des Kopfes der neugeborenen Kinder stattfindet“.

Daß Tschudi die mechanischen Ursachen für die Deformitäten der Altperuaner-Schädel keineswegs verkennt, ergibt sich aus seinen Ausführungen l. c., S. 102, 103:

Die Schädel der Chinchaform „zeigen mehrere Varietäten, welche aber durch Kunst hervorgebracht sind und sogar nach den Lokalitäten abweichen. Man findet nämlich den Hinterhauptteil entweder nach der rechten oder nach der linken Seite stark abgeplattet, so daß die Wölbung des einen Seitenwandbeins ganz verschwindet, während die andere stark hervortritt. Bei anderen aber ist der ganze Schuppenteil des Hinterhauptbeins gleichmäßig gerade gedrückt, so daß die Scheitelbeinhöcker sich sehr stark entwickeln“.

„Daß diese Abnormitäten durch mechanische Einwirkungen hervorgebracht sind, unterliegt keinem Zweifel mehr. Wenn auch auf den ersten Anblick diese Mißbildung zu dem Schluß leiten könnte, daß die oben beschriebene viereckige Schädelform“ (nach unserer Bezeichnung die Brachycephalie) „bloß durch den Druck hervor-

[1]) Von der dritten Form muß ich, wie oben angegeben, absehen.

gebracht sei, so wird durch die Vergleichung einer großen Anzahl Schädel leicht **die typische Form** herausgefunden. Bei Kindern, die noch nicht einem mißbildenden Druck durch Bänder und Schienen ausgesetzt gewesen sind, nämlich bei ausgetragenem, aber noch nicht geborenem Fötus, welche man ziemlich häufig auf den ausgedehnten Begräbnisplätzen der alten Indianer findet, zeigt sich schon die nämliche viereckige" (brachycephale) „Form. Das nämliche gilt auch für die beiden folgenden Rassen, von denen ich ebenfalls Kinderschädel aus dem Fötuszustande zu beobachten Gelegenheit hatte".

Meine Ergebnisse stimmen in allem wesentlichen mit denen Tschudis überein, nur ist es mir bisher noch nicht gelungen, seine „dritte Schädelform" unter unserem Material aufzufinden.

Haupttabelle

der 37 altperuanischen Schädel

von Ancon und Pachacamác

aus der Gaffronschen Sammlung.

Nr.	Herkunft	Kapazität	Grösste horiz. Länge	Grösste Breite	Gerade Höhe	Ohrhöhe	Horiz. Länge d. Hinterhaupts	Basilare Länge des Vorderh.	Horiz. Umfang	Sagittalbogen des Stirnb.	Sag.-Bog. d. Parietalia	Sag.-B. d. Squama occ.	Ganzer Sag.-Bog.	Kleinste Stirnbr.	Länge d. Schädelbasis	Breite der Schädelbasis
1		—	162	130,5	122	106	127	64	465	109	112	116	337	88	76	93
2		1025	168	119,5	116	100	106	67	462	111	106	115	332	83	84	95
3		1020	173	118	125	106	113	67	464	118	121	113	352	84,5	85	86
4		—	167	134,5	118	106	116	66	489	112	113	116	341	92	80	96
5	Pachacamác	1130	165	121	122	109	110	64	462	113	124	113	350	82	82	94
6		—	160	125	133	115	97	66	465	114	95	125	334	88	(86)	92
7		1340	179	132	140	114	113	72	508	126	120	115	361	86	93	102
8		1330	183	126	137	114	115	77,5	510	123	138	112	373	89	94	97
9		1170	174	124,5	136	114	108	69	499	124	116	116	356	76	96	101
10	Pachacamác	1165	167	127,5	134	112	107	66	485	121	123	110	354	85	82	93
11	Pachacamác	1270	172	147	145	116	98	73	513	122	121	122	365	99	100	114
12		1175	163	139	132	113	94	77	486	122	114	106	342	96	95	103
13	Pachacamác	1190	177	131	145	114	104	80	507	125	127	121	373	100	107	102
14		965	151	127	128	110	86	79	466	108	95	109	312	91	92	103
15		—	152	127,5	137	120	—	—	478	113	(123)	(109)	(345)	86	—	(105)
16		—	162	148	140	117	86	76	498	113	111	115	339	96	97	106
17	Pachacamác	—	151	151	138	117	87	58	485	124	117	118	359	94	83	100
18	Pachacamác	—	161,5	155	141	116	89	70	510	117	122	101	340	91	94,5	(108)
19		1325	168	140	143	112	106	69	496	122	122	104	348	86	96	109
20		1170	165	137	138	118	99	72	489	115	110	115	340	93	94	109
21	Pachacamác	1170	155	142	135	114	90	71	488	110	113	117	340	93	88	100
22	Pachacamác	1125	149	142	129	108	88	69	480	115	111	112	338	89	94	106
23		1300	160	141	149	124	92	77	496	113	130	117	360	92	103	110
24	Pachacamác	1130	145	147	138	112	86	70	477	106	207		313	92	87	108
25		1215	158	147	155	122	84	75	494	110	129	114	353	92	98	108
26	Ancon	1265	170	145	138	111	100	80	518	112	118	117	347	99	97	109
27		1130	158	147	123	114	96	64	513	111	95	105	311	92	86	107
28		1040	139	142	137	115	79	65	465	101	120	99	320	92	87	101
29	Kinderschädel:	1225	153	163	127	108	90	71	511	109	103	95	307	93	93	106
30		1105	154	122	125	106	101	55,5	448	119	111	105	335	80,5	77	79
31	Ancon	1035(?)	162	118	128	103	105	60	446	109	110	49+75 124	343	79	(82)	84
32	Ancon (krank)	1095(?)	158	(118)	126	105	102	57	445	—	—	-	(340)	91	78	82
33	Pachacamác	1015	137	154	117	101	81	57	475	95	90	106	291	90	79	97
34		—	140	142	124	103	89	56	443	99	100	105	304	87	80	85
35		990(?)	142	147	114,5	93,5	92	56	458	92	98	100	290	80	(76)	85
36	Pachacamác	1190	145	145	138,5	112,5	88	58	460	114	96	115	325	86	89	99
37		1180	159	134	130	109	93	58	464	115	100	121	336	86	87	92

Mumienschädel Nr. 38 (Ancon) gr. L. 182, gr. Br. 138. L.-Br.-Index 75,82.

Ganze Gesichtshöhe	Obergesichtshöhe	Jochbreite	Gesichtsbreite	Orbita-Höhe	Orbita-Breite	Nasen-Höhe	Nasen-Breite	Gaumen-Länge	Gaumen-Breite	Profilwinkel	Indices: Längen-Breiten-	Längen-Höhen-	Ohrhöhen-	Hinterhaupts-	Obergesichts-	Orbital-	Nasen-	Gaumen-
—	56	112	89	35	36	47	19,6	43	35	80°	80,55	72,19	62,72	75,15	50,00 (61,79)	97,22	41,72	81,39
—	63,5	116	89	37	36	48	20,5	49	33,5	81°	71,13	69,04	59,53	63,09	54,83 (71,38)	102,79	42,71	68,37
—	57	107	79	36	36	44,5	22,5	44	35	82°	68,21	72,25	61,27	65,32	53,27 (72,28)	100,00	50,56	79,54
—	55	110	88	37	36	44	20	43	37	83°	80,53	70,65	63,47	69,46	50,00 (62,50)	102,79	45,45	86,05
—	51	106	78,5	33	33	42	19	44	36	81°	73,33	72,62	64,88	65,47	48,11 (64,96)	100,00	44,29	81,81
—	57	114	83	30,5	35	41	21	48	35	85°	78,13	83,13	74,87	60,63	50,00 (68,67)	87,15	51,22	72,92
—	60,5	125	99	35	39	46	21,5	53	42	77°	73,18	78,21	63,69	63,13	48,40 (61,11)	97,22	46,74	79,24
—	68	123	98	39	37	46	23	58	40	77°	68,85	74,86	62,29	62,84	55,28 (69,39)	105,41	50,00	68,96
—	65	122	91	39	39	49	22,5	51	38	75°	71,55	78,16	65,52	60,92	53,26 (71,43)	100,00	49,38	74,51
101	65	115,5	93	34	36	44	23	51	36	78°	76,34	80,24	67,07	64,07	56,27 (69,89)	94,44	52,27	70,59
101	61,5	131	107	33	42	47,5	24,5	50	47	84°	85,47	84,29	67,44	56,98	46,95 (57,48)	78,57	51,58	94,00
109	64	131	95	34	40	53	27	59	46	78°	85,27	80,98	69,32	57,67	48,86 (67,37)	85,00	50,94	77,96
—	65	136	104	36	42	54	25	58	46	80°	74,01	81,01	63,69	58,10	47,79 (62,50)	85,71	46,29	79,31
107	69	126	101	34	39	51	27,5	56	44	71°	84,11	84,77	72,85	56,75	54,76 (68,32)	87,18	53,92	78,57
—	61	—	94	35	35	49	26	(40)	(35)	83°	83,88	90,15	79,47	—	50,00 (64,98)	100,00	53,06	(87,50)
109	75	136	105	35	42	54	28	58	47	85°	91,36	86,42	72,22	53,08	55,15 (71,43)	83,33	51,85	81,04
—	62	127	89	37,5	38,5	48	21	43	42	88°	100,00	91,39	77,48	57,61	48,82 (69,66)	94,81	45,62	97,68
—	69	132	94	36	41	46	25	—	—	(82°)	95,96	87,36	73,06	54,46	52,27 (73,51)	87,82	54,35	—
109	66	134	98	34	39	50	23	51	40	82°	83,33	85,12	68,29	64,63	49,25 (67,35)	87,18	46,00	78,43
111	71	136	108	35,5	42	52	25	56	43	79°	83,03	83,64	71,52	60,00	52,21 (65,74)	84,52	48,08	76,78
109	64	130,5	107	33	42	45	24	55	42	80°	91,61	87,09	73,55	58,07	49,04 (59,81)	78,57	53,33	76,36
—	64	130	99	32,5	40	48	25	52	48	78°	95,30	86,58	72,48	59,06	49,23 (64,65)	81,25	52,83	92,31
—	67	(133)	101	33	44	53	27,5	54	40,5	81°	88,13	93,13	77,50	57,50	50,37 (66,34)	75,00	51,88	75,00
—	62	128	97	36	43	52	25	50	39	76°	101,38	95,17	77,24	59,31	48,28 (63,92)	83,72	48,08	78,00
—	66	130	99	32	42	52	25	55	41,5	76°	93,04	98,10	77,22	53,16	50,77 (66,66)	76,19	48,08	75,55
123	69	137	104	37	40	56	25	58	43	81°	85,39	81,18	65,29	58,82	51,49 (66,34)	92,50	44,64	74,14
113	68	134,5	99	38,5	42	52	23	43	43	86°	93,04	77,85	72,15	60,76	50,56 (68,69)	91,67	44,23	100,00
102	63	133	96	32	42	49	22,5	46	40	78°	102,16	98,53	82,73	56,84	47,37 (65,63)	76,19	45,92	86,95
109	72	(135)	94	38	44	51	24	51	39	81°	106,53	83,01	70,59	58,82	53,33 (76,59)	86,36	47,06	76,47
86	53	99	73,5	32	31	40	19	38	31	82°	79,22	81,17	68,83	65,58	54,56	103,22	47,50	81,58
—	49	96	75	31	31	37	20	38	34	82°	72,84	79,01	63,58	64,82	51,04	100,00	54,05	89,47
—	46	107	80	33	37	37	20	36	36	84°	74,68	79,75	66,45	64,56	42,99	89,19	54,05	100,00
—	52	108	78	33	35	38	18	40	33,5	85°	112,48	86,93	73,22	59,13	48,15	94,31	42,11	83,75
87	51	104	75	32	32	36	18	38	34	83°	101,43	88,57	73,57	63,57	48,65	100,00	50,00	89,47
—	48	99	77,5	31,5	34	34	17	—	—	(74°)	103,52	80,63	64,44	64,79	48,48	92,65	50,00	—
95	50	117	88	34	40	40	20,5	39	36	86°	100,00	95,52	77,58	60,69	42,73	85,00	51,25	92,31
—	50	(100)	80	32	35	39	18,5	41	34	84°	84,28	81,76	68,55	58,49	(50,00)	91,43	47,43	82,95

Inhaltsübersicht.

Tafel 1.

Schädel Nr. 1.

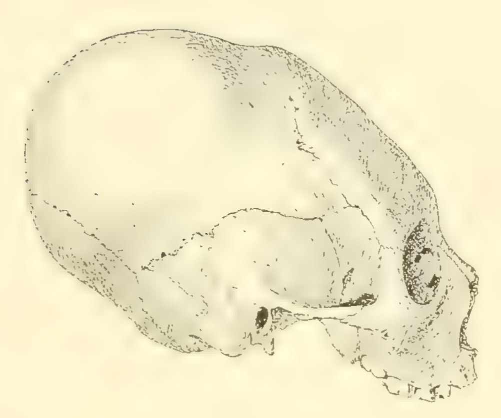


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

Zu Seite 567.



Tafel 2.

Schädel Nr. 27.

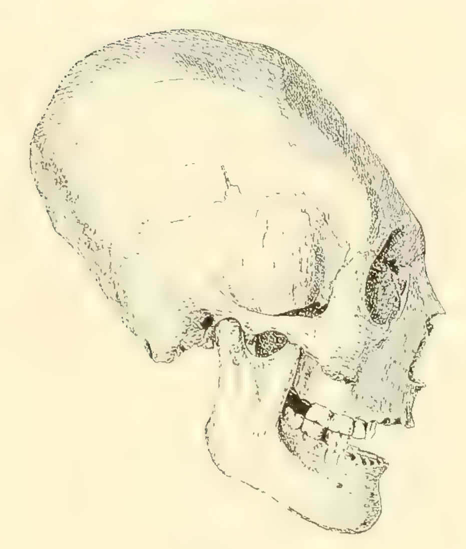


Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.

Zu Seite 619.



Tafel 8.



Schädel Nr. 28.

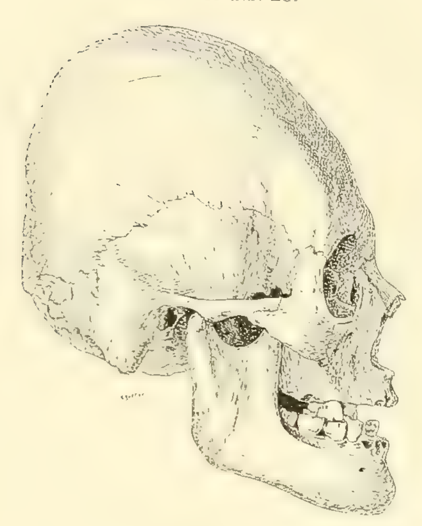


Fig. 1.

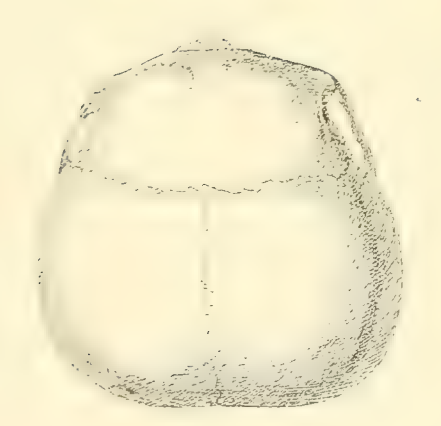


Fig. 2.



Fig. 3.

Zu Seite 621.



Tafel 4.

Schädel Nr. 32.



Fig. 1.



Fig. 2.

Zu Seite 629.



Tafel 5.

Schädel Nr. 35.



Fig. 1.

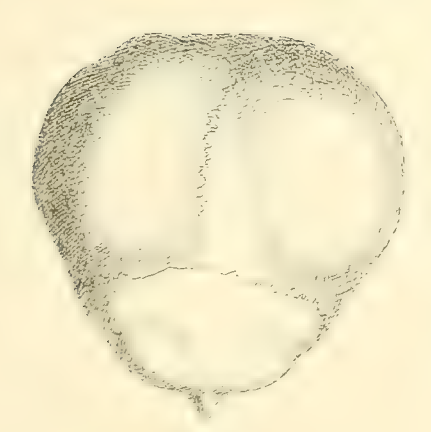


Fig. 2.



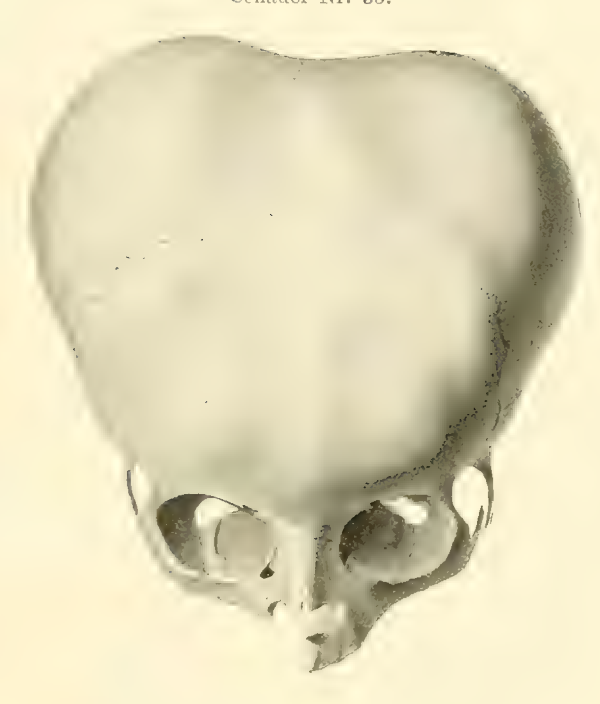
Fig. 3.

Zu Seite 635.



Tafel 6.

Schädel Nr. 35.



Zu Seite 635.



Tafel 7.



Fig. 1. Schädel Nr. 8.



Fig. 2. Schädel Nr. 11 Pachacamác.

Zu Seite 646.



Tafel 8.

Schädel Nr. 8. s. auch Tafel 7 Fig. 1.

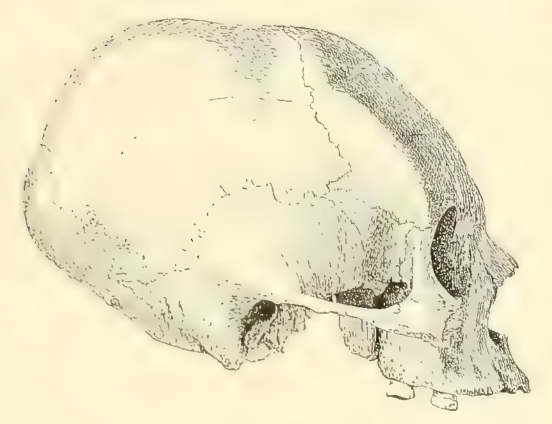


Fig. 1.

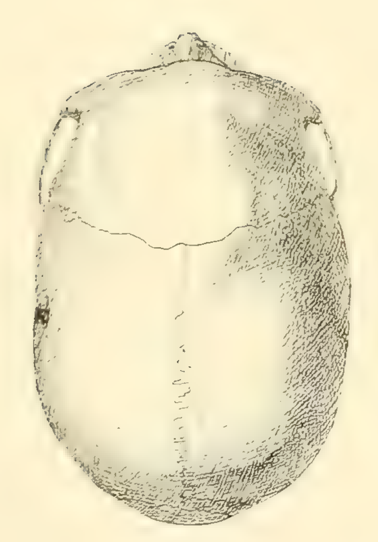


Fig. 2.



Fig. 3.

Zu Seite 646.



Tafel 9.

Schädel Nr. 11 aus Pachacamác
s. auch Tafel 7 Fig. 2.

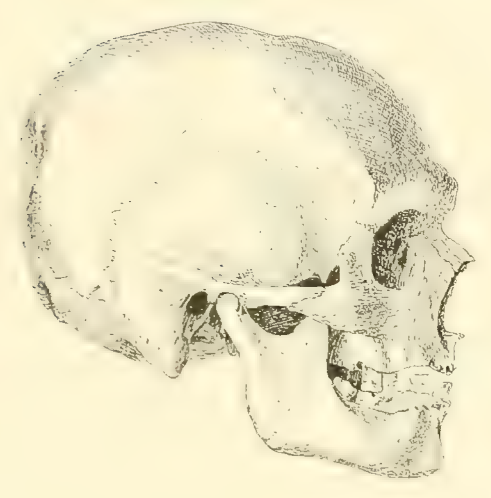


Fig. 1.

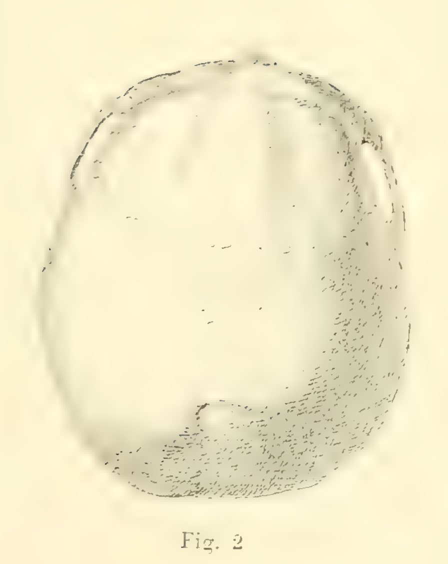


Fig. 2

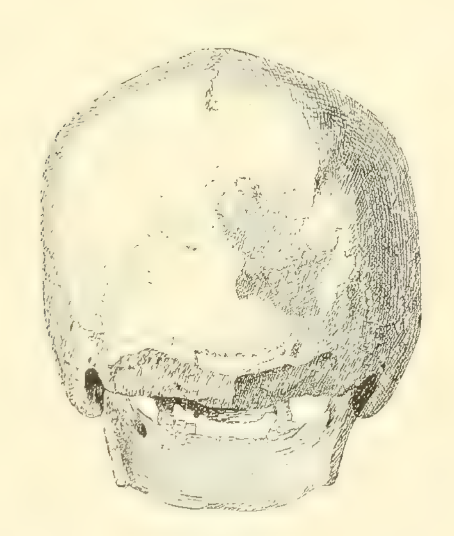


Fig. 3.

Zu Seite 646/647.



Handlirschia Gelasii nov. gen. et spec.

aus dem Schaumkalk Frankens.

Von

Otto M. Reis.

Mit 1 Tafel.



Durch das freundliche Vertrauen des Herrn Paters Gelasius Kraus vom Gymnasium zu Münnerstadt wurde mir ein im Schaumkalk daselbst gefundenes, ihm überbrachtes und von ihm mit richtigem Gefühl als Seltenheit aufbewahrtes Fossil zur Deutung und Bestimmung überlassen; obwohl ein Fragment, ist das Fossil bei seinem sonst ganz vorzüglichen Erhaltungszustand der Oberfläche in vielen Einzelheiten in mehr als nur einer Hinsicht von Anziehung und von Wichtigkeit. Wenn nun auch seine systematische Einordnung und die anatomische Deutung der Nerven nicht geringe, aber doch wohl überwindliche Schwierigkeiten bieten, so besteht, wie aus Nachfolgendem hervorgehen wird, eine vielfache sachliche Verpflichtung, sich eingehendst mit dem sehr interessanten Objekt zu beschäftigen.

Ich benenne die Gattung, die durch dieses Fossil gekennzeichnet wird, nach dem Verfasser des höchst verdienstvollen Werks, des Handbuchs der „Fossilen Insekten“, Anton Handlirsch in Wien[1]; die Art sei dem früheren Besitzer des Stückes, Herrn Pater Gelasius Kraus, der es mit Zustimmung seiner Vorgesetzten der Palaeontologischen Sammlung des Staates in München überlassen hat, dankbarst zugeeignet.

I. Übersicht über den Erhaltungszustand.

Das in Fig. 1 im Abguß dargestellte Fragment sieht im Original (Fig. 2) etwa aus wie das Stück einer Schwanzflosse eines Fisches, dessen axial verdickte Strahlen durch feinste Längsfurchen von einander geschieden, sich doch zu einer enggeschlossenen Fläche zusammenlegen; diese Strahlen, könnte man meinen, seien für sich aus einer Anzahl ebenso durch feinste Furchen separierter Querglieder in Form von plattig-schuppenartigen Gebilden zusammengesetzt.

---

[1] Vgl. Die fossilen Insekten etc. Leipzig, Engelmann 1906—1908, ein Werk, welches den Palaeontologen ermöglicht, nunmehr selbständig wichtige entomologische Gegenstände zu bearbeiten.

Der diese Formen zeigende flache Körper liegt nun wie ein selbständiges Petrefakt auf der bräunlichen, luckig-porösen Schaumkalkunterlage auf; seine Substanz sieht in ihrer dichten, glatten und jeder Skulptur, jeder Porenausmündung etc. entbehrenden Oberfläche, endlich in ihrer dunkelgrauschwarzen Farbe aber durchaus nicht wie „Knochen“ aus! — Bei näherem Zusehen erkennt man auch, daß die fragliche Versteinerungsmasse über den völlig unverletzten Teil des Hinterrandes hinausreicht und daß die allerdings nur schmal erhaltenen Bruchflächen außerhalb des Bereiches der organischen Form ganz genau die gleiche Beschaffenheit haben wie jene innerhalb. Die mikroskopische Prüfung der Masse ergab nun auch, daß sie nicht organischen Ursprungs ist, sondern aus einem sehr fein sedimentierten Kalk besteht.

Somit ist das Formenbild die Folge eines Abdrucks im Schlamm, der eine Lage sehr gleichmäßigen und feinkörnigen Kalkes erzeugte, wie solche in beiden Schaumkalkbänken als dünne Einlagerungen nicht selten sind. Die relativ dünne Kalklage ist um den vorliegenden Fossilabdruck herum, teils bei der Absprengung im Steinbruchbetrieb, teils, wie noch erkenntlich, durch Präparation weggeschafft worden.

An Stelle des oben skizzierten Bildes zeigt nun der hergestellte Abguß als Positiv ein Netz von feinen erhöhten Leistchen, die in faltenartigen Längserhöhungen und -vertiefungen längs- und quergestellt sind; sie bilden eine ziemlich regelmäßige, nach einer sehr gut ausgeprägten Randlinie hingerichtete und dort feinstens endigende Verzweigung.

Hiermit hat man nun das Relief des regelmäßigen Faltenflügels eines Insektes mit Längs- und Queradern und einer deutlichen Aufwölbung der die Adermaschen verbindenden Flügelmembran (vgl. Fig. 1).

2. Allgemeine Charakteristik des Geäders.

Zuvörderst sei bemerkt, daß die eigentlichen, als Längsadern zu deutenden fadenartigen Linien in ihrer Dicke in keinem Verhältnis stehen zu der Tiefe der konkaven Einfaltungen, daß die Queräderchen im Verhältnis zu den zwischen den aufgeblähten Membranfacetten liegenden Vertiefungen stärker sind, als die Längsadern zu den konkaven Falten. Andererseits erscheinen die Rücken der sämtlichen konvexen Falten, in deren Mitte die Adern verlaufen, noch für sich verbreitert und „versteift“. Alles dies spricht dafür, daß nicht die Adern die eigentlichen Stützen des Flügels sind, sondern daß diese durch die Faltungen und Verstärkungen der Flügelmembran geschaffen sind, welche allerdings den Verlauf der Adern einhalten (über Einzelheiten vgl. unten).

So gleichmäßig fein die Ader- und Faltenverzweigungen auf den lineargestreckten Hinterrand des Flügels auslaufen, so zeigen sich doch im Innern des Geäders und Faltenwerks in der Richtung nach der leider nicht erhaltenen Flügelwurzel hin stärkere Unterschiede. — Es fallen insbesondere zwei recht breite konkave Falten auf, deren Tiefenaxe mit der eigentlichen Ader besonders bei der hinteren von beiden stark nach vorne verschoben ist; es entsteht hierdurch in ihr ein vorderes schmales und ein hinteres breiteres Längensegment mit Queräderchen. — Die hinter der letzteren herziehende konvex liegende Ader läuft in beiden Fällen in ununterbrochener, schwach nach vorne konvexer Bogenlinie nach dem Hinterrand. Die zunächst dahinter folgenden Längsadern sind nun zu dieser Stammader oder Stammfalte als wirkliche Verzweigungen oder zweigartige Angliederungen zugeordnet und laufen nun, nur etwas steiler, in ähnlicher Konvexität nach dem Hinterrand. Während nun alle an diesem auslaufenden, noch so schwachen Fältchen, wirkliche Gabelabzweigungen sind, können die innerhalb der äußersten Abzweigungen an den beiden Hauptstämmen selbst sich anschließenden Längsfalten nur „zweigartig" genannt werden; sie konvergieren im Sinne einer Abzweigung nach dem Hauptstamm, haben aber kein Auslaufen ihrer Faltenfirste auf dem First der Stammesfalte. Wenn so diese Teilfalten morphologisch nur zweigartige Falteneinschaltungen sind, so sieht man doch wie sie nach innen, hinten oder auch außen zu in wirkliche Faltenverzweigungen, zuletzt sogar in gleichwertige Faltengabelungen übergehen; die „Einschaltung" ist somit wohl aus der „Verzweigung" abzuleiten. Entsprechend unserer obigen Bemerkung, daß die Faltenbildung sich an die Aderung halte, ist nun in dieser Hinsicht zu betonen, daß die eigentliche Ader in nahezu sämtlichen Fällen im Sinne einer unveränderten Verzweigung nach der Hauptader sich einbiegt und in sie einmündet, so daß man bezüglich der Falteneinschaltung nur von einer sich steigernden „Abdrängung" der Seitenfalten von der Hauptfalte sprechen kann, die wohl als eine Folge der Verstärkung dieser letzteren anzusehen ist.

Als Begleiterscheinung dieser Abdrängung können auch die hier auftretenden, oft eigenartig verzerrten und verzogenen Membranzellen betrachtet werden, welche Umbildung sich sogar durch die wirklich noch bestehende Aderabzweigung auf die jenseitige Fläche der Stammesfalte fortsetzt und erkannt werden kann; hier zeigen sich unregelmäßige Aderteilungen und Anastomosen in den Queradern, das heißt unregelmäßige Einschaltungen und Teilungen der Membranzellen.

Wirkliche Längsschaltadern, d. h. solche, welche von einer richtigen Querader möglichst rechtwinkelig so abstoßen, daß kein Teilstück dieser nach

Richtung oder Stärke als Stammesfortsetzung der Längsader gelten kann, liegen bei unserem Fossil nur in den konkaven Falten und entspringen meist von einer verzerrt rhombisch oder auch trapezoidisch gestalteten Winkelzelle, welche im Scheitelraum einer wirklichen Konvexen-Verzweigung gelegen ist.

Trotzdem also die reichgegliederten Aderkomplexe auch wirkliche Einschaltungen aufweisen, so sind diese doch durch tatsächliche Verzweigungen derart eingeschlossen und zusammengefaßt, daß die natürlichen Adereinheiten sofort ins Auge springen, was für deren Deutung von größter Wichtigkeit ist.

3. Deutung des Nervengeäders.

Als Costa bezeichne ich jene dicke Ader am oberen Rande des Flügeltorsos, welche auf einer flachkonvexen Auffaltung liegt, deren Außenhälfte sehr schmal ist (vgl. *c* in Fig. 3); es zeigt sich hier umgekehrt mit einer Verringerung der Konvexität eine Verdickung der eigentlichen Ader, welche nun die stärkste des ganzen Fossilrestes ist. — Daß hier der Vorderrand des Flügels sehr nahe liegt, geht schon daraus hervor, daß die hinter der Ader folgenden Transversalnerven, die in ziemlicher Stärke nach der Flügelwurzel geneigt entwickelt sind, breit auseinanderstehen; hiermit zusammen hängt eine starke Spannung der Membran an dieser Stelle und die Entwickelung einer vorderen schwächeren und hinteren stärkeren „Begleitleiste", welche sich an die benachbarten Längsadern engstens anlegt. An den Verlauf der Quernerven legt sich ebenso von beiden Seiten her eine feine Kantenerhebung an, welche vorne und hinten zusammengeschlossen den Nerven selbst nicht mehr in der entstandenen Vertiefung herausblicken läßt; auf eine ähnliche Tatsache kommen wir unten zurück! Auf der Außenseite der Costa macht sich ein sehr schmaler, wie rundlich vertiefter Saum bemerkbar, an dessen Außenrand eine sehr feine Längskante (Ader?) verläuft; es scheint dies ein Analogon des sehr wohl erhaltenen Hinterrands des Flügels zu sein, welcher einen ebenso nach oben umgebogenen Verdickungssaum mit einer Längsader trägt (vgl. unten).

Als Subcosta (*sc*, II) halte ich den nächsten Längsnerv, an welchen sich der oben erwähnte feine Zwillingsfaden anfügt; sie läge in einer flachkonkaven Falte, deren eine (vordere) Muldenfläche das oben erwähnte schwach costoanal gewölbte, großzellige Längsband bildet, deren andere Fläche aber eine größere Anzahl schmälerer, schon stark aufgeblähter Membranzellen trägt; das Verhältnis zwischen beiden ist 5 : 8 Zellen auf die gleiche Länge.

Die letzterwähnte Fläche ist zugleich die Vorderfläche einer sehr starken und breiten Auffaltung, welche ich als dem Radius (*r*, III) angehörig deute, deren

Hinterfläche bis zum Flügelrand erhalten ist; die ganze distale Verzweigung fehlt bis auf einige schwache periphere Reste. Was von dem der Flügelwurzel genäherten Teile vorliegt, zeigt deutlichst den Beginn einer Zweiteilung, nicht nur in zwei Faltungsfirsten, von welchen der hintere, schmälere schärfer und höher ist, sondern auch in einer auf eine Einschaltung von zwei Längsadern hinauslaufenden Aderteilung und Zellvermehrung. Dies und die Winkelgröße des Gabel weisen im Verein mit der schon nicht unbeträchtlichen Entfernung der Gabelungsstelle von der vermutlichen Spitze des Flügels auf eine nicht geringe Verzweigung in dem Sektor, welcher zwischen dem vorderen und hinteren Gabelarm gelegen ist; vor letzterem, welcher in ununterbrochener, nach hinten verzweigungsloser Bogenlinie nach dem Hinterrand zieht, bemerkt man hier noch drei nach vorne, d. h. nach diesem Sektor-Innenraum zu gerichtete, kleinere Zweige, wie wir sie in vollständiger Erhaltung an dem nächsten Sektor gleich besprechen werden.

Das Zwischengeäder gibt in dem erhaltenen Teil des Winkelraums von Radius und Radius sector zu einigen Bemerkungen Anlaß; im Scheitel ist die Aderung noch etwas undeutlich. Es lassen sich, soweit die Querzellen den Gabelungswinkel noch einheitlich überbrücken, am Fossil selbst eigenartige kleine und flache trichterartige Vertiefungen inmitten der Zellmembranen erkennen, welche in der Mitte eine noch kleinere Pustel tragen; im Positiv erscheinen kleine warzige Erhebungen mit einem kleinen Loch. Solche Wärzchen werden auch bei den Palaeodictyopteren *Homoioptera* und *Rhabdoptilus* (vgl. Handlirsch, l. c. Taf. X Fig. 19 und Taf. XI Fig. 1—2) erwähnt; es sind dies Gattungen, bei denen das Quergeäder nicht wie sonst kleinzellig ist. Man darf wohl hieraus auf einen Besatz mit kleinen Schutz- oder Schmuckgebilden schließen (vgl. unten Näheres), wohl auch darauf, daß man es mit der Oberseite eines Flügels zu tun hat.[1])

Nach außen von dieser Region mit den Wärzchen setzt mit der Verbreiterung des Winkelraumes auch eine Teilung der Querzellen ein; hiermit erkennt man den Beginn einer vorderen konvexen und einer hinteren konkaven Längsschaltader.

Die Queradern der Hinterfläche der Rad.-sect.-falte sind ebenso dicht gestellt und gestaltet wie jene der Vorderfläche, soweit sie erhalten ist; nach der konvex zum Hinterrand gerichteten Umbiegung der Ader zu werden die Membranzellen, die hier auf dem Stamme senkrecht stehen, etwas breiter.

[1]) Nach dieser Seite waren also die Zellmembranen konvex aufgebläht und der Hinterrand des Flügels emporgebogen. Diese Orientierung wird auch dadurch bestätigt, daß einer der konkaven Falten am hinteren Flügelrand ein einspringender Winkel entspricht (vgl. S. 666).

Als Medialis (m) ergibt sich darnach der gesamte Komplex von der zunächst konkav liegenden Ader (IV) bis zu der durch eine noch etwas breitere Einfaltung bezeichneten konkav liegenden Ader (VI), deren Auslaufen auf den Hinterrand durch eine schwache Einziehung daselbst (einspringenden Winkel) gekennzeichnet ist; es ist der Komplex, der aus der großen mittleren Gabelung eines starken einheitlichen Stammes am Bruchrand des Fragments entspringt.

Der vordere Aderzweig hat einen ununterbrochenen Bogenlinienverlauf, auf welchen vom Hinterrand her sechs Abzweigungen auslaufen, welche weniger dem Aderkonnex als der Falte nach als „Einschaltungen" zu bezeichnen wären; von diesen bleibt eine, die zweite von außen, einfach, drei weitere teilen sich einmal, die hinterste zweimal, und zwar alle erst dem Rande genähert; diese Endzweige bilden am Rande ein gleichmäßiges Auslaufen feiner Fältchen, welche sich natürlich verschmälern und verflachen.

Der hintere Aderzweig der Medialis gabelt sich ungefähr in der Mitte; sein vorderer Gabelarm zeigt vier einseitig nach hinten gerichtete Abzweigungen, durch welche die Bogenlinie des Stammes geringe Knieabbiegungen erhält; sein hinterer Gabelarm teilt sich nun 2—3 mal in fast gleichmäßigen Verzweigungen (die dritte findet an der hintersten Verzweigung statt), durch welche sowohl vorne wie hinten die Bogenlinie der Adern durch stumpfwinkelige Achselbuchten unterbrochen ist.

Wie diese Verzweigungskomplexe von zwei Hauptachsen von m abgehen, so sind sie auch in auffälliger Weise von einander getrennt durch eine von dem Gabelscheitel bis zum Flügelrand laufende, in breiter Einfaltung konkav liegende Ader. Diese Ader, die nach dem Rand zu sich verdünnt und dort durch die auslaufenden Queräderchen zickzackförmig geknickt ist, erscheint als die typischste „Schaltader" des erhaltenen Teils des Flügels. Sie entspringt etwa von der siebten der unpaaren Queradern im Winkel der Hauptgabelung; diese Querader erhält so durch die Angliederung der Schaltader einen nach innen stumpfwinkeligen Knick (die Membranzelle wird fünfeckig). Dieser Knick ist auch bei den übrigen mehr peripher liegenden Schaltadern nur etwas weniger stumpfwinkelig; da aber hier die Abzweigung meist schon von der ersten Querader im Gabelungswinkel stattfindet, so entsteht eine verzerrt rhombische Winkelzelle.

An den erwähnten „falschen" Einschaltungen bzw. den eingeschalteten Zweigfalten ist diese Winkelzelle meist verlängert und verzerrt, welche Unregelmäßigkeit auch an den Zellen auf der anderen Seite der Abzweigung zu bemerken ist. Auffällig ist auch, daß alle jene nach hinten gelegenen Abzweigungen sich auch in etwas unregelmäßigen Abteilungen und Aderverzweigungen der Querzellen vor den betreffenden Stämmen oder Stämmchen kundgeben.

Es ist noch übrig, einiges über das distale Geäder bis zum Flügelrande zu sagen, was zugleich auch für den noch nicht im einzelnen gedeuteten Teil des Hauptgeäders zu gelten hätte.

Die Queräderchen sind in den konkaven Längsfalten durch die Längsschaltadern in zwei ungleichbreite Reihen (Längssegmente) gestellt, da jene nicht ganz in die Mitte der Konkavität, sondern etwas nach vorne verschoben sind; die im allgemeinen kürzeren vorderen Äderchen (bzw. Membranzellen) stehen senkrecht auf ihren zugehörigen vorderen Stämmchen, während die meist längeren hinteren sich mehr parallel der Körperachse oder senkrecht zum Flügelhinterrand zu stellen streben. Die Membranzellen sind ausnahmslos durch verhältnismäßig dichten Stand der Queräderchen stark querverlängert und immer nach außen (oben) gebläht (vgl. S. 665 Anm.); dies gilt sogar für für die kleinsten, mehr quadratisch gestalteten zunächst des Hinterrandes.

Wir haben oben erwähnt, daß die Hauptaderstämme eine breite Versteifung aufweisen, welche darin besteht, daß zugleich mit einer steileren Aufbiegung der seitlichen Faltenfläche eine Verbreiterung des Rückens der Falte eintritt (Fig. 5—7); diese ist nicht etwa die Folge irgend eines späteren Druckvorgangs, sondern ist als ursprünglich durch eine (auch bei rezenten Flügeln beobachtete) mit ihr eintretende ʃ-förmige seitliche Ausbiegung des queren Aderverlaufs gekennzeichnet. Gegen den Rand des Flügels ist auch in den konkaven Fältchen eine solche durch die Flügelmembran verursachte schwache Versteifung zu bemerken, so daß eine gewisse, wenn auch nicht vollständige Gleichmäßigkeit auch hier ausgedrückt ist. Eine Ungleichheit in den konvexen und konkaven Falten zeigt sich aber hier doch darin, daß die ersteren statt einer Aderkonvexität auf dem breiten Aderrücken eine entsprechende feine Rinne (Fig. 7) aufweisen, die sich im Negativ des fossilen Objekts an einem feinen medial gelegenen Wulststreifchen zu erkennen gibt. Die Erscheinung ist im Negativ des Originals besser zu studieren als im Positiv der künstlichen Abgüsse, welche die wie in Erz gegossene Feinheit des Fossils nicht wiedergeben können.

Diese an allen auf den Hinterrand auslaufenden Adern gleichmäßige Merkwürdigkeit verlangt eine gesonderte Ableitung und Deutung, weil auch am Vorderrand und am Postkostalfeld Ähnliches beobachtet wurde. Die erwähnte Versteifung äußert sich in einem entweder nach vorne oder auch nach hinten etwas über die Membranfelder überhängenden Rand, so daß zwischen der mittleren Ader und dem Versteifungsteil eine Senke entsteht; diese Senke vertieft und verbreitert sich z. B. auf der Vorderseite der Hauptfalte von *m* nach dem Flügelrand zu und rückt mehr und mehr nach der eigentlichen

Ader, welche sich verdünnt und zuletzt verschwindet; so zeigt sich endlich auf allen randlichen Verzweigungen und konkaven Einschaltungsfältchen eine mediane Rinne, welche an dem Randnerven abstößt. Wie nun dieser Sammelrandnerv die Vereinigung sämtlicher erhabenen Nerven der konkaven Falten ist, so scheint auch eine Einigung aller jener auf ihn auslaufenden Rinnen dadurch gegeben zu sein, daß der gesamte hintere Flügelrand sich nach oben umbiegt, wodurch jener Sammelnerv also in einer nach oben offenen Randrinne liegt; es ist dies eine analoge, lediglich durch die Flügelmembran gebildete Versteifungsvorrichtung des Flügelrandes.

Das beschriebene Verschwinden der konvex liegenden Ader ist vielleicht dadurch unterstützt, daß die Ader hier auf der Unterseite des Flügels stärker vortritt, wie ja ein völlige Kongruenz der oberen und unteren Flügelplatte durchaus nicht die Regel ist. Auch am postkostalen Längsband wurde (S. 664) ein ähnliches stellenweises Verschwinden der eigentlichen Quernerven erwähnt.

Hinter der oben beschriebenen Verzweigung von *m* liegt in der konkaven Falte eine Ader (VI), welche morphologisch völlig jener (IV) gleichwertig ist, welche hinter *rs* den Beginn der Medialis bezeichnet; es ist dies der vordere ungeteilte Ast des Cubitus, hinter welchen die Hauptfalte des Cubitus sich erhebt; auf diesen laufen nun genau so von hinten außen her die Verzweigungen des Cubitus aus wie auf der vorderen Hauptfalte der Medialis die zugehörigen Zweige. Die Hauptfalte des Cubitus hat auch den gleichen ungeknickten, konvex nach vorne gebogenen Verlauf, den breiten Versteifungsrücken, auf welchem die eigentliche Ader nur einen recht geringen Raum einnimmt. Der dachförmige Abfall der Falte nach vorne ist ebenso flacher und viel breiter als der viel steilere hintere Abfall. Die Trennung dieses Faltenkomplexes vom vorhergehenden ist ungleich auffälliger als die der Medialis vom Radius.

Von vier vorderen zweigartigen Falteneinschaltungen auf der Hinterseite des Faltenstammes ist die hinterste auch der Aderverbindung nach eher eine Einschaltung (Fig. 5) zu nennen. Wie die beiden unvollständigen dahinter folgenden Adern zu deuten sind, ob die erste sich noch mit dem Hauptstamm verbindet, ob die zweite schon den Beginn der Analis kennzeichnet, das ist leider nicht zu entscheiden; jedenfalls ist noch mit einem nicht unbeträchtlichen Teil des Flügels nach der Wurzel zu hier ebenso zu rechnen, wie am distalen Ende des Fragments nach der Flügelspitze zu.

Bemerkenswert ist die nach hinten eintretende Verflachung der Faltungen und die hiemit auftretende Verringerung der Längenunterschiede der

mehr in medial gelegener konkaver Längsader zusammentreffenden Membranzellen. Auffällig ist die starke Verbreiterung der hintersten konkaven Falte, deren Längsader schon möglicherweise ein vorderer ungeteilter Zweig (VIII) der Analis ist.

Die distalen Partien des Flügels verhalten sich hier wie bei der Medialis; auf den Rand stoßen auch hier ziemlich gleichmäßig verlängerte Zellen nahezu senkrecht auf. Überall zeigt sich auch die erwähnte Rinne.

Die mechanischen Momente in der Adergestaltung.

In der bei Insektenflügeln ja weit verbreiteten, aber bei *Handlirschia* besonders stark ausgeprägten alternierenden Längsfaltung der Flügelmembran nach konvex und konkav liegenden Adern tut sich nicht nur eine sagittale (costo-anale) Verschmälerung des Flügels kund, sondern es kann darin auch eine Verstärkung im Zusammenhalt des Adernetzes in Hinsicht auf eine etwas ausgreifende Verlängerung des Flügels erkannt werden. Es zeigt sich hierin das gleiche mechanische Prinzip, das die Faltung und Nervatur der Blattflächen der Pflanzen beherrscht. Man erinnere sich, daß ein in Längsfalten gelegtes Papier als improvisierter Fächer zum Luftfächeln gegen quere Abknickungen viel besser gesichert ist als ein flaches ungefaltetes Blatt, dem man andernfalls eine starke nach unten konkave Wölbung geben müßte; letztere wird indessen beim Insektenflügel auch erstrebt und äußert sich auch bei *Handlirschia*.

Für *Handlirschia* ist nun besonders zu betonen, daß die eigentlichen Adern an einer Faltenverstärkung sehr geringen oder keinen Anteil haben, daß dagegen die Membran des Flügels eine besondere Rolle bei der Versteifung und Verbreiterung der konvexen Falten spielt, dadurch daß in den im Sinne einer nach unten konkaven Krümmung an und für sich steif aufgeblähten einzelnen Zellenmembranen die einfache Aufblähung in den nebeneinanderliegenden Zellen streifenweise unterbrochen ist und so durch verminderte Aufblähung und gemeinsame Änderung des Neigungswinkels zu seiten der Adern eine summarische Kantenwölbung oder Biegung ohne irgend welche Beteiligung der Adern selbst hervorgerufen wird. Zu diesen Versteifungen, die wir schon erwähnten, gehört auch die S. 667 ausführlich behandelte Tatsache, daß der Innenrand der Versteifungsbänder (bzw. der Membranen selbst) gegen die Ader sich emporhebt und mehr nach dem Hinterrand zu von beiden Seiten nach innen vorrückt, so daß gegen den hinteren Flügelrand hin an der Stelle des erhabenen Aderfadens auf dem Faltenfirst eine feine mediane Rinne auftritt. Eine weitere Erscheinung dieser Verstärkungstendenz ist die verdickte Empor-

biegung des hinteren Flügelrandes, in der wie in einer Halbrinne die Randsammelader verläuft.[1])

Zum Verständnis dieser Differenzierungen ist die Annahme berechtigt, daß die Flügelmembran schon an und für sich zäh und dickhäutig oder pergamentartig gewesen, daß sie zu zonaren oder streifigen Verstärkungen geeignet und geneigt war; dies wäre eine allgemeine mechanische Vorbereitung des Flügels zur Widerstandsfestigkeit, neben welcher aber auch noch speziellere Eigenheiten in der Architektur des Faltenbaus von Interesse sind.

Wir sehen in erster Linie die stärksten Faltenerhebungen zwar nicht unmittelbar, aber naturgemäß doch nahe am Vorderrand des Flügels zusammengedrängt; wir sehen hiermit zusammenhängend in costo-analer Querlinie (senkrecht zum Hinterrand) mit verhältnismäßig geringerer Faltungshöhe auch breitere konkave Längsfelder auftreten; hier erreichen die Falten eine stärkere Konvexität erst mit der Annäherung an die Flügelwurzel.

Bei den vorderen konvexen Falten erkennt man eine flachere Vorderseite und eine steilere Hinterseite; erstere ist breiter, letztere schmäler. Dies läßt sich auch dadurch kennzeichnen, daß man sagt: je eine konkav liegende Ader sei fast senkrecht unter die konvexe Ader wie zu deren eigenem Schutz weiter nach vorne verschoben. Die Queradern bzw. deren Zellen der steilen Fläche stehen offenbar zur Stütze der tiefen Faltenader auf der versteiften konvexen Ader senkrecht, während jene der flacher nach vorne geneigten Faltenflächen sich mehr in der Flugrichtung und senkrecht zum Hinterrand einstellen; erstere Stellung ist eine Sicherung gegen die beim Flug auf die Flügelfläche von unten her möglichen Verbiegungseinwirkungen; letztere Einstellung sichert die konvexen Längsadern gegen Verbiegungen vom Vorderrand her. — Alle diese Verschiedenheiten zwischen Vorder- und Hinterseite der Falten gleichen sich nach dem Hinterrand und nach der Analregion aus.

In der Gabelung des Radialkomplexes zeigt sich indessen gegenüber jener dahinterliegenden der Medialis schon deutlich die Beeinflussung durch die Nähe des Vorderrandes des Flügels, da die vordere Gabelfalte jenes breiter und stumpfkantiger als die hintere wird, wobei sie sich auch etwas nach vorne senkt.

Mit dieser bemerkbaren Neigung (Gefälle) der äußeren Flügeloberfläche nach dem Vorderrand zu stimmt auch die ganz geringe Aufbiegung von der Subcosta nach der Costa, woselbst die Queraderung für die Randlage in hohem

[1]) Ähnliches zeigen die Queradern des Costal-Subcostalfeldes; auf gleichen Zweck hinaus laufen auch die „Begleitleisten“ der Costa, Subcosta und des erhaltenen proximalen Teiles der Tiefenader hinter dem Radius sector und jener hinter der Medialis, allerdings bei der letzteren in sehr zarter Entwickelung.

Maße charakteristisch ist, wie auch eine Verdickung der Costalader selbst in umgekehrtem Verhältnis zur Verringerung der Auffaltung hiemit übereinstimmt.

Wenn so der Vorderrand des Flügels zum Durchschneiden der Luft wohl eingerichtet und gestärkt ist, so wirkt in gleichem Sinne die Verflachung der breiteren Vorderflächen aller konvexen Längsfalten halbkeilartig; in diesem Sinne sind auch zur Verringerung der Widerstände auf diesen flacheren und breiteren Flächen die stark verlängerten, aber ziemlich dicht gestellten Adern und Zellen in der Flugrichtung eingestellt. Dagegen mag durch die Widerstände an den steilen Flächen der Falten von der vorderen Unterfläche der Flügel her eine Einwirkung zu drehenden Bewegungen gegeben sein (vgl. unten S. 671). Hierbei zeigt sich auch die Konkavität der unteren Flügelfläche.

In der Tendenz dieser gesamten Ausgestaltung liegt auch die Verstärkung des vorderen konvexen Zweiges der Medialis und des Cubitus; an diesen in ununterbrochener, bogenartig gespannter Krümmung verlaufenden Stammfalten fehlen alle Verzweigungen nach vorne, während die letzten und hintersten Verzweigungen der hinteren Gabelfalte der Medialis sich fast gleichmäßig nach vorne und hinten vorspringend gabeln.

Wenn sich so in allen Einzelheiten eine gleichheitliche Differenzierung in der Orientierung nach vorne bzw. hinten zur Erleichterung der Flugtätigkeit und zur Stärkung eines verlängerten und verschmälerten Flügels zu erkennen gibt, so stimmt hiermit die ganz außergewöhnliche Streckung des Hinterrandes selbst. Nirgends findet sich bei Schnellfliegern im Tierreich eine rundlich konvexe Ausbiegung des Hinterrands des Flugorgans; bei solchen findet sich vielmehr die Hauptwirkung auf die konvexe Vorderrandgestaltung gelegt; der Hinterrand ist deswegen gestreckt oder gar konkav eingebuchtet; er hat keine eigene Funktion. — Bei Betrachtung der Faltenlinien von *Handlirschia* kommt man zu der Ansicht, daß der Hinterrand wohl auch konkav gestaltet wäre, wenn ihm nicht durch eine besondere Versteifung noch eine Funktion, die der Sicherung des Längszusammenhangs der verdünnten Hinterregion des Flügels, gegeben worden wäre. So laufen auch die randlichsten Zellen in gleichmäßig verlängerter Form senkrecht auf diesen „gespannten" Hinterrand aus.

Zwischen ähnlich gesichertem Vorderrand und Hinterrand erheben sich so die Hauptfalten zu einer nach unten gewendeten Konkavität, welche Konkavität das postcostale Band in Gesamtheit und alle Zellmembranen im kleinen nachahmen. Wenn ich auch dies im Sinne der Stärkung gegen quere Abbiegungen (vgl. oben S. 669) auffasse, so will ich nicht verkennen, daß im einzelnen durch die besondere Ausgestaltung der Falten (vgl. Redtenbacher) auch eine gewisse Drehung des Flügels um seine Längsachse möglich sein wird.

Da nun im allgemeinen jede Fortbewegungsmöglichkeit auf der tatsächlich gewordenen Überwindung von vorhandenen Bewegungswiderständen beruht, so sind jene Verstärkungsvorrichtungen die wichtigsten, welche mit der zum Zweck der Überwindung jener dienlichsten Form auch zugleich die höchste Sicherung gegen die dabei möglichen Schäden verbinden, wie bei *Handlirschia.*

Morphologische und physiologische Kennzeichnung der Architektur des Flügels.

Wir sehen im Gesamtbild des Faltenwurfs des erhaltenen Flügels und in seinen Einzelheiten eine Neigung, die Hauptverstärkung des Baus nach vorne zu verlegen und die nächstliegenden Teile daran von hintenher zweigartig anzugliedern, die Angliederungen von der Vorderseite her aber vollständig auszuscheiden; die Bezeichnung eines solchen Flügelbaus würde man nach dem naheliegenden Vergleich mit der Terminologie bei Fischflossen als uniserial wählen müssen, die Lage der Achse wäre propterygial, die Lage der Verzweigung wäre postaxial zu nennen. Ein großer Teil der Insektenflügel ist nach Aderung und Faltung uniserial gebaut und zwar mit propterygialer Flügelachse, welche in der Hauptsache summarisch durch Costa, Subcosta und Radius gebildet wäre. Der Insektenflügel ist nun eine völlige Einheit, während die Fischflosse aus zwei Teilen verschiedener Entstehung besteht: aus einem reichlicher und für sich beweglichen, äußeren Strahlenskelet und einem inneren mehr als Ganzes bewegten Trägerskelet, die sich aber beide zu einheitlicher Wirkung zusammensetzen. In der überwiegenden Zahl der Fälle ist die Achse des Innenskelets bei den Fischen metapterygial, wenn auch in einer ebenso überwiegenden Masse die mechanische Achse des sog. äußeren Skelets sich gleichzeitig zu propterygialer Lage (besonders bei Fischen mit knöchernem Außenskelet) entwickelt; dies gilt nicht nur für die Flosse im ganzen, sondern auch für mehr oder weniger selbständige Einzelkomplexe von Strahlen im Innenbau des Flossenlappens.

Gleichzeitig propterygiale und metapterygiale Achsenbildung in dem mechanischen Stützsystem der Flügelfläche haben auch manche Insektengruppen, wie z. B. manche Neuropteriden (wo der Radius sector sich sehr stark verbreitert und Medialis und Cubitus eine hintenliegende Achse bilden) oder manche Mantoideen, wo die Hinterflügel deutlichst zwei dynamische Achsen im Geäder besitzen.

Die Neuropteriden zeigen auch den Übergang zu völlig biserialem Typus, da sich hier stellenweise eine starke, nach dem Vorderrand gerichtete (praeaxiale) Verästelung von der Subcosta aus entwickelt und die erwähnte metapterygiale

Achsenbildung verschwindet, d. h. ihre Zweigbildung jener postaxialen des Radius sector gleichgestellt wird. Bei Verlängerung des Hinterflügels zeigt sich hier (vgl. Handlirsch l. c. Taf. V Fig. 14) rein biserialer Bau. Solche Anordnung der Adern zeigen auch gewisse Locustoideen, Grylloideen, Blattoideen (vgl. Handlirsch l. c. Taf. I Fig. 8, 9, 10; Taf. II Fig. 7, 11, 14; Taf. III Fig. 1, 2); es ist von fossilen Formen einstweilen abgesehen.

Einen entschiedenen Schritt zu rein metapterygialer Achse macht z. B. der Vorderflügel der Phasmidengattung Phyllum[1]) siccifolium L. (vgl. auch Handlirsch l. c. Taf. I Fig. 23).

Wir sehen nun bei geologisch alten Insektentypen, bei den Palaeodictyopteren wohl propterygiale dynamische Achse für den ganzen Flügel, für die einzelnen Aderverzweigungen für sich aber, nicht zu verkennen, noch praeaxiale Abzweigungen. Bedenkt man nun, daß bei einer nicht geringen Zahl von Palaedictyopteren der Radius eher wie ein praeaxialer Zweig der Radialgruppe aussieht und von dieser weg die Subcosta zwar nicht als tatsächlicher Zweig, jedoch in Fiederdivergenz auf den Vorderrand ausläuft (vgl. z. B. Handlirsch l. c. Taf. IX Fig. 6; Taf. X Fig. 13; Taf. XI Fig. 1) und daß die ebenso alten Protoblattiden (vgl. l. c. Taf. XV Fig. 16—22) ganz entschieden biseriale Aderanordnung besitzen, so könnte die Frage aufgeworfen werden, ob auch bei dem Pterygium der geflügelten Insekten der biserialen Aufreihung des ursprünglich in einer Reihe gleichwertiger Trachealelemente veranlagten Organes jene Bedeutung zuzuschreiben sei, welche ein nicht geringer Teil von Ichthyologen und Anatomen der biserialen Flosse der Fische als einen „Archypterygium“ zu erkennen möchte; dies könnte auch vom Flügelbau der *Handlirschia* dadurch gestützt werden, da sich hier ein Extrem propterygialer Achsenbildung und postaxialer Fiederung als eine doch offenbar sekundäre und differenziertere Ausstattung kundgibt.

In Übereinstimmung mit einer von ihm über den biserialen Bau mancher Fischflossen gegebenen Deutung hat nun der Verfasser auch über das Auftreten uniserialer und biserialer Fiederung an den Trachealanhängen lebender und fossiler Ephemeridenlarven[2]) sich dahin ausgesprochen, daß der uniseriale

[1]) Brogniart, Faune entom. de Commentry, 1873, Taf. XXVI Fig. 6.

[2]) Vgl. Abhandlungen der Senckenb. Naturf. Ges., Bd. XX S. 124 etc. und Rech. géol. le long du chemin de fer de Sibérie, 29. Livr., S. 37. Letztere Abhandlung: Über eine Binnenfauna der Fischschiefer in Transbaikalien, deren Druck schon längere Zeit (1906) abgeschlossen wurde, ist erst im Juni 1909 erschienen; ich konnte daher auch den inzwischen erschienenen größten Teil des Werkes von Handlirsch nicht berücksichtigen, das insbesondere bezüglich der von mir l. c. S. 35 Anm., angeschnittenen Punkte vielfach klärende Ausführungen und Tatsachen beibringt. Daß übrigens zur Entwickelung der Flügel und Tracheenatmung für das ursprünglich halb amphibiotisch lebende „Protentomon“ eine durch besondere

und biseriale Bau dieser auch als Beihilfsorgane der Bewegung dienenden segmentalen Anhänge phylogenetisch gleichwertige Abwandlungen eines Urzustandes wären, welche eher physiologisch und biologisch als anatomisch und phylogenetisch verstanden werden sollten; es wurde dargetan, daß der biseriale Bau nicht archipterygial genannt werden dürfe, wohl aber palaeopterygial sei, d. h. in älteren Formationen unter geringer differenzierten Wasserverhältnissen bei älteren Typen bestimmter Körpergestaltung und Bewegungsarten vor dem uniserialen vorwiege. Hiefür sei auch auf die von A. Handlirsch [1]) bekannt gemachten permischen Ephemeridenlarven verwiesen, deren Tracheenkiemen auch biserial gefiedert sind, bei denen nun wie bei lebenden Ephemeridenlarven dann auch die biseriale Fiederung an allen drei Schwanzfäden zu beobachten ist.

Bei lebenden Larven läßt sich nun auch erkennen, daß biserial gefiederte Anhänge bei Larven geringerer Beweglichkeit, uniserial gefiederte mit propterygialer Achse bei Larven mit schneller und lebhafter Schwimmfähigkeit zu beobachten ist, wie auch sonst bei vielen niederen Tieren biseriale oder „crossopterygoide“ Fiederung von Bewegungsorganen oder Körperanhängen die „Schwebeformen“ charakterisieren. Überall läßt sich auch erkennen, daß der Typus der Fiederung sich dann bei allen Anhängen ähnlicher Funktion wiederholt; so fällt, wenn wir auf die Fische zurückgreifen, ebenfalls auf, daß mit biserial gefiederten oder stark crossopterygoiden Schwebe- oder Gleichgewichtssteuerflossen in den paarigen Extremitäten auch meist Homo-(Diphyo-)cerkie im Bau der Schwanzflosse auftritt. [2])

Wenn wir diese Erörterungen auf *Handlirschia* anwenden, so können wir diese Gattung jedenfalls als einen Schnellflieger und nicht als einen Schwebe-

erdgeschichtliche Umstände erzwungene Auswanderung aus dem Wasser und ein zeitlich ausschließlicher Aufenthalt auf dem trockenen Lande, worauf bei Ephemeriden etc. wieder eine Rückkehr der Larven ins Wasser erfolgt sein dürfte, nötig war, das möchte ich ebenso für zu begründen halten, wie Handlirsch zur Erklärung der Holometabolie klimatische Anpassung annimmt, welche besonders nach der permischen Eiszeit tiefgreifende faunistische Unterschiede hervorbrachte. Handlirsch hält auch die Phryganidenlarven mit guten Gründen für sekundäre Wasserbewohner (l. c. S. 1253). Diese Rückkehr ins Wasser mag zu verschiedenen Zeiten und mit verschieden starkem Erfolg bei verschiedenen Typen vor sich gegangen sein; ebenso wie die Anpassung, welche zur Holometabolie führt, polyphyletisch eintreten und verschiedenen Grad der Vollkommenheit erreichen konnte (vgl. l. c. S. 1249).

[1]) Handlirsch, Mém. Akad. Petersburg, XVI, 1904 und „Fossile Insekten“, S. 387, Taf. XXXVI Fig. 1719; hier zeigen sich nach Handlirsch auch archaistische Merkmale im Kiemenbesatz!

[2]) Umgekehrt sind sog. Heterocerkie und propterygial verstärkte paarige Flossen miteinander vergesellschaftet; diese sind lebhaft und stoßweise durchschneidenden Bewegungen zu dienen geeignet, seien sie nun propulsatorisch oder lediglich steuernd oder beides zugleich. Gestreckt homo(diphyo)cerke Schwanzflossen zeigen aber das entgegengesetzte Extrem, das der langsam schlängelnden Bewegung, zu welcher biseriale paarige Flossen mehr das Schwebe-Gleichgewicht erhaltend beihelfen mögen.

flieger kennzeichnen; propterygiale Lage, Verteilung und Verstärkung der Aderstämme sprechen ebenso hiefür wie der in ganz extremer Weise und sonderbar gestreckte Hinterrand.

Es ist somit auch anzunehmen, daß der fehlende Teil des Flügelgeäders und auch die ganze Flügelform eine dieser Charakteristik entsprechende Gestaltung haben wird; dies ist uns zu einem Restaurationsversuch behilflich, worüber noch einige Worte erlaubt seien.

Nach unsern eben gegebenen Deutungen enthält das in Rede stehende Flügelfragment die 4 bzw. 5 Hauptfelder des aus 5 bzw. 6 Hauptfeldern bestehendeu Baus des Insektenflügels; hierzu ist folgendes zu bemerken:

Wie man annehmen kann, daß der widerstandsfähigste und der den beiden Seitenenden am entferntesten liegende mittlere Teil des Flügels sich am ehesten erhalten haben dürfte, so kann auch vorausgesetzt werden, daß bei der seltenen Schönheit der erhaltenen Einzelheiten auch der wichtigste Abschnitt quer durch den mittleren bis proximalen Flügel uns vorliege.

Die Deutung, die wir im Vorhergehenden durchführten, läßt auch nur über den äußersten Teil des Vorderrands und über die Analregion mehr oder weniger kleine Zweifel übrig.

Nachdem wir uns nun über Flügelform, über den Typus des Geäders vergewissert haben, wird es bei der auffällig regelmäßigen Wiederkehr gleichartiger Verzweigungsverhältnisse in 2—3 Adersystemen auch möglich sein, sich über den nicht mehr erhaltenen Rest des Flügels eine, wenn auch subjektive Vorstellung zu bilden. Zu derartigen zusammenfassenden Rekonstruktionsversuchen haben auch moderne Entomologen um so eher gegriffen, wenn es sich dabei nicht so sehr um den Vertreter einer Art, sondern um isolierte Funde von Gattungs- oder Familientypen handelt, besonders aus Formationsgebieten oder Schichtkomplexen mit seltenen Funden, die daher eine um so wichtigere Rolle im Zusammenschluß unserer Kenntnisse spielen müssen.

Das gegebene Bild, Fig. 3, zeigt in dem hell gehaltenen restaurierten Teil die denkbar einfachste Vorstellung von einem Flügeltypus, der durch den *Handlirschia*-Rest repräsentiert sein kann.

Einzelheiten werden nun noch durch das nachfolgende Kapitel erörtert werden. Es sei nur noch bezüglich der physiologischen Kennzeichnung bemerkt, daß, wenn auch nach Redtenbacher und Brongniart die Entwickelung zu höchster Flugtüchtigkeit sich in einer bis zum Verschwinden von konkaver und konvexer Lage der Nerven, ja bis zur Reduktion von Nerven sich steigernden Vereinfachung des Flügelbaues äußert, schon auch eine wohl-

ausgeprägte Bestandsdifferenzierung der Nerven an und für sich (ohne Reduktion) im Sinne der Hebung des Flugvermögens nach Brongniart einwirkt.

Schon das sonst nicht gar häufig bis in die kleinsten Verzweigungen durchgeführte äußerst strenge Alternieren der Längsfalten bei *Handlirschia* darf in dieser Hinsicht angeführt werden, ganz abgesehen von der gleichzeitig nach vorne und nach der Flügelwurzel erkennbaren verschiedenen Wertung der Vorder- und Hinterseiten der Längsfalten, von der Verschiedenheit in der Aufblähung der Zellmembranen etc., was alles auf einen einheitlichen Grundzug der Architektur des Geädernetzes hinweist und eines ohne das andere als etwas Unvollkommenes erscheinen ließe.

Wenn wir nun die äußeren Anzeichen der höchsten Flugfähigkeit, wie wir sie bei lebenden Fliegern zu beobachten Gelegenheit haben, bei diesem so alten Typus weder erreicht finden, noch als erreicht voraussetzen dürfen, so ist hiermit doch die Möglichkeit einer außerordentlichen Flugfähigkeit nicht ausgeschlossen. Man darf hierbei nicht außer acht lassen, daß die andere Seite des Flugvermögens, die virtuelle Seite, die Leistungsfähigkeit eines Typus in dem äußeren Bau der Flügel gar nicht unmittelbar zum Ausdruck kommt, bei Fossilien daher über Zahl der Flügelschläge, über ihre Amplitude und über Ausdauer im Fluge alle Anzeichen fehlen. — Hier darf aber ins Feld geführt werden, daß das alles in günstigstem Umfang vorausgesetzt werden darf, wenn im Bau des Flügels eine bis ins kleinste gehende Ausprägung für solche dem Flug vorteilhafte Momente und der Ausscheidung aller ihm nachteiligen Gestaltungen bemerkt wird; denn das deutet sicher auf eine starke Inanspruchnahme. Zum Schluß sei angeführt, daß *Handlirschia* einen Flügeltypus repräsentiert, der jenem entgegengesetzt ist, den z. B. Brongniart als fächerförmigen bezeichnet, der in breiter und kurzer Ausbildung, mehr als Fallschirm dienend, bei Typen geringerer Flugfähigkeit vorkomme (vgl. l. c., 1893, S. 235).

Unter fossilen Formen kommt nun dem Typus der Schnellflieger jedenfalls der der Megasecopteriden besonders bezüglich des regelmäßigen Faltenalterierens, der Flügelform, des merkwürdig gestreckten Hinterrandes sehr nahe; dieser bis in die Region der Analader linear fortgesetzte Hinterrand verlangt bei einem verhältnismäßig schmalen und langen Flügel eine stielförmige Basis des Flügels wie sie auch bei lebenden Odonaten und häufiger bei Dipteren zu beobachten ist. Die Megasecopteriden zeigen aber bezüglich *Handlirschia* im Innern der Flügelkonstruktion sehr verschiedenartige Merkmale: das Fehlen jeglicher Schaltadern und eine bis in die Flügelmitte reichende basale Verschmelzung in den vorderen Hauptadern. Hierin sind wieder die

mit den Megasecopteriden von Handlirsch in nähere Verwandtschaft gebrachten Panorpaten ursprünglicher und zeigen in der Anordnung der hohen Adern viele Ähnlichkeiten mit *Handlirschia.* Ein Unterschied in der Flügelform der Megasecopteriden scheint mir gegenüber *Handlirschia* hervorgehoben werden zu müssen; die Einbiegung des analen Teils des Hinterrandes zum Flügel-„stiel“ nimmt bei jenen oft über die Hälfte der Flügellänge ein; ich vermute, daß dieser Teil bei *Handlirschia* relativ beträchtlich kürzer ist. Diese Ähnlichkeit mit dem Megasecopteridenflügel ist natürlich eine Konvergenz; sie darf aber deswegen betont werden, weil man daraus entnehmen kann, daß auch bei Insektenflügeln ähnliche Wirkungen, ähnliche mechanische Momente bei sehr verschiedenem inneren Bau erreicht werden können, so daß die Annahme nicht gerade zwingend ist, daß gleiche mechanische Ziele notwendig auch auf eine völlige Kongruenz des inneren Baues hinwirken müssen; die Merkmale des letzteren müssen daher systematisch einen höheren Wert beanspruchen.

Wenn die Megasecopteriden nun nach Brongniarts Auffassung in Flügelform und Reduktion des Geäders sicher gute Flieger gewesen sind, so darf das verhältnismäßig viel reichere Geäder von *Handlirschia* zu dem der Megasecopteriden nicht in Gegensatz gestellt werden, denn es wird darauf ankommen, von welchen Ausgangsgruppen aus die „Differenzierung“ stattfindet. Im Gegenteil dürfte geschlossen werden, daß *Handlirschia* auf Urformen mit reichster Entwickelung an Aderverzweigungen und an Schaltadern zurückzuführen sei, und so die bemerkbaren Reduktionen und Differenzierungen als Kennzeichen hoher Flugtüchtigkeit in sich schließe.

4. Beziehung zwischen Adern und Falten bei den Pterygogenen.

Wir erwähnten oben, daß bei *Handlirschia* die Subcosta in einer konkaven Falte gelegen sei; dies würde nicht nur mit dem gewöhnlichen Verhalten bei lebenden Pterygogenen stimmen, sondern auch mit dem bei fossilen Formen, da, wo es sicher möglich ist, Ober- und Unterfläche der Flügel zu unterscheiden. Ich erwähne hier besonders z. B. Brongniarts *Mischoptera* aus dem Karbon (Faune entom. terr. prim., Taf. XXIX und XXX), *Lambroptychia* (l. c., Taf. XXXV Fig. 7), *Microdictya* (Taf. XXXIX Fig. 1) oder auch Joh. Walthers *Kaligramma Haeckeli* in Jenaische Denkschriften, Festschr. Haeckel, Taf. VIII.

Unter den konkav liegenden Nerven ist die Subcosta die konstanteste und zeigt bei ihrer Erhaltung gewisse Vorbeugungsmaßregeln, daß diese konkave Falte beim Flug nicht nach hinten zusammengedrückt wird. Nach Redtenbacher ist daher die Subcosta entweder nach dem Radius zurück-

geschoben und teils fest der Länge nach auf große Strecken mit ihm verwachsen oder sie ist durch zahlreiche oder verstärkte Transversaladern mit Radius und Costa verbunden (Bändchen der Odonaten).

Fossile Odonaten zeigen hier zwischen Costa und Subcosta näher der Flügelwurzel zwei etwas divergierende verstärkte Quernerven (vgl. z. B. Deichmüller, Mitt. a. d. K. min. geol. Mus. Dresden 1886, Taf. III Fig. 4), welche über die Costa hinaus bis zum Radius reichen; es sind dies Homologien mit der „nodalen" Endigung der Subcosta, deren quere Verstärkung auch bis zum Radius reicht, sich hier noch den Radius sector angliedert und ihn so sehr verschiebt, daß er als postaxialer Zweig der Mediana betrachtet werden könnte; da aber jenem Verlauf auch die Entwickelung der radialen Tracheenverzweigung folgt, so kann hieran nach Redtenbacher, Comstock und Needham kein Zweifel bestehen (vgl. auch S. 682[1])).

In Übereinstimmung mit diesen marginalen Kennzeichen sehen wir bei *Handlirschia* die Subcosta in einer flacheren konkaven Falte und von der Costa (I nach Redtenbacher) durch ein schwach costo-anal gewölbtes Feld mit breit auseinanderstehenden stärkeren Queradern getrennt, deren Membranzellen fast gespannt und nicht wie alle übrigen stark nach unten konkav (nach oben gebläht) sind. Als besondere Merkwürdigkeit gilt hier auch, daß die ganz regelmäßig, aber schwach costo-anal (transversal) gewölbte Membran nach den die Zellen umgrenzenden Adern randlich fein leistenartig verdickt emporgeworfen ist, so daß einerseits die Queradern selbst rückgebildet sind, wenigstens nicht einmal mehr in ihrem mittleren Verlauf und zwar in neuentstandener schlitzförmigen Furche erscheinen, während andererseits neben der Costa und der Subcosta bzw. eine dünne und eine dickere Längsleiste als Begleitleiste auftreten. Eine ähnliche Längsleiste verläuft präcostal und dürfte mit der leistenartigen Aufbiegung des Hinterrands des Flügels gleichbedeutend sein (vgl. S. 667—668).

Hierdurch scheint also die Deutung der Subcostalfalte (II nach Redtenbacher) wohl über allen Zweifel erhoben zu sein. Hiermit ist aber auch die Deutung der konkaven Falte als die des Radius (III nach Redtenbacher) von selbst gegeben, welche hier, wie dies schon Kliver (Palaeontogr. XXII. S. 260) auch von der alten *Dictyoneura* erwähnt, die höchst gelegene Falte der Flügelfläche ist (vgl. unten); es kann die in ihren Anfängen vorhandene Gabelung mit den sich im Winkel andeutenden drei Einschaltungen (eine mittlere konvexe und zwei konkave) nur dem Radius und dem Radius sector angehören, welche gegen den Flügelrand hin ein nicht unbedeutendes Verzweigungsfeld entwickeln müssen. Der ganze Radialkomplex würde bis zu einer konkav-

liegenden Längsader reichen, mit welcher wir oben die Beschreibung der Medialis eingeleitet haben.

Da uns die Abzweigungsart und -stelle dieser tiefen Ader nicht bekannt ist und ihre nähere Kenntnis voraussichtlich so leicht durch neue Funde nicht erwartet werden kann, so ist es notwendig, hier nach anderen Kennzeichen zur Feststellung der Zugehörigkeit dieser tiefen Ader zu suchen.

Die nächste nach hinten auf die Subcosta folgende Tiefenader (konkav liegende Ader) ist die von Redtenbacher mit IV bezeichnete Ader (Orthopteren) oder vielmehr Falte mit Resten von der Längsader (Neuropteren)[1]; an diesen Resten oder an der sie fortsetzenden oder vertretenden Tiefenlinie stoßen die Queräderchen völlig ab und überkreuzen sie nicht (vgl. Brongniart, l. c. S. 382). Solche Falten können also nicht einfach als regellose Bildungen innerhalb der die eigentlichen Adern querverbindenden Membranzellen betrachtet werden, sondern sind Bildungen zwischen den Zellen, also den Längsadern homolog. Die mechanische Notwendigkeit erhält also allem Anschein nach die Tiefenfalte selbst da, wo (durch die offenbar den Zerrungen zu sehr exponierte Lage der Tracheenzweige) diese zur Reduktion kommen, daher auch die Längsadern selbst zum Verschwinden neigen. — In die bestehenden Tiefenfalten können dann wieder benachbarte Höhenfalten ganz oder teilweise in eine Tiefenfalte hereinbezogen werden, wie wir ja andererseits oben auch erwähnten, daß bei *Handlirschia* die Tiefenader besonders von vorneher durch ihre nach vorne verschobene Lage und die Stellung der queren Nerven gestützt werde. — Es ist dann sehr schwer, über die Provenienz eines Tiefennerven selbst bei lebenden Pterygogenen Klarheit zu schaffen, ob es ein solcher primärer ist oder ob er nachträglich in diese Tiefenlage gekommen ist. Man vergleiche hierzu die Verschiedenheit der Auffassungen z. B. bezüglich jener Ader, welche Redtenbacher bei den Odonaten als den Nerven IV ansieht, der nach Handlirsch nur ein Zweig der Medialis ist.

Wenn man nun bei *Handlirschia* den vor der Medialis (V) und den hinter ihr liegenden Tiefennerven nach Redtenbacher mit IV bzw. VI[2]) bezeichnete, so könnte darin eingeschlossen sein, daß sich, da diese Nerven hier in guter und vollkommener Aderentwickelung vorliegen, hier ein älterer kompleterer Zustand des Faltenbaus ausdrücke.

---

[1]) Solche Strünke reduzierter Längsadern lassen auch fossile Odonaten an der Subcosta bei dem „Nodus“ recht wohl wiedererkennen.

[2]) Ich erinnere auch hier daran, daß diesem Tiefennerven auch in der Tat ein einspringender Winkel am Hinterrand entspricht!

In dieser Hinsicht — der Frage der Entstehung und Wertung der Falten — wären nun auch die älteren Typen der Insekten zu befragen, als deren Urformen Handlirsch die Palaeodictyopteren ansieht.

Bei ihnen ist eine Längsfaltung schon deutlich zu beobachten, doch ist sie nicht in großer Regelmäßigkeit der Alternation und daher in geringer Vielheit der Falten vorhanden; es alternieren ganze Aderkomplexe! Ziemlich konstant ist die Tiefenlage der Subcosta und die Höhenlage des Radius selbst; doch wird betont, daß die Oberfläche zunächst des Flügelvorderrandes nach der Höhe des Radius im gesamten ein gleichmäßiges Emporsteigen habe und dort eine höchste Lage im Flügel einnehme, d. h. daß dessen Unterfläche eine starke Konkavität zeige (vgl. *Dictioneurula gracilis* Kliver spec., Palaeontogr., Bd. XXXII, wo die Unterfläche des Flügels beschrieben wird). Der äußere Zweig des Radius sector ist fast regelmäßig konvex, wo die Formerhaltung des Flügels gut ist, die hinteren Verzweigungen sind dagegen konkav; das Gleiche gilt von den äußeren Zweigen der Medialis und des Cubitus und bzw. von ihren hinteren Verzweigungen (vgl. z. B. *Microdictya Vaillanti* Brongniart, l. c., Taf. 23 Fig. 1; *Haplophlebium Barnesii* Scudder, l. c., Fig. 4; *Gegenemene sinuosa* Kliver sp. Palaeontogr. Bd. XXIX. Taf. 35 Fig. 4[1]); *Dictyoneura nigra* Kliver Palaeontogr. Bd. XXIX, Taf. 35 Fig. 5; *Dictyoneurula gracilis* Kliver sp. Palaeontogr. XXXII, 1886, Taf. XIV Fig. 7; *Breyeria Borinensis* de Borre, Handlirsch, Mém. du Mus. royal. hist. nat. Belg., T. III, 1904, Taf. III Fig. 9 [Aspekt der Unterfläche][2]) und ebenda *Anthracentomon latipenne* Handlirsch, Taf. I Fig. 6). — Die Anal-Hauptader scheint bei Palaeodictyopteren konkav zu liegen. Neben der oben erwähnten Wölbung der Vorderrandregion zeigt sich auch gelegentlich eine starke Wölbung der Analregion und fast überall eine gleichsinnige Wölbung der kleinen Membranfelder, was einem Vorwalten der Konkavitäten an der Unterfläche der Flügel entspricht (vgl. oben Seite 669).

Was nun die Protorthopteren nach Handlirschs Fassung betrifft, so scheinen ziemlich regelmäßig Costa und Radius konvex und alle übrigen Adern konkav zu liegen. Auch bei den Protoblattoiden etc. zeigt sich in der propterygialen Region ein Alternieren zwischen Rand, Subcosta und Radius, wobei allerdings schon in der äußeren Verzweigungsregion der Subcosta konvex liegende Adern beginnen, ebenso wie auch die Verzweigungen des Radius, des

---

[1]) Hier ist in beiden Fällen die Unterfläche des Flügels abgebildet.

[2]) Der Aspekt der Unterfläche kann auch hervorgerufen sein durch den Abdruck der Oberseite im Gestein, nicht nur durch die Vorlage der Unterfläche selbst.

Radius sector. der Mediana konvex liegen können; konstant ist hier unter den tiefen Falten, wie die Subcosta so auch die tiefe Ader VIII, welche die Grenze des Analkomplexes gegen den Cubitus bildet.

Bei diesen Gruppen alternieren also ganze Aderkomplexe, wobei eine gewisse Gesetzmäßigkeit nicht zu verkennen ist. — Gleichzeitig mit ihnen treten aber nun in Flügelform. Längs- und Queraderung schon stärker differenzierte, zum Teil reduzierte und zweifellos abgeleitete Gruppen auf, die Megasecopteren und Protodonaten nach Brongniart, deren Stellung im großen und deren systematische Klärung bis in die Gattungsmerkmale hinein durch die auch hier grundlegende Arbeit A. Handlirschs nun schärfer gegeben ist. Sie zeigen regelmäßigere Einzelnalternation der Nerven.

Wenn wir die Megasecopteren kurz anführen, so ist da besonders zu erwähnen. daß hier (unter Zugrundelegung der morphologischen Deutungen Brongniarts und Handlirschs) alle vorderen Zweige der Hauptadern hoch liegen und nach hinten zu in die dominierende Radialader einmünden, daß die hinteren Zweige einschließlich des Radius sector tief liegen; das sind im ganzen die Verhältnisse von Palaeodictyopteren; die regelmäßige Alternation der einzelnen Falten nach dem Rande erscheint also hier durch Reduktion der hinteren Verzweigung hervorgebracht.

Die Protodonaten zeigen nun schon so regelmäßige und reich verteilte Faltenalternation wie die lebenden Odonaten; gleichzeitig treten schon bei ihnen teils massenhaft die Schaltadern auf, welche gleichmäßig an hohen und tiefen Fältchen der Peripherie teilnehmen. Da nun hier auch noch reichliche Aderverzweigungen zu bemerken sind, so können auch an den hohen Falten „Abdrängungen“ von Zweigen stattfinden, was auch noch eher für die tiefen Adern gelten muß. Es ist auch die Möglichkeit, daß tiefe Zweige aus dem Verzweigungssystem abgetrennt werden, viel naheliegender.

So fällt bei *Protagrion, Meganeura* und bei der von Handlirsch mit großem Recht von *Meganeura* abgetrennten *Meganeurula* zwischen den Verzweigungen der Mediana und des Cubitus eine nach Brongniarts Abbildung, l. c., Taf. XLI Fig. 1, tiefliegende, frei bis zur Flügelwurzel reichende, starke Ader auf, welche Brongniart mit VIII bezeichnet, die ich aber unter Zugrundelegung der zutreffenden Nervendeutungen Handlirschs mit VI bezeichnen möchte. Ein vor der Medialis liegender tiefer Nerv verbindet sich bei *Meganeura* weiter nach hinten reichend als ein davorliegender gleichfalls tiefer (Brongniarts VI) mit dem Radius; ich halte ihn für den Nerven IV, der bei *Protagrion* gleichzeitig mit dem weiter rückwärts reichenden davorliegenden Radius sector als Schaltader von einer Querader abgeht, aber eine schiefe

Längsverbindung nach der Medialis zu hat; er ist aber bei *Meganeurula* (weiter nach vorne verdrängt) durch eine schwächere Schaltader repräsentiert, am hinteren Flügelrand aber doch durch eine Einbuchtung als wichtigerer Tiefennerv gekennzeichnet. Ein kleiner Unterschied in meiner Auffassung des Geäders gegenüber jener Handlirschs besteht nur darin, daß es mir nach vorstehendem berechtigter erscheint, diese Nerven eher zu dem nach vorne liegenden Komplex zu rechnen, von welchem sie abzustammen scheinen, da sämtliche Verzweigungen und Anschaltungen auf der Hinterseite der Hauptnerven stattfinden oder von hinten her im Sinne einer engeren Zugehörigkeit nach ihnen konvergieren; hier zeigt sich eben ein nicht zu verkennender propterygialer Bau der Adergruppierung.

Die oben gegebene Kennzeichnung der wechselnden Entwickelung der Tiefenader IV ist nicht ohne Zusammenhang mit den benachbarten Aderwandlungen, insofern nämlich einerseits die Medialis mit dem Radiusstamm selbst verwächst oder sich an ihn sehr eng anlegt, wie dies in deutlicher Unterordnung bei *Meganeura* der Fall ist; hier hat der bei *Meganeurula* und *Protagrion* abgedrängte, von einem Quernerven entspringende, als selbständige Schaltader entwickelte Radius sector sich mit der Medialis vereinigt, wobei so die sich dem Radius eng anordnende Medialis selbst den vom Radius losgelösten Radius sector aufnimmt.[1]) — Es ist selbstverständlich, daß derartige Ausbildungen bei wechselnder Flügelform auch auf den tiefen Nerven IV rückwirken müssen, je nachdem der wichtigere Radius sector im Kampf um den Platz den seinen behauptet.

Bei dem Protodonaten *Paralogus*, der sich an *Meganeura* anschließt, ist der propterygiale Teil des Flügels reduzierter als bei *Meganeura*, der Radius sector ist auf zwei Adern zurückgesetzt, wobei umgekehrt der tiefe Nerv IV, wenn auch nicht an Länge, doch an Dignität gewinnt.

Es ist klar, daß bei solchen Entwickelungen der Nerv IV bei den vorhandenen Protodonatenfamilien nicht die Länge von VI gewinnen oder behaupten kann; in letzter Linie ist daran die Ausbildung einer im proximalen Abschnitt starken propterygialen dynamischen Achse des Flügels schuld, welche aus fünf eng gedrängten, nahezu parallelen Stämmen gebildet ist, wodurch der Schnittpunkt zwischen Radius und Radius sector gleichzeitig stark nach innen ver-

---

[1]) Es zeigt sich hier etwas Ähnliches wie bei der Bildung der von Comstock und Needham sog. Brücke der typischen Odonaten, bei denen die Raumverringerung im proximalen Teil des Flügels und die konservierte bzw. noch reichere Aderentwickelung im distalen Teil zu der „Kreuzung" der Medialis durch den Radius sector führt, welche dann durch die „Brücke" von der Medialis her gestützt wird (S. 678).

schoben erscheint und endlich Radius sector vom Radius getrennt wird (*Protagrion; Meganeurula, Paralogus* und Hinterflügel von *Meganeura*).

Nur der Vorderflügel von *Meganeura* zeigt noch die Verbindung des Radius sector mit dem Radiusstamm und die geringste Verschiebung dieses Schnittpunktes nach der Flügelwurzel zu, so daß dieser nur wenig mehr proximalwärts von der Hauptgabelung der Medialis gelegen ist; hierbei zeigt sich auch, daß die dahinterliegende tiefe Ader IV noch in den Radius einmündet, von welchem Komplex sie offenbar abzuleiten ist.

Daß die eben besprochenen Verhältnisse wirklich ursprüngliche sind, das geht daraus hervor, daß nicht nur die gleichzeitig lebenden Protephemeriden keine solche sagittalen Differenzen in der Lage der beiden wichtigen „radialen" und „medialen" Verzweigungsstellen haben, daß die an alte carbonische Typen anschließenden Panorpaten, ebenso wie die gleichfalls nicht phyletisch jungen Phryganiden die Verzweigungsstelle zwischen Radius und Radius sector und die erste Gabelung der Medialis in nachbarlicher Gegenstellung zeigen, sondern auch die Palaeodictyopteren dieses Lageverhältnis trotz aller kleineren Variationen beizubehalten bestrebt sind.

Wir kommen also bezüglich der tiefen Nerven VI und besonders IV zu der Anschauung, daß diese tiefen Nerven bei abgeleiteten Typen da entstehen, wenn eine regelmäßige Aderfalten-Alternation vom Flügelrande her nach der Flügelwurzel vordringt, und wenn dies besonders vor einer propterygial verstärkten Vorderrandader der einzelnen Haupt-Aderkomplexe stattfindet, so daß je eine diesen gehobenen Vorderrandnerven entsprechende ununterbrochene Falte vor ihnen geschaffen wird, in deren Tiefe dann entweder eine Schaltader[1]) vom Außenrande her oder ein Zweig des vorhergehenden Aderkomplexes losgelöst und distal-proximal fortschreitend weitergeführt wird. Es ist ganz natürlich, daß bei der Durchführung der Faltenalternation die vor jedem erhobenen vordersten Hauptnerv der einzelnen Aderkomplexe liegende summarische Vertiefung, wie solche die Palaeodictyopteren zeigen, durch eine Haupttiefenader bezeichnet ist. Das höchste Stadium der Alternation wird dann das sein, daß vor dieser Tiefenader der hinterste Hauptnerv des vorhergehenden Aderkomplexes oder je die nach hinten gelegenen Zweigteile als einer einheitlichen hohen Grenzfalte angehörend ausgestaltet werden.

[1]) Ein Blick auf die Tiefenadern an den den Vorderflügeln hierin so ungleichen Hinterflügeln der Phasmiden, Locustiden, Acrididen, Fulgoriden, Grylliden zeigt, daß hier bei den stark faltbaren Neubildungen hinter der Tiefenfalte VIII die Tiefenadern durch Schaltadern gebildet sind; die breite Fächerentfaltung scheint mir überhaupt mehr durch „Schaltadern" möglich zu sein, während „Verzweigungen" der starren Längenentwickelung des Flügels dienlicher sind.

Dieser Fall ist offenbar bei dem in jeder Hinsicht höchst regelmäßigen Flügelbau von *Handlirschia* gegeben. Wie weit die tiefe Ader IV sich nach der Wurzel zu fortsetzt, das ist leider nicht erhalten, die tiefe Ader VI scheint aber eine ganz ähnliche Erstreckung gehabt zu haben wie die gleiche bei Protodonaten; IV geht aber in ungleich regelmäßigerer Weise als tiefe Ader zwischen den sehr primitiv und stark bewahrten, nachbarlich gegenübergestellten und beiderseits hohen Hauptverzweigungsstellen des Radial- und Medialkomplexes hindurch und läßt noch auf eine gewisse Längenerstreckung selbständigen Tiefenverlaufs nach der Wurzel zu schließen.

Abgesehen von den tiefen Adern, welche, soweit ihr proximales Ende zu beobachten ist, samt und sonders Schaltadern, also Neubildungen sind, ergibt das entweder an und für sich (primär) hohe oder durch die eingeschalteten Tiefenadern nach dem Prinzip der Alternation auch relativ und sekundär als gehoben zu erachtende, konvex liegende Geäder das Bild der Aderverteilung eines Palaeodictyopterenflügels mit sonst wenig auffallender Differenzierung in Einzelheiten. In diesem Bild herrscht auch noch die Aderverzweigung sehr vor; dies ist ein gleichfalls primitives Merkmal, das auch für mehrere der alten Protodonaten gilt, trotzdem bei ihnen gelegentlich (*Meganeurula* und *Protagrion*) sogar der Radius sector von einer kleinen Querader als Schaltbildung entspringt. Es äußert sich aber überhaupt hier der unregelmäßige Wechsel einer in der Umbildung und in außerordentlicher Proliferation begriffenen Gruppe, welcher auch die größten Insekten angehören. Das Verständnis der Entwickelung des Geäders dieser Gruppe liefert auch wohl den Schlüssel für die Auffassung bei *Handlirschia.*

Systematische Zugehörigkeit der Gattung Handlirschia.

Um dieser Frage noch etwas näher zu treten, müssen wir prüfen, ob nicht der außerordentlich prägnante Ausdruck der mechanischen Funktionen des Flügels in dem vorliegenden Maße gerade für gewisse Gruppen charakteristisch ist, ob er auf *Handlirschia* vererbt sein könne oder ob er als eine Erwerbung gelten kann, welche andere Merkmale verschleiert oder beschränkt hat, die dann im eigentlichen Sinne systematisch verwertbar wären.

Wir stellten fest, daß die großzügige Einfachheit des nach dem Hinterrand sich konvex umbiegenden Geäders an die Palaeodictyopteren erinnert, bei welchen, wie ebenfalls ausgeführt wurde, eine einfache Verstärkung des Aderwechsels durch konkave und konvexe Lage einzelner Hauptzweige deutlich erhalten ist. Ebenfalls unverkennbar ist bei Palaeodictyopteren eine propte-

rygiale Betonung der vorderen Aderzweige, wenn auch recht oft vereinzelte Aderverzweigungen von einem zwar mehr nach vorne orientierten Hauptstämmchen abzweigen und bogig nach vorne vorspringen. Etwas Derartiges sehen wir allerdings auch noch bei *Handlirschia*, aber nur an den hinteren und äußersten Verzweigungen der einzelnen Sektoren. — Es ist gewiß auffällig, welche große Ähnlichkeit der Verzweigungsvorgang besonders der wichtigen, konvex liegenden Adern von *Handlirschia* z. B. mit Flügeln von *Hadroneura bohemica* Now. (Handl. l. c., Taf. V Fig. 14) oder mit denen verschiedener Arten von *Becquerelia* (Handl. l. c., Taf. XI Fig. 22—25) oder mit *Epithete Meunieri* Brongn. spec. (vgl. Handlirsch Taf. XI Fig. 19) besitzt.

Dies gilt nun allerdings für die konvex liegenden Adern, bei welchen sich aber schon ein weiteres Moment bemerkbar macht; wie ausführlich beschrieben wurde, ist in den meisten Fällen die Abzweigung der Ader selbst noch normal. Die Faltenbildung ist eine Einschaltung und die Wirkung der letzteren äußert sich schließlich auch in einer Abdrängung der Seitenadern von dem Hauptstamm durch unregelmäßigere Schaltzellen; ganz entschiedene Schaltadern sind aber alle konkav liegenden Längsadern im Innern eines jeden Komplexes. Durch die höchst regelmäßige Anordnung der Membranzellen in den erwähnten zwei Richtungen wird der Abzweigungszusammenhang einerseits ebenso ganz unterdrückt als die Entstehung neuer Schaltlängsadern aus einem in primitiverem Zustand regellosen Adernetz (Palaeodictyopteren) andererseits ermöglicht.

Dies verweist mit Entschiedenheit auf die Odonaten oder Plectopteren (Handl.), welche letzteren nicht in erster Linie in Betracht kommen. Die obenerwähnten mechanischen Momente der Zweig„abdrängung“ können nun allein den Odonatentypus nicht bei Handlirschia voll hervorgebracht haben, sie konnten aber jedenfalls die Neigung zur Bildung selbständiger Schaltadern aus den längsorientierten Äderchen des Zwischengeäders unterstützen. Es ist kein Zweifel, daß gleiche Tendenz der gesamten Flügelgestaltung, ähnliche Längsverzweigung und ähnliche Ausbildung des Quergeäders bei *Palaeodictyopteren* auch ohne Aufgabe des strengen Verzweigungsmodus (vgl. auch z. B. Handl. l. c., Taf. V Fig. 19, *Rhabdoptilus Edwardsi* Brongn. bezüglich des Quergeäders und Taf. VII Fig. 10 *Polycreagra elegans* Handl. bezüglich der Längsverzweigung) stattfindet. Die „Einschaltungen“ bei *Handlirschia* behalten also dadurch, daß sie überhaupt eintreten mußten, für diese Gattung ihre systematische Bedeutung, wenn wir auch nicht aus dem Auge lassen dürfen, daß in eben dem Maße als im Flügelbau durch die Ausprägung mechanischer Zweckgestaltung die „Einschaltung“ gehoben wird, auch der ältere Modus der

„Verzweigung“ gedrückt wird, d. h. unverhältnismäßig in systematischer Hinsicht verliert.

Wenn wir nun die Odonaten in der Zusammenfassung, wie sie Handlirsch gibt, mit *Handlirschia* vergleichen, so dürfen wir im allgemeinen darauf hinweisen, wie bei unserem Fragment die reichlicher durch Einschaltungen gegliederte periphere Hinterregion sich ebensowohl abhebt gegen die sparsam und elementar gegliederten Mittel- bis Vorderregion der lebende Vertreter der Gruppe. Bei speziellem Vergleich wird man aber zugestehen, daß der Komplex, den wir der Medialis zugeteilt haben, bei Odonaten weder auf den Cubitus noch auf die Analis bezogen werden könnte.

Wenn wir nun zusehen, wie sich der Vergleich der mittleren bis vorderen, dem Radius und der Medialis angehörigen Mittelregion des Odonatenflügels mit den wenigen wichtigeren Verzweigungen mit jenen von *Handlirschia* stellt, so kann für die lebenden und fossilen Odonaten folgendes ausgesagt werden: — bei keinem findet sich das Verhältnis, daß eine mediale, vom Flügelrand ununterbrochen bis in die Nähe einer Hauptgabelungsstelle zurückreichende Längsschaltader eines reichlich zerteilten Hauptaderkomplexes (Medialis oder Radius sector) unmittelbar vor sich nach dem Vorderand zu eine ähnlich gestaltete und gleichwertige Gabelungsstelle eines nächsten vorderen Komplexes aufweist, welche wieder eine gleichartig gelegene Hauptschaltader nach außen verlaufen läßt; — dieses Verhältnis ist nirgends zu beobachten, an welcher beliebigen Stelle des Flügels man auch den Vergleich ansetzen möge.

Von den Odonaten (Handl. em.) schließt auch die bei *Handlirschia* noch vorwaltende reichliche Verzweigung in der hinteren peripheren Region aus, woselbst bei jenen hauptsächlich Schaltsektoren zu beobachten sind.

Das zuletzt erwähnte Verhältnis von Aderteilungen und Einschaltungen ist aber bei Protodonaten in mehreren Fällen noch deutlich, nicht nur bei *Meganeura* (Vorderflügel), sondern auch bei *Protagrion*, wo die tiefe Ader IV sich wie bei *Meganeura* (Hinterflügel) mit der Medialis nach hinten innen zu vereinigt.

Wie nach Handlirsch die drei Protodonaten-Familien des Karbon bei lebhaften Hinweisen zu den Odonaten doch auch noch zu den Palaeodictyopteren deutlichste Beziehungen haben, so würde dies auch für *Handlirschia* gelten. Es ist kein Zweifel, daß die wechselnden Verschmelzungen nach der Basis des Flügels zu, bei Protodonaten die Einfachheit der Palaeodictyopteren-artigen Verzweigung unterdrückt; die Erhaltung dieser läßt aber andererseits darauf schließen, daß bei Handlirschia die basale Verschmelzung noch nicht so weit

vorgeschritten oder auf einen kurzen Flügelstiel beschränkt ist, was auch durch das Weitschichtige in der Adersetzung deutlich erscheint. Dies wird zweifellos durch die Flügelform bedingt, da ich glaube, daß diese sich der der Megasecopteren einerseits, jener der kurzgestielten Odonatenflügel andererseits anschließt; die Flügelform ist auch bei Protodonaten recht wechselnd.

Die Membranwärzchen bei Handlirschia und ihre mutmassliche Bedeutung.

Was neben den eben dargelegten Eigenschaften des Geäders dem Flügel von *Handlirschia* eine Eigenstellung verschafft, das ist die Tatsache, daß in der Medial- und besonders der Radialgabelung eine Anzahl von Zellmembranen eigenartige Wärzchen oder wohlabgegrenzte Skulpturflecken tragen, wie man dies bei *Homoioptera* Brongn. und *Rhabdoptilus* Brongn. (vgl. l. c., Handlirsch bzw. S. 91 Taf. VI und S. 88 Taf. X), also auch bei den Palaeodictyopteren kennt, wie aber derartiges bei Protodonaten oder Odonaten nicht bekannt ist. Leider sind die Angaben über diese Dinge nicht ausführlicher gehalten; nach Brongniart sind es bei *Homoioptera* helle runde Fleckchen auf dunkelm Grund, bei *Rhabdoptilus* sind es zum Teil solche runde Fleckchen inmitten der Membranzellen, zum Teil nach hinten zugespitzte pigmentierte Flecken, welche sich unmittelbar an die Adern anschließen; Handlirsch nennt diese Bildungen Wärzchen. Der Größe nach stimmen sie mit den Wärzchen bei *Handlirschia* überein.

Die kleineren Vertiefungen, die bei *Handlirschia* in der Mitte der Wärzchen zu sehen sind, die auf eine Kommunikation nach innen hindeuten, erinnern z. B. an den Becher zur Befestigung der Schuppen in der Flügelhaut der Lepidopteren im allgemeinen, wobei auch daran zu erinnern ist, daß es Neuropteren (z. B. Phryganiden) mit beschuppten Flügeln gibt. Spezialisierte Typen der Flügelschuppen sind bei Lepidopteren nur die sog. Duftschuppen. „Häufig steht eine große Zahl von Duftschuppen dicht beieinander, so daß sie schon mit bloßem Auge als „Duftflecken" auffallen und in noch höherem Grade ist dies der Fall, wenn die Schuppen haarförmig verlängert sind und sich zu großen Duftbüscheln vereinigen" (K. Lampert, Großschmetterlinge Mitteleuropas, 1907, S. 11). Bei den Tagfaltern finden sich die Dufteinrichtungen auf der Hinterseite der Vorderflügel oder der Vorderseite der Hinterflügel (zwischen Costal- und Subcostalader), hie und da auch auf beide Flügel in ganzer Oberfläche verteilt; sie sind gegen Verdunstung unter gewöhnlichen Umständen dadurch geschützt, daß die Flügel mit der Außenfläche zusammengeklappt werden.

Bei *Handlirschia* wäre gegenüber den erwähnten Palaeodictyopteriden — falls unsere Deutung Annahme fände — eine Differenzierung eingetreten und zwar eine Beschränkung auf den Gabelungszwischenraum des Radius und der Medialis (woselbst sie aber nicht so deutlich sind wie im Winkel zwischen Radius und Radius sector). Dann wäre aber auch unser Flügel der eines männlichen Individuums. — Man muß aber die Verhältnisse der Lepidopteren bezüglich der Lage der Duftflecken nicht auch auf *Handlirschia* übertragen wollen und die Flügel wegen der vorderen Lage der hypothetischen Duftmerkmale zu einem Hinterflügel stempeln. Man darf auch nicht mit Notwendigkeit schließen, daß die Flügel wie bei gewissen Odonaten zusammenlegbar waren, um jene Organe zu schützen; in erster Linie ist deren Lage in den Winkeln der tiefen Falte schon ein gewisser Schutz; sie liegen hier den stärksten Teilen der Stammverzweigung nahe. — Als ein Moment ihres Schutzes gegen Verdunstungsverluste im besondern sowie des der weichen Teile des Flügelinnern im ganzen sei auch an die sicher dicke, pergamentartige Verstärkung der Flügelmembran erinnert, welche, soviel ich beurteilen kann, ganz einzigartige, an verschiedener Stelle und in verschiedener Weise auftretende Begleitverstärkungen der Aderverlaufs sich herausbilden ließ.

An die Verstärkung der Membran etwa eines Vorderflügels zu einer Art Flügeldecke kann dabei nicht wohl gedacht werden, da mit der Funktion eines Deckflügels z. B. die reiche Gliederung des Geäders in Länge und Quere, jene der Falten, das stärkstens ausgeprägte Relief und die bis ins kleinste deutliche mechanische Konstruktion des Flügels als Flugorgan, nicht zum mindesten auch die Anzeichen der Emporbiegung des Hinterrandes durchaus nicht vereinbar sind.

Es scheint die starke Flügelmembran darnach mehr ein Teil der Einrichtung zur Flugförderung und der Flügelfestigkeit gewesen zu sein, wie andererseits auch eine zu weitgehende Verdünnung der Zellmembran in Hinsicht auf die zwischen der oberen und unteren Flügelplatte befindlichen Weichteile und die Versorgung der Duftorgane nicht eintreten durfte. Vielleicht brauchte eine Gewichtserleichterung der Flügel auch nicht in Hinsicht auf die physiologische Leistungsfähigkeit und die Art der Flügelbewegung stattzufinden.

Kennzeichnung der Aderumbildungen bei Handlirschia.

Die am Schlusse des vorigen Kapitels berührten Eigenheiten der Membranverstärkung veranlassen, alles Hierhergehörige nochmals kurz zu einer Schlußfolgerung zusammenzufassen.

Das ausgeprägte regelmäßige Alternieren der Falten im Sinne der Festigung der langgestreckten und costo-anal etwas gewölbten Flügelfläche wird unterstützt durch die gleichsinnige konvexe Aufwölbung der Membranfacetten, so daß die Queräderchen durchwegs konkav liegen; sie ist nur möglich durch eine ziemlich starre Beschaffenheit der Flügelmembran, welche einen Teil der Flügelfestigung zu übernehmen geeignet ist. Aus dieser Eigenschaft folgert nun die Möglichkeit der breiten Rückenversteifungen der konvexen Falten, jener feinen, von den Membranen gebildeten Begleitleistchen der tiefliegenden Längsadern, jener des Vorder- und Hinterrandes, endlich der schief von innen und oben nach außen und unten durch die Facetten des proximalen Cubitus ziehenden Fältelungen (Fig. 1 rechts).

Wenn nun zwar die erwähnten Längsbegleitleisten die Längsadern zu unterstützen scheinen, so fällt doch auf, daß die Adern selbst auf den Versteifungsrücken sehr schmal sind, als ob sie durch Ablösung der mechanischen Funktionen reduziert seien.

Diese Wirkung scheint sich besonders bei den Queräderchen zu äußern, die oft ganz undeutlich und etwas abgelenkt werden, wenn sie auf die Versteifungsrücken auftreffen.

Ganz verschwinden ja die Queradern im Costal-Subcostalfeld und in den quer zum Hinterrand sich umbiegenden Endstücken der Längsadern und sind in beiden Fällen ersetzt durch ein Paar von den Membranen gebildeten feinkantigen Begleitleistchen. Wenn auch die Ader als Verstärkung der Zellmembran in der Tat äußerlich verschwindet, so könnte doch eingewendet werden, daß sie nur versenkt oder versteckt sei und daß die beiderseitigen von einander getrennten Leistenkanten gerade ihr Vorhandensein erweisen. Nun ist aber von lebenden Gruppen bekannt, daß konkave Falten bestehen, die ihre Ader zum Teil oder ganz verloren haben, und daß Quernerven auf die Tiefenlinie der Falte auslaufen können und abbrechen, als ob die Aderröhre noch bestände. Analoges läge hier vor; ich bin überzeugt, — auch das Auge erkennt nichts von einer versenkten Ader — daß in den erwähnten Fällen die Ader wirklich fehlt. Da nun bei der nicht nur lokalisierten, sondern ganz allgemeinen Membranversteifung das eigentliche Adersystem auf die feinsten Linien beschränkt ist, so darf angenommen werden, daß es nur noch zum speziellen Schutz des Tracheenverlaufes dient, und endlich, daß da, wo die Adern fehlen, auch der Tracheenzug reduziert wurde.

Nach der vorhandenen Literatur zu urteilen, scheinen nun wohl die Hauptadersysteme dem Tracheenverlauf zu entsprechen, Falten und Adern aber auch eine gewisse Selbständigkeit der Entwickelung einschlagen zu können,

welcher der Tracheenverlauf folgen kann oder auch nicht. Dies scheint bei *Handlirschia* einzutreffen; der Tracheenverlauf scheint sich reduziert zu haben, aber die ursprünglich größere Ausdehnung der Flügelfläche sich so gut, als es bei solcher Reduktion möglich ist, erhalten und selbständig gesichert zu haben. Dabei mußte aber eine große Leistungsfähigkeit der Individuen vorhanden sein, da der Flügel nicht nur relativ schwerer wurde, sondern auch tatsächliche Substanzvermehrung eintrat, welche gleichzeitig das Flügelwerkzeug im einzelnen feinstens umzugestalten gestattete.

Die Ursache der geschilderten Umwandlung mag in klimatischen Bedingungen zu suchen sein, worüber Näheres im folgenden Kapitel folgt.

Geologisches und Biologisches.

Ort und Zeit des Vorkommens des durch den Flügel uns überlieferten Insektes sind in gleicher Weise interessant wie seine Gestaltung und seine Klassifizierung.

Es stammt aus dem Mesozoikum, in dem nach Handlirsch l. c., S. 1319, durchwegs fremde Gattungen und vielfach unserer heutigen Insektenfauna fremde Familien auftreten. Es ist auch die insektenärmste Formationsgruppe des Mesozoikums, aus dem das Fossil stammt, besonders wenn man den mächtigen Aufbau des Buntsandsteins, Muschelkalks und Keupers in Betracht zieht: Handlirsch erwähnt nur ganz wenige sichere Megalopterenreste aus dem Buntsandstein, hauptsächlich Käferflügel aus der Lettenkohle, dem Keuper und Rhaet; somit wäre Handlirschia das erste Insekt aus dem Muschelkalk, zum mindesten aus dem unteren Muschelkalk.[1])

Unter voller Berücksichtigung der Unvollständigkeit unserer palaeontologischen Überlieferung kommt Handlirsch l. c. S. 1168 zu dem Schluß, daß direkt oder indirekt die Verarmung an Insekten in Perm und Trias auf die permische Eiszeit zurückzuführen sei. Die mageren Jahre des Perm haben aber nicht nur den Bestand der Insektenfauna beeinflußt, sie haben damit auch nach Handlirsch einen tiefen Einschnitt in der Entwickelung der Insekten verursacht, „insofern die bisher festgestellten Arten fast alle zu den holometabolen, also zu den wohl klimatisch angepaßten Formen gehören". — „Durch Kühle und Dürre mag die üppige, aber nur einem feuchten, milden Klima angepaßte primäre[2]) Insektenfauna stark dezimiert worden sein, und

---

[1]) Vgl. Handlirsch l. c., S. 398, Zeile 8.

[2]) Das Auftreten der hypothetisch als Duftflecken gedeuteten Flecken bei Palaeodictyopteren über die ganze Fläche der nicht zusammenfaltbaren Flügel ohne weitere Sicherung kann in feuchtem warmen Klima wohl angenommen werden.

nur an einzelnen klimatisch günstigeren Orten mögen die anpassungsfähigsten Formen der Vernichtung entgangen sein" (vgl. unten S. 693—694).

Unsere obige Auseinandersetzung über die mechanischen Vorrichtungen im Flügelbau von *Handlirschia*, die von der Flügelform bis in die Wölbung der kleinsten Membranfelder und in die Membranstärke selbst zu verfolgen ist, läßt uns ein wohl differenziertes Insekt auch in anderer Beziehung erwarten. Die Ausführungen zum Schluß der beiden letzten Kapitel könnten gut mit Trockenheit und Dürre, mit stürmischen Windverhältnissen in der Umgebung einer vom tiefen und offenen Meere etwas abgesetzten großen Bucht oder eines Binnenmeeres in Verein gebracht werden, dessen Absätze unmittelbar über der Fundbank in die gips- und salzführenden Schichten des mittleren Muschelkalks übergehen.

Ein in jeder Hinsicht gestärkter und geschützter Typus könnte dann trotz reduktiver Anzeichen auch zum Teil die Körpergröße bewahren, welche seine Vorfahren oder deren nähere Anverwandten im Carbon — wahre Riesen der Insektenwelt — auszeichnet (*Meganeura* hat eine Flügelspannweite von über 60 cm); so wäre *Handlirschia* zwar beträchtlich kleiner, aber das Riesenverhältnis zu den übrigen Insekten wäre geblieben, da alle von verschiedensten Orten bekannten triassischen Formen, insbesondere die der unteren bis mittleren Trias, durchschnittlich dagegen recht kümmerliche Tierchen sind.

Handlirsch weist nun darauf hin, daß weitgehende Transgressionen des Meeres „die Landgebiete der Triaszeit auf das östliche Nordamerika, Südafrika, Argentinien und das nördliche Europa beschränken." Von dem letzteren und von Nordamerika leitet Handlirsch nun die Entwickelung der mesozoischen Insektenfauna ab. Die Lage des Fundorts von *Handlirschia* an der nordöstlichen Grenze der geschlossenen Muschelkalkplatte Unterfrankens ist immerhin den nordöstlichen und nordwestlichen vor und zur Triaszeit zum großen Teil als Kontinente bestehenden älteren Formationsgebieten gleich fern oder gleich nahe gelegen, weit gegriffen ca. 70 km, von dem vermutlichen Zug des südlichen vindelicischen Kontingents dagegen mindestens 100 km.

Wie kommt nun dieser Insektenrest, der bei der Einbettung jedenfalls viel vollständiger war, in die wohlberechnete Mitte der Triasenge zwischen Spessart und Thüringer Wald? Es ist nicht wahrscheinlich, daß ihn Strömungen dahin führten; der Anschauung wird vielmehr das zum Vorbild dienen müssen, was Joh. Walther für die Insekten des lithographischen Schiefers in seinen interessanten Ausführungen mit Recht geltend macht: „Man gewinnt den Eindruck, daß von einem reichbesiedelten Festland durch Stürme gerade die

guten Flieger am weitesten vom Lande weggetragen werden könnten.“ [1]) Es ist natürlich, daß gute und kühne Flieger, welche zum Teil als fleischfressende Räuber zur Zeit der Ebbe am Meeresstrande reichliche Nahrung finden und sich zu weit hinauswagen, leicht in die Meereswüste verweht werden können; es ist dies ja auch ein Grund der Dezimierung aller großflügeligen Insekten und der schließlich häufiger eintretenden Flügelreduktion in insularen Gebieten nicht nur des Ozeans sondern auch der stürmischen Hochgebirge. Was Joh. Walther daher für *Kaligramma Haeckeli* und von ihm aus allgemein geologisch schließt, das dürfte auch für *Handlirschia* geschlossen werden: daß die Gattung von einem größeren, wohl etwas insektenreicheren Festland stamme und daß sie keinesfalls durch Strömungen an den Ort der Einbettung verfrachtet worden sei, daß sie vielmehr an einer seichten Stelle oder an einer vorübergehend vom Wasser nicht belaufenen Schlammbank festklebte, vom Schlamm überdeckt und so verewigt wurde. Ist aber etwas Derartiges nun in der Mitte der Muschelkalk-(Wellenkalk-)verbreitung denkbar? Diese Frage muß bejaht werden, insbesondere für den Schaumkalk, in dem der Fund gemacht wurde.

Der Verfasser hat bei der Besprechung der Gesteinsfolge dreier Bohrprofile auf Steinsalz in Unterfranken auf eigentümliche Erscheinungen in den Bohrkernen des Schaumkalkes von Bergrheinfeld aufmerksam gemacht und es ist hinzuzufügen, daß dies für den Schaumkalk Frankens überhaupt gilt. An diesem im mittleren Innern der Muschelkalkverbreitung liegenden Orte zeigte sich also der Schaumkalk in der Tiefe von gleicher Beschaffenheit wie im westlichen Zutageausstreichen der Formation, das jedenfalls dem alten Ufer sehr viel näher liegt; trotzdem finden sich hier (vgl. Geogn. Jahreshefte XII, 1901, S. 118) die Anzeichen einer außerordentlichen Verflachung des Meeresbodens und der Brandungswirkung über einem rasch erhärteten, unmittelbar vorher abgelagerten Meeresboden, auf welchem sich autochthon ein lebhaftes organisches Leben mariner Organismen entfaltete. Obwohl nun überall im Schaumkalke selbst sich die Anzeichen ausgiebiger Strömungslagerung [2]) erkennen lassen, so ist natürlich, daß ein Insektenrest von dieser Schönheit der Oberflächenerhaltung nicht erst nach längerem Liegen im strömenden Wasser zur Fossilisation gelangt sein konnte; er mußte von außen in den sich während des Wachstums der Schaumkalkbänke hie und da bildenden feineren Schlammeinschaltungen, die stets in gewissem Umfange wieder der Zerstörung anheimfielen, hereingekommen sein; er konnte etwa nach längerem Windkampf

[1]) Haeckel-Festschrift, S. 185 und 188.

[2]) Schiefe Lagerung innerhalb der Bänke und großzügige Wellenskulptur auf deren ausgeebneter Oberfläche!

ermattet sich auf eine aufragende Schlammbank niedergelassen haben und so von einer Sturzwelle überspült und begraben worden sein. Es mußte sich aber auch die wieder unter Wasser gesetzte geringe Schlammlage rasch erhärten. In dieser Beziehung erinnere ich auch an die von E. Philippi im Schaumkalk von Jena und anderwärts gemachten Beobachtungen über die durch rasche Erhärtung konservierten Kriech- und Schleppspuren.

Diese Darlegungen dienen auch — abgesehen von der Feststellung der hierhergehörigen biologischen Umstände — dazu, verständlicher zu machen, was oben behauptet wurde, daß nämlich bei so sehr spezifizierten Umständen der Erhaltungsmöglichkeit keine oder sehr geringe Aussicht besteht, daß bald ein ergänzender Fund unsere Kenntnis von *Handlirschia* bereichern könne, besonders wenn man bedenkt, daß der Schaumkalk sich an allen Orten seiner Verbreitung in einem lebhaften Abbau zu technischen Zwecken schon seit langer Zeit befand, seine marine Conchylienfauna aber sehr wohl bekannt ist. Die Auffindung dieses Flügels ist einer jener seltenen Funde, welche bis zuletzt einer ganzen Kombination von Glückszufällen zu verdanken ist, welche solche Fossilien auf lange Zeit als Unica wertschätzen läßt.

Aus diesem Grunde scheint es mir daher auch notwendig, das Fossil auch in dem unvollständigen Zustand seiner Auffindung so erschöpfend wie möglich zu behandeln, seine Restauration zu versuchen, welche für fossile Insekten auch bei noch mangelhafterer Erhaltung erst noch kürzlich in vielfacher Weise in Angriff genommen wurde.

Nachtrag zu Seite 690—691: Bezüglich der Darstellungen Handlirschs über die wohl durch eine permische Eiszeit erfolgte Unterbrechung in der Entwickelung der Insektenwelt, deren Folgen sich in einer Dezimierung und Typenänderung in der triadischen Fauna bemerkbar mache, hat neuerdings J. Schuster bei Gelegenheit der Bearbeitung einer von mir im Donnersberggebiet der Rheinpfalz gefundenen Flora des oberen Oberrotliegenden sich dahin geäußert, daß er direkte Einwirkungen einer entschiedenen klimatischen Änderung bezüglich der Wärmeverhältnisse nicht folgern könne; es gehe vielmehr das Klima scheinbar allmählich aus einem feuchten warmen in ein trockenes warmes über. Unter den gehäuften Pflanzenresten des einen Fundortes, an welchem sich u. A. die Einwanderung einer Art der in dem Zechstein schon auftretenden, doch hauptsächlich mesozoischen Gattung *Ullmannia* bemerkbar macht, entdeckte er auch den Rest eines Blattidenflügels, den Handlirsch als *Procopoblatta Schusteri* beschreibt, wobei auf gewisse mesozoische Ausbil-

dungen hingewiesen wird.[1]) Jedenfalls stimmen die Äußerungen beider Forscher darin überein, daß in den Gebieten des europäischen Perm sich die Folgen einer allmählich einbrechenden Trockenheit bemerkbar machen, durch welche zunächst eine Auslese der Flora nach den morphologischen Kennzeichen der Trocken- oder Windtypen der Blattbildung geschieht. Vielleicht wäre der Einbruch der trockenen und dürren Epoche am Fundort jener Flora stärker bemerkbar, wenn nicht durch die Effusion zahlreicher submariner Laven warme Feuchtigkeit genug in der Umgebung der kleineren insularen Kontinentalgebiete geschaffen worden wäre, was vielleicht auch allgemeinere Bedeutung für die Gebiete des europäischen Perm haben könnte.

[1]) Geogn. Jahreshefte XX, 1907, S. 236—240.

Tafelerklärung.

Fig. 1. Darstellung des Flügelrestes von Handlirschia Gelasii in 3 maliger Vergrößerung. Die Poren in der oberen Aderverzweigung werden als „Duftporen“ gedeutet (S. 687).

Fig. 2. Photographische Aufnahme des Flügelrestes in etwas über Naturgröße; die Länge des gestreckten Hinterrandes beträgt in Wirklichkeit 49 mm; die größte Höhe des Flügels an seiner vollständigsten Stelle senkrecht zum Hinterrand gemessen beträgt 22 mm.

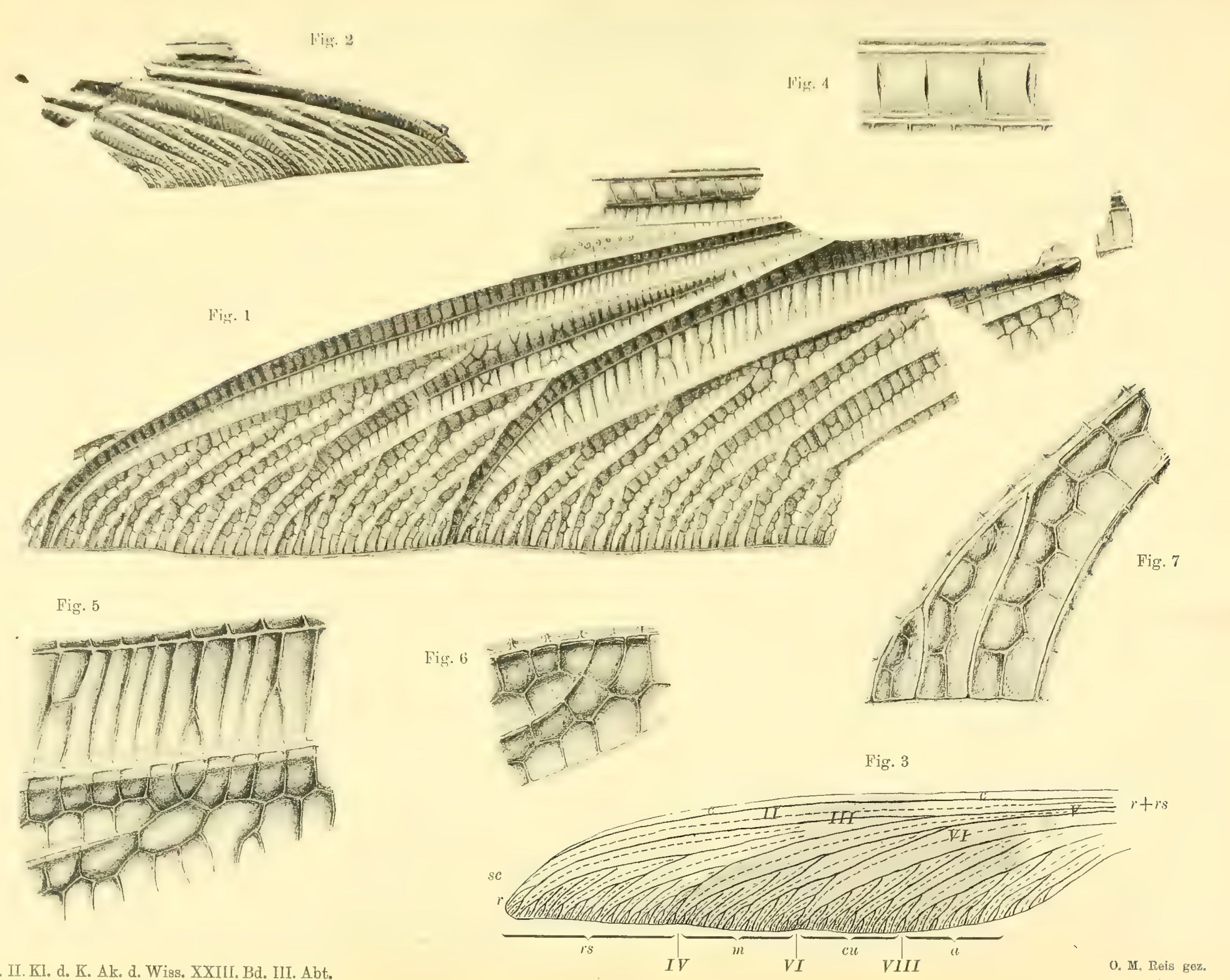
Fig. 3. Restauration des Flügels (S. 675) mit Einzeichnung der gebräuchlichsten Adersignaturen, der erhalten gebliebene Teil ist getönt. Die Adern auf den hohen Falten sind durchgezogen, jene in den tiefen Falten sind gestrichelt (S. 664—669).

Fig. 4. Darstellung des Costal-Subcostalbandes in etwa 8-maliger Vergrößerung; es zeigt die aufgeworfenen Seitenränder der Membranfelder und das Verschwinden der Queradern zwischen jenem (S. 664).

Fig. 5. Darstellung der fünftletzten Abzweigung des Cubitus nach hinten, welcher Zweig eine große Selbständigkeit von der Hauptader erlangt hat (ca. 6 mal vergr.); dies Bild zeigt auch die Versteifung des Rückens der hohen Falten, auf denen die Adern selbst einen kleinen Raum einnehmen (S. 663 und S. 666).

Fig. 6. Ähnliche Darstellung der drittletzten Verzweigung des Radius nach hinten (vgl. zu Fig. 3).

Fig. 7. Darstellung des Auslaufens der Zweige auf den Hinterrand (ca. 6 mal vergr.); dies Bild zeigt das Verschwinden der Adern auf den versteiften Rücken der hohen Falten und die Vertretung durch Furchen, was auch auf dem versteiften Hinterrand zu erkennen ist (vgl. zu Fig. 4 und S. 667/668).


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
sc
r
r + rs
II
III
V
VI
rs
m
cu
a
IV
VI
VIII

O. M. Reis gez.



ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN KLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDZWANZIGSTER BAND.

ERSTE ABTEILUNG.

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXXVIII. BAND.

MÜNCHEN 1906.

VERLAG DER K. B. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION DES G. FRANZ'SCHEN VERLAGS (J. ROTH).



ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN KLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDZWANZIGSTEN BANDES

ZWEITE ABTEILUNG

IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXXVIII. BAND.

MÜNCHEN 1907

VERLAG DER K. B. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION DES G. FRANZ'SCHEN VERLAGS (J. ROTH).



ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHEN KLASSE

DER KÖNIGLICH BAYERISCHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

DREIUNDZWANZIGSTEN BANDES

DRITTE ABTEILUNG.

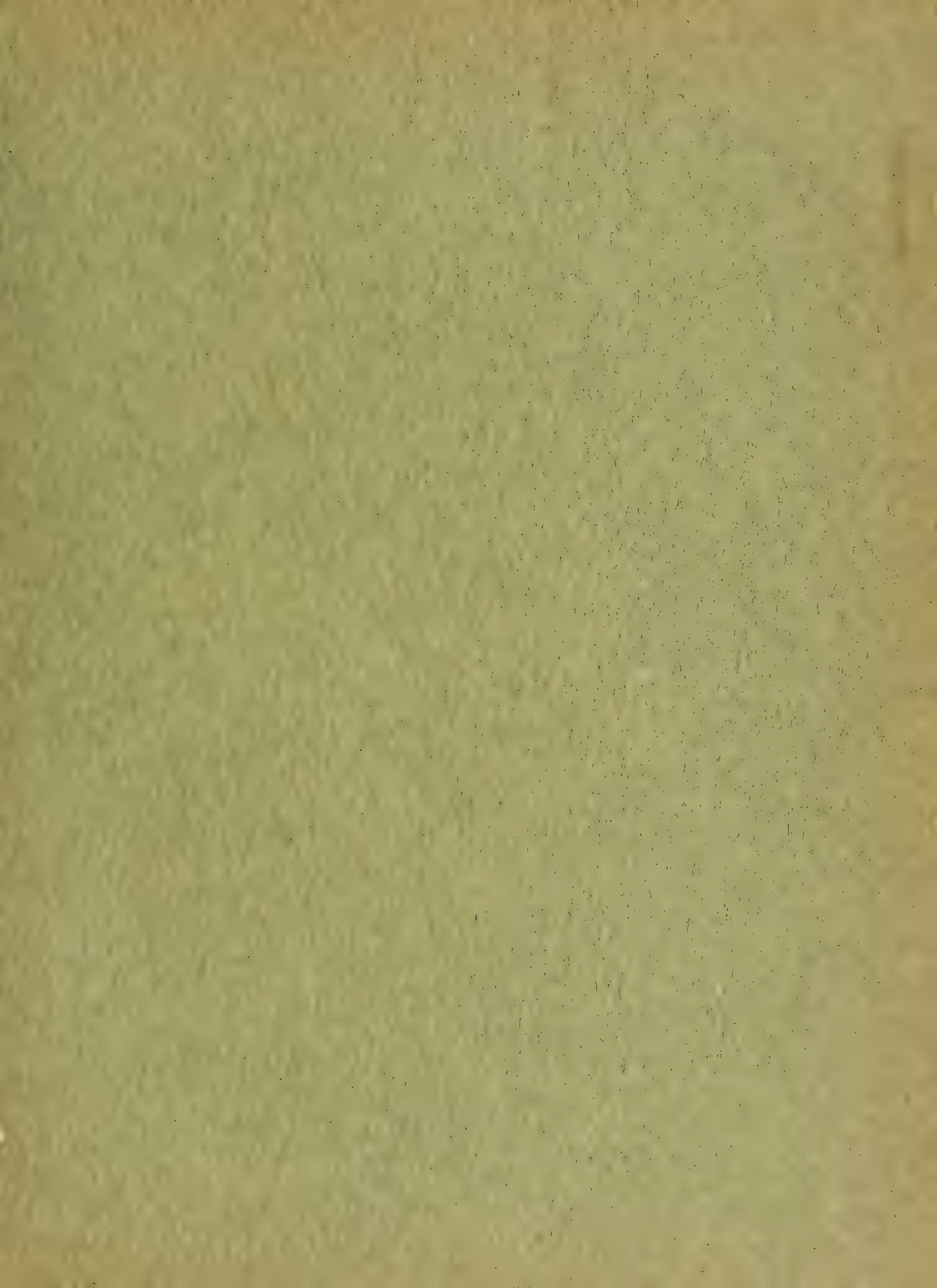
IN DER REIHE DER DENKSCHRIFTEN DER LXXVIII. BAND.

MÜNCHEN 1909.

VERLAG DER K. B. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION DES G. FRANZ'SCHEN VERLAGS (J. ROTH).





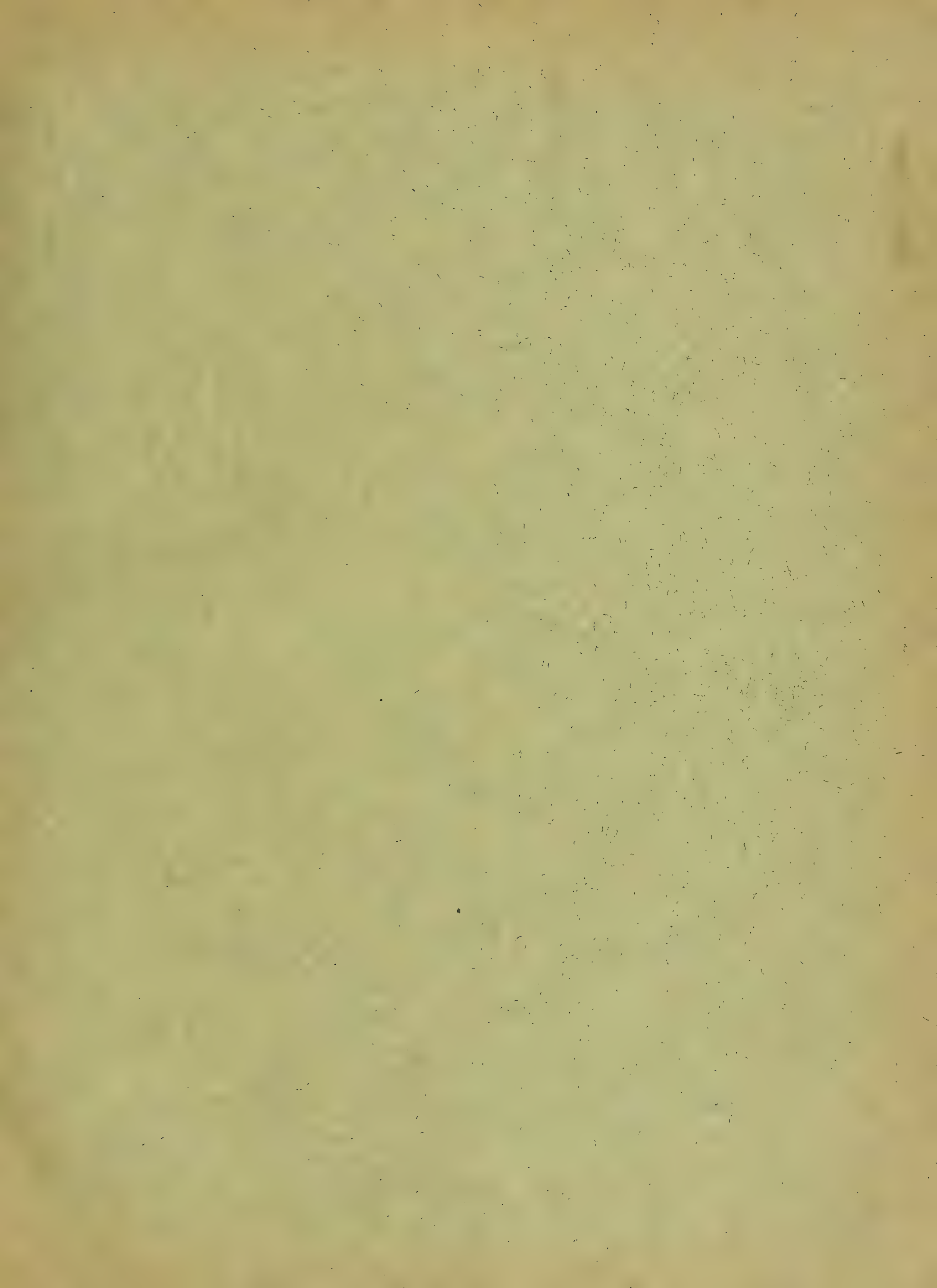
Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.



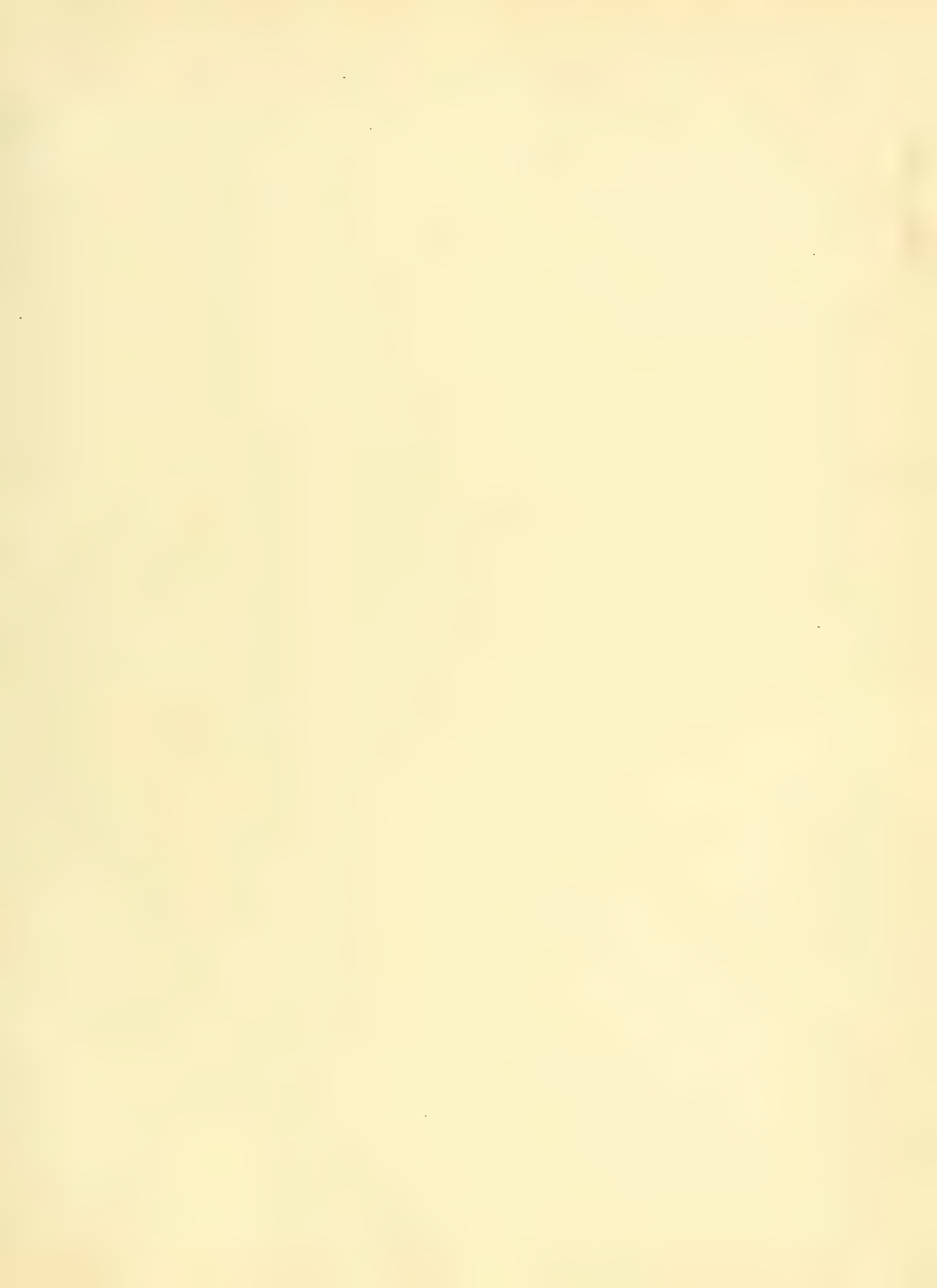
Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

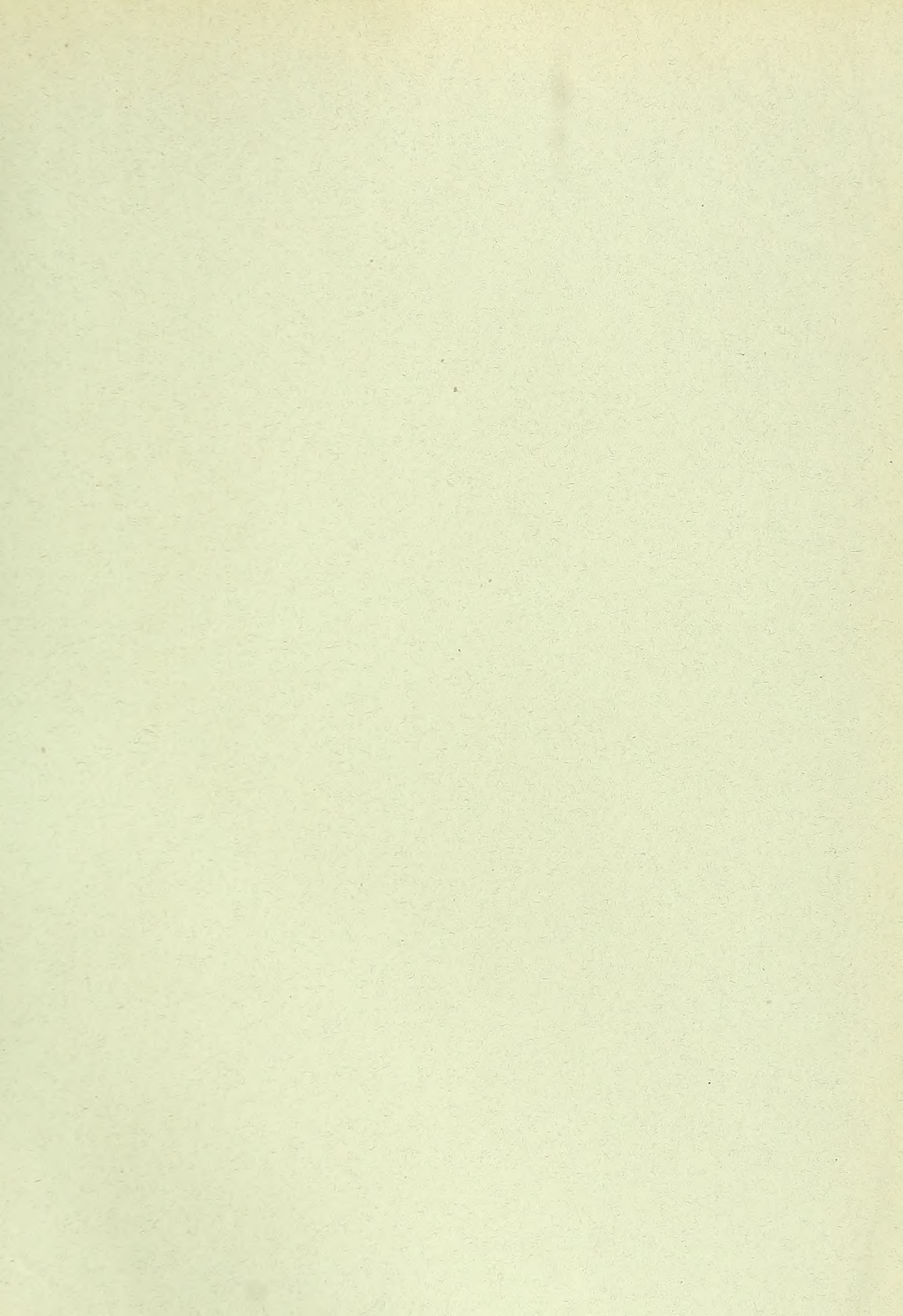


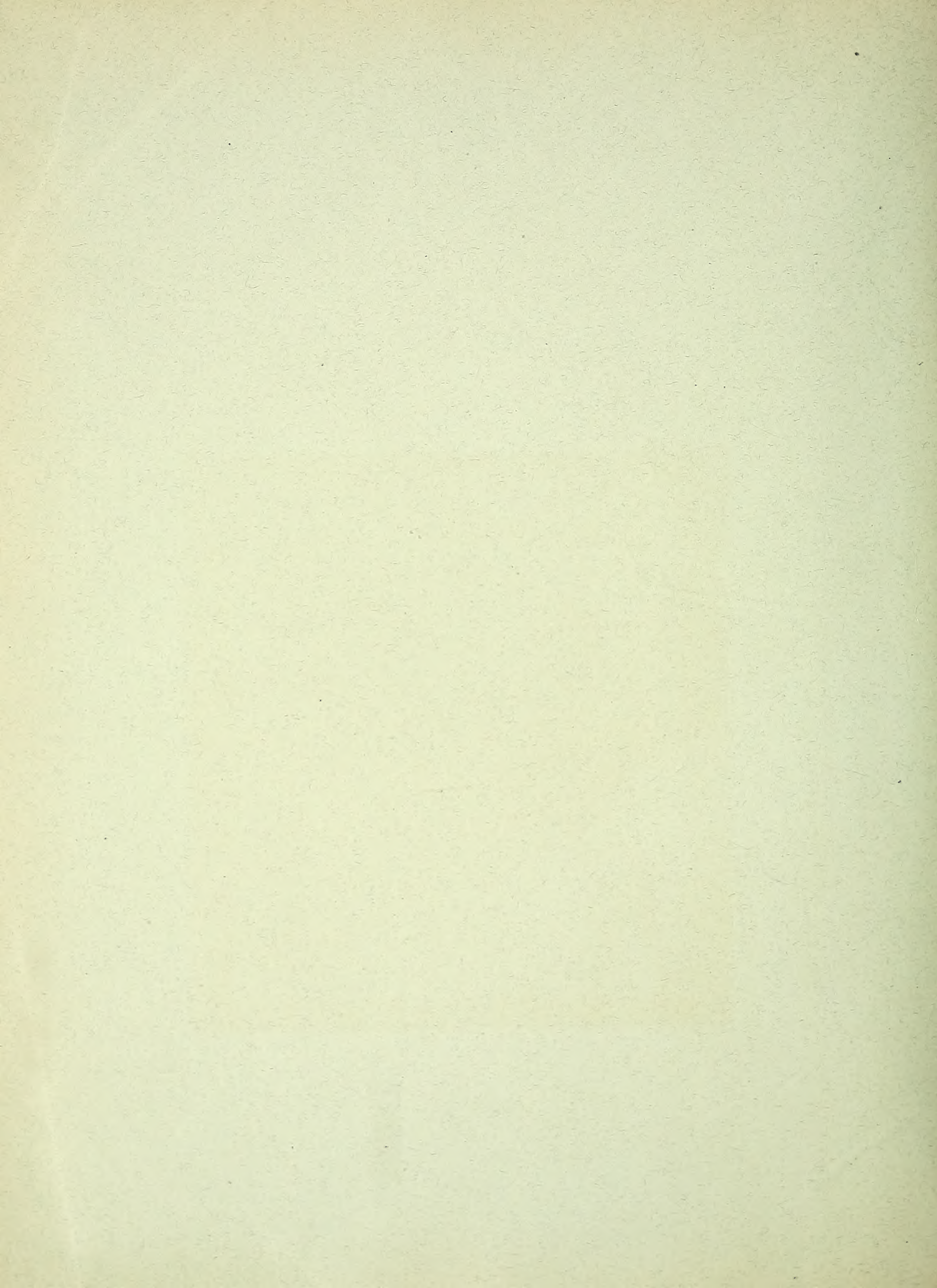
Inhalt.

Akademische Buchdruckerei von F. Straub.










AMNH LIBRARY
100051562

